Величина $\bar{C}$ в MN-м приближении дается формулой

$$\bar{C}_{MN} = hA_1U_1(0\,|\,\tau) + 2B_1I_1^0(0\,|\,\tau).$$

4. На рис. 2 приведены зависимости $\bar{C}_{MM}(\tau)$, рассчитанные путем решения системы линейных уравнений (11) при $N = M$, $h = 1$, $\epsilon = \epsilon^-/\epsilon^+ = 10$. Из графиков видно, что для допустимых τ величина $\lim\limits_{M\to\infty} \bar{C}_{MM}$ не зависит от τ, однако скорость сходимости последовательности $\{C_{MM}(\tau)\}$ зависит от τ и становится максимальной при $\tau = \tau_0$.

В табл. 1 сведены результаты расчета нормированной емкости $\bar{C}$ при различных значениях h и ϵ. Оценка точности вычисления матричных элементов и исследование сходимости последовательности $\{\bar{C}_{MN}(\tau_0)\}$ показали, что погрешность приведенных результатов не превосходит единицы пятого знака. В предельном случае, когда $\epsilon \to \infty$, величина $\bar{C}$ стремится к нормированной емкости сплошного металлического цилиндра (см. [4]).

Авторы благодарят Я.Н. Фельда и И.М. Бравера за плодотворное обсуждение работы, В.П. Казанцева – за ценное замечание.

Вычислительный центр Латвийского государственного университета им. П. Стучки, Рига

Гродненский государственный университет

Поступило 31 VIII 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964, с. 29. 2. *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* – Радиотехн. и электрон., 1978, т. 23, № 7, с. 1465–1476. 3. *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* – Там же, № 8, с. 1625–1630. 4. *Мейрова Р.С., Фридберг П.Ш.* – ДАН, 1986, т. 288, № 1, с. 116–121.

УДК 537.86 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю.К. СИРЕНКО, академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

О ВЫДЕЛЕНИИ ФИЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ОДНОМЕРНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

1. Излагаются результаты исследования классических способов выделения единственного решения краевой задачи

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2\epsilon(y,z)\right]U(y,z) = f(y,z), \quad \kappa > 0, \quad g = \{y,z\} \notin \operatorname{int} S, \tag{1}$$

$$U(g)|_S = 0, \tag{2}$$

описывающей дифракцию E-поляризованных волн (H-случай рассматривается аналогично) при стационарном (зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$) возбуждении одномерно-периодических металло-диэлектрических решеток (рис. 1). Здесь $\kappa = \omega(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$; ϵ_0 и μ_0 – матриальные параметры среды; $U(g)$ – единственная отличная от нуля составляющая вектора напряженности электрического поля E_x; S – гладкий контур поперечного сечения металлических образующих решетки.

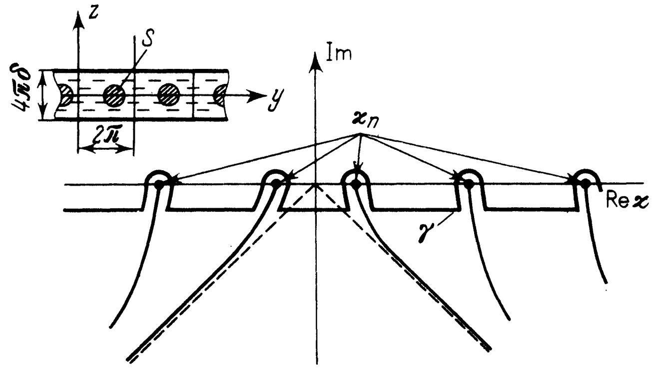

Рис. 1

Достаточно гладкие функции $[1 - \epsilon(g)]$: $\operatorname{Re}\epsilon > 0$, $\operatorname{Im}\epsilon \geqslant 0$, $\epsilon(y + 2\pi, z) = \epsilon(y, z)$ и $f(g)$, характеризующие соответственно относительную диэлектрическую проницаемость материала, из которого изготовлена решетка, и источника финитны в произвольной полосе $R = \{g\colon 0 \leqslant y \leqslant 2\pi,\ |z| < \infty\} \setminus \operatorname{int} S$. Их носители здесь содержатся в $Q = \{g \in R\colon |z| \leqslant 2\pi\delta\}$.

2. Будем различать два принципиально разных способа возбуждения решетки: квазипериодическим источником с $f(y + 2\pi, z) = \exp(i \cdot 2\pi\Phi) f(y, z)$, $\operatorname{Im}\Phi = 0$ и источником локальным, когда носитель $f(g)$ ограничен не только в направлении z, но и в направлении y. В первом случае после дополнения условия (2) соотношением

$$U\left\{\frac{\partial U}{\partial y}\right\} (2\pi, z) = \exp(i \cdot 2\pi\Phi)\, U\left\{\frac{\partial U}{\partial y}\right\} (0, z)$$

задачу (1), (2) можно рассматривать в полосе (канале Флоке) R. В практике решения таких задач обычно используется условие излучения

$$(3) \qquad U(g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix} e^{i[\Phi_n y \pm \Gamma_n (z \mp 2\pi\delta)]}, \quad z \gtrless \pm 2\pi\delta;$$

$$\Phi_n = n + \Phi, \quad \Gamma_n = (\kappa^2 - \Phi_n^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Im}\Gamma_n \geqslant 0, \quad \operatorname{Re}\Gamma_n \geqslant 0,$$

согласованное с физически обоснованным требованием отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Строгое математическое обоснование соответствующего принципа проведено только для случая поглощающей среды [1]. При $\operatorname{Im}\epsilon_0 = 0$ (поглощение в среде отсутствует) справедлива

Теорема 1 (принцип излучения). *Пусть* $\operatorname{Im}\epsilon(g) > 0$ *на произвольном множестве ненулевой меры в* Q. *Тогда условие излучения* (3) *выделяет единственное решение задачи* (1), (2) *при всех* $\kappa > 0$. *Если* $\operatorname{Im}\epsilon(g) \equiv 0$, *то решение задачи* (1)–(3) *существует и единственно для всех* $\kappa > 0$ *за возможным исключением не более чем счетного множества* $\{\bar\kappa_n\}$ *без конечных точек накопления. Решение задачи* (1)–(3) *в точке* $\bar\kappa \in \{\bar\kappa_n\}$ *может быть получено только в том случае, когда*

$$(4) \qquad \int_Q \operatorname{Res} G(g, g_0, \kappa, \Phi) f(g_0)\, dg_0 \equiv 0.$$

Доказательство теоремы основано на результатах работ [2, 3], позволяющих рассматривать функцию Грина $G(g, g_0, \kappa, \Phi)$ краевой задачи (1)–(3) как мероморфную функцию параметра κ, изменяющегося на бесконечнолистной поверхности H, первый лист которой (в дальнейшем просто плоскость κ) однозначно определяется значениями $\Gamma_n(\kappa)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, при действительных κ и разрезами (см. рис. 1) $(\operatorname{Re}\kappa)^2 - (\operatorname{Im}\kappa)^2 - \Phi_n^2 = 0$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, $\operatorname{Im}\kappa \leqslant 0$. Точки ветвления κ_n: $\Gamma_n(\kappa_n) = 0$ имеют второй порядок, действительны и совпадают с теми, в которых одна из гармоник пространственного спектра рассеянного решеткой поля (одна из парциальных составляющих в условии (3)) распространяется в режиме скольжения. Если обозначить через Ω множество точек $\kappa \in \mathrm{H}$ и являющихся полюсами функции $G(\kappa)$, то на $\mathrm{H} \setminus \Omega$ решение задачи (1)–(3) существует и единственно, а $\operatorname{Res} G(\kappa)$ определяет нетривиальные ее решения в точке κ в случае, когда $f(g) \equiv 0$ (здесь и далее предполагается, что все полюса функции $G(\kappa)$ простые).

Условие $\operatorname{Im}\epsilon(g) > 0$ при избранной зависимости от времени означает наличие поглощения энергии поля в неидеальном диэлектрике решетки. Требование (4) с учетом равенства $G(g, g_0, \kappa, \Phi) = G(g_0, g, \kappa, -\Phi)$ [3] можно переформулировать в терминах ортогональности функции источников $f(g)$ собственным функциям соответствующей однородной задачи (1)–(3).

3. При использовании принципа предельного поглощения в качестве решения задачи (1), (2) (квазипериодическое возбуждение) выбирается предел

$$(5) \qquad U(g, \operatorname{Re}\kappa) = \lim_{\operatorname{Im}\kappa \to 0} \bar{U}(g, \kappa), \qquad 0 < \arg\kappa < \pi/2,$$

понимаемый в смысле сходимости в $L_2(\bar{Q})$, где $\bar{Q}$ – любая конечная подобласть области R. Функция $\bar{U}(g, \kappa)$ – решение уравнения

$$(6) \qquad P[\bar{U}] \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2\right]\bar{U}(g) = f(g) + \kappa^2[1 - \epsilon(g)]\bar{U}(g),$$

оператор P которого задан на функциях $L_2(R)$, удовлетворяющих краевым условиям (2).

Л е м м а 1. *Решение задачи* (6) *существует, единственно и представляется в виде*

$$(7) \qquad \bar{U}(g, \kappa) = -\int_Q G(g, g_0, \kappa, \Phi) f(g_0) dg_0, \qquad 0 < \arg\kappa < \pi/2,$$

т.е. совпадает с решением задачи (1), (2), *выделяемым при соответствующих значениях* κ *с помощью принципа излучения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы следует из того факта, что решение задачи (1), (2) в форме (7) удовлетворяет (6) и принадлежит $L_2(R)$ (в области $|\arg\kappa| < \pi/2$ $\operatorname{Im}\Gamma_n(\kappa) > 0$ для всех $n = 0, \pm 1 \ldots$ [2], а следовательно, $U(g)$ экспоненциально убывает в R с ростом $|z|$). Переходя теперь к пределу в (7) $\operatorname{Im}\kappa \to 0$, учитывая непрерывность свертки и свойства функции $G(g, g_0, \kappa, \Phi)$, приходим к выводу, что справедлива

Т е о р е м а 2 (принцип предельного поглощения). *Если* $\operatorname{Re}\kappa \notin \{\bar{\kappa}_n\}$, *то предел* (5) *существует и выделяет единственное решение задачи* (1), (2), *которое удовлетворяет условиям излучения* (3). *Принцип предельного поглощения эквивалентен принципу излучения в том смысле, что они выделяют одно и то же решение задачи* (1), (2) *на одном и том же множестве значений* κ (*см. теорему* 1).

Заметим, что ограничения на область возможного применения всех рассматриваемых принципов могут быть переформулированы в терминах собственных значений и собственных функций задачи (6), так как нетривиальные решения задачи (1)–(3) в точках множества $\{\bar{\kappa}_n\} \in \Omega$, не являющихся точками ветвления κ_n, согласно теоремам единственности из [2] являются элементами пространства $L_2(R)$.

4. Принцип предельной амплитуды при квазипериодическом возбуждении решетки состоит в том, что в качестве решения задачи (1), (2) берется предел

(сходимость в $L_2(\bar{Q})$)

$$(8)\qquad \lim_{t\to\infty} v(g,t)e^{i\omega t} = U(g), \quad \operatorname{Im}\omega = 0,$$

где $v(g,t)$ – решение волнового уравнения

$$(9)\qquad \left[-\epsilon(g)\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] v(g,t) = f(g)e^{-i\omega t}, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее условиям (2) при $t > 0$ и нулевым начальным данным при $t = 0$.

Теорема 3 (принцип предельной амплитуды). *Пусть* $\kappa = \omega/c$ ($c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$) *не является точкой ветвления и функция Грина* $G(g, g_0, \kappa, \Phi)$ *не имеет действительных полюсов в плоскости* κ (*второе требование выполнено всегда, если только* $\operatorname{Im}\epsilon(g) \equiv 0$). *Тогда предел* (8) *выделяет единственное решение задачи* (1), (2). *Это решение удовлетворяет условию излучения* (3). *Если второе требование не выполнено, но точка* $\kappa \notin \{\bar{\kappa}_n\}$ *и функция источников* $f(g)$ *такова, что интеграл* (4) *обращается в ноль для всех* $\bar{\kappa} \in \{\bar{\kappa}_n\}$, *то* (8) *также имеет место. В противных случаях принцип предельной амплитуды как инструмент выделения физического решения краевой задачи* (1), (2) *не срабатывает.*

Доказательство теоремы проводится с использованием представления

$$(10)\qquad v(g,t) = \frac{i}{2\pi}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \bar{U}(g,\kappa_0)\frac{\exp(-i\kappa_0 ct)}{\kappa_0-\omega/c}\,d\kappa_0,$$

дающего при α, больших некоторого положительного числа, единственное решение нестационарной задачи (9). Здесь $\bar{U}(g,\kappa)$ – решение (7) задачи (6). Контур интегрирования в (10) деформируется до положения γ, обозначенного на рис. 1 сплошной линией. При этом учитываются особенности аналитического продолжения $G(\kappa_0)$ при переходе из верхней полуплоскости κ_0 в нижнюю (предполагается, что они не имеют точек накопления в области значений κ_0, лежащих выше контура γ).

Ясно, что при определенных условиях принцип предельной амплитуды эквивалентен принципам излучения и предельного поглощения, но в общем случае сфера его возможного применения гораздо уже.

5. Пусть теперь решетка возбуждается локальным сосредоточенным источником $f(g)$. Без ограничения общности можно считать, что носитель $f(g)$ полностью содержится в Q.

Теорема 4 (принцип излучения при локальном возбуждении). *Если решетка не имеет собственных действительных волн, не переносящих энергию вдоль направления периодичности* y *при заданном* $\kappa > 0$, *то условие излучения*

$$(11)\qquad U(g,\kappa) = \frac{\exp(ir\kappa)}{r^{1/2}}A(\kappa,\varphi) + O(r^{-1}) + \begin{cases} \sum\limits_{\Phi_R\in M^+} b_k^+ U(g,\Phi_k), & y\to\infty,\\ \sum\limits_{\Phi_k\in M^-} b_k^- U(g,\Phi_k), & y\to-\infty,\end{cases}$$

выделяет единственное решение задачи (1), (2), *удовлетворяющее физически обоснованному требованию отсутствия волн, приходящих на структуру из бесконечности.*

Доказательство существования решения в форме (11) сводится к определению "правильного" пути интегрирования в интеграле

$$(12)\qquad \int_{-0,5}^{0,5} G(g,g_0,\Phi)d\Phi, \quad g_0 \in Q,$$

дающем формальное представление функции Грина решетки в поле одиночного точечного источника $\{g_0\}$. Основные трудности связаны с тем, что при анализе (12) необходимо учитывать особенности функции Грина $G(g, g_0, \Phi)$ решетки в поле квазипериодических точечных источников как функции комплексного переменного Φ. Вычеты $G(g, g_0, \Phi)$ в полюсах Φ_k определяют собственные волны решетки $U(g, \Phi_k)$. При действительных Φ_k (действительные собственные волны) поле $U(g, \Phi_k)$ экспоненциально убывает с ростом $|z|$, что позволяет связать с каждой такой собственной волной величину $\operatorname{Re} P(U, \mathbf{y})$, определяющую величину и направление переноса энергии через полное ($|x| \leqslant 0{,}5$) поперечное сечение направляющей структуры плоскостью $y = \text{const}$ (величина $\operatorname{Re} P(U, \mathbf{y})$ от y не зависит). В (11) M^+ и M^- – конечные наборы действительных собственных чисел Φ_k, отвечающих собственным волнам, переносящим энергию вдоль решетки соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси y.

Доказательство единственности проводится так же, как и в [2], с помощью аналога теоремы о комплексной мощности, применяемого к собственным волнам решетки.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
19 IX 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. 287 с. 2. *Сиренко Ю.К., Шестопалов В.П.* – ДАН, 1985, т. 285, № 2, с. 335–338. 3. *Сиренко Ю.К., Шестопалов В.П.* – ДАН, 1986, т. 286, № 1, с. 85–88.