И. П. Рязанцева, Непрерывный метод регуляризации первого порядка для монотонных вариационных неравенств в банаховом пространстве, *Дифференц. уравнения*, 2003, том 39, номер 1, 113–117

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 1, с. 113–117

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.988.68

НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ МОНОТОННЫХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2003 г. И. П. Рязанцева

Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство с модулем выпуклости $\delta_X(\varepsilon)$ (см. [1, 2]), X^* – строго выпуклое сопряженное X пространство, $A: X \to X^*$ – монотонный хеминепрерывный оператор [3, с. 22–23], Ω – выпуклое замкнутое множество в $D(A)$.

Рассмотрим вариационное неравенство

$$\langle Ax - f, x - y\rangle \le 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad x \in \Omega; \tag{1}$$

здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – отношение двойственности между пространствами X и X^*. Считаем, что множество N его решений непусто и $0 \notin N$, $f \in X^*$. Поскольку оператор A не обладает свойством типа равномерной монотонности [4, с. 79], то непрерывную зависимость решения неравенства (1) от возмущений данных установить не удается. Поэтому задачу (1) следует отнести к классу некорректных и для ее решения использовать какой-либо метод регуляризации.

Целью настоящей работы является построение для вариационного неравенства (1) непрерывного метода первого порядка, сводящегося к некоторому эволюционному вариационному неравенству в банаховом пространстве X. Пусть $\alpha(t)$ – положительная функция, определенная при $t \ge t_0 \ge 0$, и

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим регуляризованное вариационное неравенство вида

$$\langle Ax_\alpha(\tau) + \alpha(\tau)Jx_\alpha(\tau) - f, x_\alpha(\tau) - y\rangle \le 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad x_\alpha(\tau) \in \Omega, \quad \tau \ge t_0. \tag{3}$$

Тогда при условии (2)

$$\lim_{\tau\to+\infty} x_\alpha(\tau) = x^*; \tag{4}$$

здесь x^* – нормальное решение вариационного неравенства (1), т.е. решение, имеющее минимальную норму (см. [5, 6]), $J: X \to X^*$ – дуальное отображение в пространстве X [3, с. 311]. Из (4) следует существование постоянной $d > 0$ такой, что $\|x_\alpha(\tau)\| \le d$ при всех $\tau \ge t_0$.

Пусть вместо оператора $A: X \to X^*$ известно семейство монотонных хеминепрерывных операторов $\{A(t)\}$, $A(t): X \to X^*$, $\Omega \subset D(A(t))$, $t \ge t_0$, и

$$\|A(t)x - Ax\| \le h(t)g(\|x\|) \quad \forall x \in \Omega; \tag{5}$$

здесь $g(s)$ $(s \ge 0)$ – неотрицательная ограниченная функция, т.е. переводящая ограниченное множество в ограниченное, $h(t) \ge 0$, $h(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а вместо элемента f известны его δ-приближения $f(t)$, причем

$$\|f - f(t)\| \le \delta(t), \quad t \ge t_0, \tag{6}$$

где $\delta(t)$ – функция того же класса, что и $h(t)$. Множество Ω считаем заданным точно.

Построим регуляризованную задачу для неравенства (1) в форме эволюционного вариационного неравенства

$$\begin{gathered}\langle dJu(t)/dt, u(t) - y\rangle + \langle Ju(t) - Jy, du(t)/dt\rangle + \gamma(t)\langle A(t)u(t) + \alpha(t)Ju(t) - f(t), u(t) - y\rangle \le 0 \\ \forall y \in \Omega, \quad u(t) \in \Omega,\end{gathered} \tag{7}$$

$$u(t_0) = u_0 \in \Omega; \tag{8}$$

здесь $\gamma\ (t)$ – положительная функция. Метод (7), (8) назовем непрерывным методом регуляризации первого порядка для вариационных неравенств в банаховом пространстве.

Исследование поведения $u(t)$ при $t \to +\infty$ будем вести методом замороженных коэффициентов (см. [7, гл. 2, § 10]), поэтому наряду с (7) при каждом $\tau \geq t_0$ построим вариационное неравенство с точными данными

$$\langle dJv(t,\tau)/dt, v(t,\tau) - y\rangle + \langle Jv(t,\tau) - Jy, dv(t,\tau)/dt\rangle +$$

$$+\gamma(t)\langle Av(t,\tau) + \alpha(\tau)Jv(t,\tau) - f, v(t,\tau) - y\rangle \leq 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad v(t,\tau) \in \Omega, \tag{9}$$

$$v(t_0,\tau) = u_0 \quad \forall \tau \geq t_0. \tag{10}$$

Теорема. *Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство, X^* – пространство, сопряженное X, которое считаем строго выпуклым, $A : X \to X^*$ – монотонный хеминепрерывный оператор, Ω – выпуклое замкнутое множество из $D(A)$, вариационное неравенство (1) имеет непустое множество решений N, $0 \notin N$, вместо A известны его монотонные хеминепрерывные приближения $A(t)$, а для элемента f даны его приближения $f(t)$, причем выполнены неравенства (5) и (6), $\alpha(t)$ – положительная убывающая выпуклая дифференцируемая функция, обладающая свойством (2), $\gamma(t)$ – невозрастающая положительная дифференцируемая функция. Пусть задачи (7), (8) и (9), (10) однозначно разрешимы в классе $C^1[t_0, +\infty)$ для любого элемента $u_0 \in \Omega$, причем существует постоянная $d_1 > 0$ такая, что $\|u(t)\| \leq d_1$ при всех $t \geq t_0$, и, кроме того, выполнены следующие условия: 1) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\delta(t) + h(t)}{\alpha(t)} = 0$; 2) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\alpha'(t)}{\alpha^2(t)\gamma(t)} = 0$; 3) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\gamma'(t)}{\alpha(t)\gamma^2(t)} = 0$.*

Тогда при $t \to +\infty$ решение эволюционной задачи (7), (8) при любом элементе $u_0 \in \Omega$ стабилизируется по норме пространства X к нормальному решению вариационного неравенства (1).

Доказательство. Прежде всего установим некоторые свойства параметрических функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$. Из условий 2) и 3) следует, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\alpha'(t)/\tilde\alpha^2(t) = 0$, $\tilde\alpha(t) = \alpha(t)\gamma(t)$, т.е. при $t \geq \bar t \geq t_0$ имеем $-\tilde\alpha'(t)/\tilde\alpha(t) \leq \tilde\alpha(t)/2$. Интегрируя последнее неравенство на сегменте $[\bar t, t]$, а затем устремляя t к $+\infty$, получаем: 4) $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde\alpha(t)\exp(\int_{t_0}^{+\infty} \tilde\alpha(t)\, dt) = +\infty$. Свойство (2) функции $\alpha(t)$ и невозрастание $\gamma(t)$ позволяют сделать вывод: 5) $\int_{t_0}^{+\infty} \tilde\alpha(t)\, dt = +\infty$. Положив в (3) $y = v(t,\tau)$, а в (9) $y = x_\alpha(\tau)$ и сложив полученные неравенства, имеем

$$\langle dJv(t,\tau)/dt, v(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle + \langle Jv(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau), dv(t,\tau)/dt\rangle +$$

$$+\gamma(t)\langle Av(t,\tau) - Ax_\alpha(\tau), v(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle + \gamma(t)\alpha(\tau)\langle Jv(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau), v(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle \leq 0. \tag{11}$$

Введем неотрицательную функцию (см. [3, с. 313]) $w(t,\tau) = \langle Jv(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau), v(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle$, тогда $dw(t,\tau)/dt = \langle dJv(t,\tau)/dt, v(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\rangle + \langle Jv(t,\tau) - Jx_\alpha(\tau), dv(t,\tau)/dt\rangle$, и с учетом этих обозначений и монотонности оператора A из неравенства (11) получаем $dw(t,\tau)/dt \leq$ $\leq -\gamma(t)\alpha(\tau)w(t,\tau)$. Отсюда после интегрирования на сегменте $[t_0, t]$ вытекает неравенство

$$w(t,\tau) \leq w(t_0,\tau)\exp\left[-\alpha(\tau)\int\limits_{t_0}^{t} \gamma(t)\, dt\right], \tag{12}$$

где $w(t_0,\tau) = \langle Ju_0 - Jx_\alpha(\tau), u_0 - x_\alpha(\tau)\rangle$. Поскольку $\|x_\alpha(\tau)\| \leq d$, то с учетом определения дуального отображения нетрудно вывести оценку $w(t_0,\tau) \leq (\|u_0\| + \|x_\alpha(\tau)\|)^2 \leq (\|u_0\| + d)^2 = C$. Значит, неравенство (12) можно записать в виде

$$w(t,\tau) \leq C\exp\left[-\alpha(\tau)\int\limits_{t_0}^{t} \gamma(t)\, dt\right]. \tag{13}$$

Теперь делаем вывод об ограниченности функции $w(t,\tau)$ при всех $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$. Используя свойство дуального отображения [3, с. 313] $\langle Jx - Jy, x - y\rangle \geq (\|x\| - \|y\|)^2$, имеем $(\|v(t,\tau)\| - \|x_\alpha(\tau)\|)^2 \leq w(t,\tau) \leq C$, т.е. $\|v(t,\tau)\| \leq \sqrt{C} + d = d_2$. Таким образом, мы установили, что решение задачи (9), (10) при всех $t \geq t_0$, $\tau \geq t_0$ удовлетворяет неравенству $\|v(t,\tau)\| \leq d_2$, т.е. ограничено.

Из неравенства (13) при $t = \tau$ получаем

$$w(\tau,\tau) \leq C \exp\left[-\alpha(\tau)\int_{t_0}^{\tau}\gamma(t)\,dt\right]. \tag{14}$$

Из условия 5), свойства (2) функции $\alpha(t)$ и положительности $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ делаем вывод о расходимости $\int_{t_0}^{+\infty}\gamma(t)\,dt$. Теперь, используя правило Лопиталя, условие 2) теоремы и убывание функции $\alpha(t)$, убеждаемся, что аргумент экспоненты в правой части неравенства (14) стремится к $-\infty$ при $\tau \to +\infty$. Значит, установлено, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} w(\tau,\tau) = 0. \tag{15}$$

Известно [5], что дуальное отображение в X обладает свойством

$$\langle Jx - Jy, x - y\rangle \geq (2L)^{-1}\delta_X(\|x-y\|/c_2), \tag{16}$$

где L – постоянная Фигеля, $c_2 = 2\max\{1, \|x\|, \|y\|\}$. Следовательно,

$$(2L)^{-1}\delta_X(\|v(\tau,\tau) - x_\alpha(\tau)\|/d_3) \leq w(\tau,\tau), \tag{17}$$

где $d_3 = 2\max\{1, d, d_2\}$. В равномерно выпуклом пространстве модуль выпуклости $\delta_X(\varepsilon)$ есть непрерывная возрастающая функция на [0,2], $\delta_X(0) = 0$ (см. [1, 2]), поэтому из соотношений (15) и (17) вытекает, что $\|v(\tau,\tau) - x_\alpha(\tau)\| \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Определим еще одну неотрицательную функцию $R(t,\tau) = \langle Ju(t) - Jv(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle$, для которой $dR(t,\tau)/dt = \langle dJu(t)/dt - dJv(t,\tau)/dt, u(t) - v(t,\tau)\rangle + \langle Ju(t) - Jv(t,\tau), du(t)/dt - dv(t,\tau)/dt\rangle$. Полагая в (7) $y = v(t,\tau)$, а в (9) $y = u(t)$ и складывая полученные неравенства, имеем

$$\begin{gathered}\langle dJu(t)/dt - dJv(t,\tau)/dt, u(t) - v(t,\tau)\rangle + \langle Ju(t) - Jv(t,\tau), du(t)/dt - dv(t,\tau)/dt\rangle +\\ +\gamma(t)\langle A(t)u(t) - Av(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle - \gamma(t)\langle f(t) - f, u(t) - v(t,\tau)\rangle +\\ +\gamma(t)\langle \alpha(t)Ju(t) - \alpha(\tau)Jv(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle \leq 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Используя монотонность операторов $A(t)$, условие (5), свойство ограниченности функции $g(s)$, доказанную ограниченность решений $v(t,\tau)$ задачи (9), (10) и предполагаемую ограниченность $u(t)$, запишем цепочку соотношений: $\langle A(t)u(t) - Av(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle = \langle A(t)u(t) - A(t)v(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle + \langle A(t)v(t,\tau) - Av(t,\tau), u(t) - v(t,\tau)\rangle \geq -h(t)g(\|v(t,\tau)\|)\|u(t) - v(t,\tau)\| \geq -h(t)M$, $M > 0$. Учитывая последнее неравенство и (6), из (18) получим

$$dR(t,\tau)/dt \leq -\tilde{\alpha}(t)R(t,\tau) + \gamma(t)[h(t) + \delta(t) + |\alpha(t) - \alpha(\tau)|]M_1, \quad M_1 > 0. \tag{19}$$

Начальные условия (8) и (10) позволяют установить, что

$$R(t_0,\tau) = 0 \quad \forall\tau \geq t_0. \tag{20}$$

Теперь из (19) и (20) по лемме из [7, с. 264] находим оценку сверху для неотрицательной функции $R(t,\tau)$

$$R(t,\tau) \leq M_1\int_{t_0}^{t}\gamma(s)[h(s) + \delta(s) + |\alpha(s) - \alpha(\tau)|]\exp\left(-\int_{s}^{t}\tilde{\alpha}(\theta)\,d\theta\right)ds. \tag{21}$$

Используя свойства функции $\alpha(t)$, можно записать неравенство (см. [7, с. 266]) $0 \le \alpha(t) - \alpha(\tau) \le \le \alpha'(t)(t-\tau)$, $\tau \ge t$, с учетом которого из (21) имеем

$$R(\tau,\tau) \le R_1(\tau) + R_2(\tau), \tag{22}$$

$$R_1(\tau) = M_1 \int\limits_{t_0}^{\tau} \gamma(t)[h(t)+\delta(t)]\xi(t)\,dt/\xi(\tau), \quad R_2(\tau) = M_1 \int\limits_{t_0}^{\tau} \gamma(t)\alpha'(t)(t-\tau)\xi(t)\,dt/\xi(\tau),$$

$$\xi(s) = \exp\biggl(\int\limits_{t_0}^{s} \tilde{\alpha}(t)\,dt\biggr).$$

Отметим прежде всего, что при сходимости интегралов, стоящих в числителях дробей, определяющих функции $R_1(\tau)$ и $R_2(\tau)$, свойство 5) функции $\tilde{\alpha}(t)$ и неравенство (22) обеспечивают сходимость $R(\tau,\tau)$ к нулю при $\tau \to +\infty$. Пусть теперь указанные интегралы расходятся. Тогда, применив правило Лопиталя и приняв во внимание условие 1) теоремы, заключаем, что $R_1(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$. Свойства 4), 5) функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ позволяют при исследовании поведения $R_2(\tau)$ при $\tau \to +\infty$ дважды применить правило Лопиталя, т.е. имеем равенства

$$\lim_{\tau\to+\infty} R_2(\tau) = -M_1 \lim_{\tau\to+\infty} \biggl\{\int\limits_{t_0}^{\tau} \gamma(t)\alpha'(t)\xi(t)\,dt/[\xi(\tau)\tilde{\alpha}(\tau)]\biggr\} =$$

$$= -M_1 \lim_{\tau\to+\infty} \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha^2(\tau)\gamma(\tau)}\biggl[1 + \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha^2(\tau)\gamma(\tau)} + \frac{\gamma'(\tau)}{\alpha(\tau)\gamma^2(\tau)}\biggr]^{-1}.$$

Теперь условия 2), 3) обеспечивают справедливость предельного соотношения $\lim\limits_{\tau\to+\infty} R(\tau,\tau) = 0$. Наконец, свойство (16) дуального отображения J позволяет заключить, что $\|u(\tau) - v(\tau,\tau)\| \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Из неравенства $\|u(\tau) - x^*\| \le \|x^* - x_\alpha(\tau)\| + \|x_\alpha(\tau) - v(\tau,\tau)\| + \|v(\tau,\tau) - u(\tau)\|$ следует теперь стабилизация решения задачи (7), (8) к нормальному решению вариационного неравенства (1), так как установлена сходимость к нулю всех слагаемых, стоящих в правой части последнего неравенства.

Замечание 1. Приведем примеры параметрических функций, удовлетворяющих условиям теоремы: $\alpha(t) = t^{-\alpha}$, $\gamma(t) = t^{-\gamma}$, $\delta(t) = t^{-\delta}$, $h(t) = t^{-h}$, $t_0 > 0$, $h > \alpha > 0$, $\delta > \alpha, \gamma \ge 0$, $\alpha + \gamma < 1$.

Отметим, что можно принять $\gamma(t) \equiv 1$.

Замечание 2. Если $X = H$ – гильбертово пространство, то $J = E$ – единичный оператор, и метод (7) примет вид

$$(du(t)/dt + \gamma(t)[A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)], u(t) - y) \le 0 \quad \forall y \in \Omega, \quad u(t) \in \Omega, \tag{23}$$

т.е. имеем параболическое вариационное неравенство (см., например, [8]); здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H. Отметим также, что в этом случае вводимые нами функции $w(t,\tau)$ и $R(t,\tau)$ определяются равенствами $w(t,\tau) = \|v(t,\tau) - x_\alpha(\tau)\|^2$, $R(t,\tau) = \|u(t) - v(t,\tau)\|^2$. Если оператор A является потенциальным, $A = \operatorname{grad}\Phi$, то задача (1) эквивалентна задаче минимизации выпуклого [4, с. 119] функционала Φ на выпуклом замкнутом множестве Ω [9, с. 145]. Следовательно, метод (7), (8) дает непрерывный метод регуляризации для выпуклых задач условной минимизации в банаховом пространстве в форме вариационного неравенства. В работах [7, 10, 11] при построении непрерывных методов регуляризации в форме операторного уравнения для указанного класса экстремальных задач используются специальным образом построенные штрафные функции и операторы проектирования на множество Ω. Если $\Omega = H$, то от вариационного неравенства (23) приходим к непрерывному методу регуляризации первого порядка (см., например, [7, гл. 2, § 10; 12]) $du(t)/dt + \gamma(t)[A(t)u(t) + \alpha(t)u(t) - f(t)] = 0$, $u(t_0) = u_0 \in H$. При $\gamma(t) \equiv 1$ из нашей теоремы вытекают результаты работы [12].

Необходимость исследования методов регуляризации в банаховом пространстве связана с тем, что не всякую нелинейную задачу можно поставить в рамках гильбертова пространства (см., например, [3, с. 61; 4, с. 57]). Непрерывный метод регуляризации первого порядка в банаховом пространстве для уравнений с монотонными дифференцируемыми операторами построен в работе [13], сходимость его установлена при некоторых требованиях на геометрию пространства X более сильных чем в данной работе.

В качестве примеров равномерно выпуклых пространств укажем $L^p(G)$, l^p, $W^p_m(G)$, где $p > 1$, $m > 0$, G – ограниченная измеримая область в R^n [1].

Вопрос о существовании и единственности решений задач (7), (8) и (9), (10) может служить темой отдельных исследований.

Примером задачи, для решения которой применимы результаты нашей работы, может служить задача теории фильтрации из работы [14]. Преимущества непрерывных методов отмечались, например, в работе [15].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-01-00807).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дистель Д.* Геометрия банаховых пространств. Киев, 1980.
2. *Figel T.* // Studia Math. 1976. V. 56. № 2. P. 121–155.
3. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., 1972.
4. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
5. *Альбер Я.И.* Методы решения нелинейных операторных уравнений и вариационных неравенств в банаховых пространствах: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Горький, 1985.
6. *Рязанцева И.П.* Устойчивые методы решения нелинейных монотонных некорректных задач: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1996.
7. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М., 1981.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972.
9. *Kluge R.* Nichtlinear Variationsungleihungen und Extremalaufgaben. Berlin, 1974.
10. *Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 1995. № 3. С. 39–46.
11. *Васильев Ф.П., Недич А.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 12. С. 2033–2042.
12. *Альбер Я.И., Рязанцева И.П.* // Тез. докл. Всесоюз. конф. по экстремальным задачам и их приложениям. Таллин, 1973. С. 18–19.
13. *Alber Ya.I.* // Nonlinear Analysis. 1994. V. 23. № 9. P. 1115–1134.
14. *Лапин А.В.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1979. Т. 19. № 3. С. 689–700.
15. *Антипин А.С.* // Вопросы кибернетики. Вычислит. вопросы анализа больших систем. М., 1989. С. 5–43.

Нижегородский государственный
технический университет

Поступила в редакцию
05.06.2001 г.