Н.Б.Лебединская, Т.Е.Сафонова

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО СТРУКТУРНОГО РАСПИСАНИЯ

Введение

В данной статье исследуется устойчивость оптимального структурного расписания, полученного с помощью алгоритма A, который был описан в [4]. Здесь будет доказано, что перестройка оптимального расписания при изменении объема любой работы на единицу требует $O(n)$ операций, где n – число работ. Эта статья продолжает начатое в [5,6,7] исследование устойчивости оптимальных структурных расписаний при соответствующих предположениях относительно критерия оптимальности и индивидуальных штрафных функций работ.

§ I. Основные понятия

Пусть задано множество J независимых работ, $|J| = n$, подлежащих выполнению на машине M. Каждая работа α состоит из p_α элементарных операций единичной длительности (p_α – целое, $p = \sum_{\alpha \in J} p_\alpha$). Пусть для любого α задана функция φ_α – штрафная функция работы α и пусть $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

Расписанием $R = \langle \Lambda ; t \rangle$ для множества работ J в точке t называется строка символов работ из J, соотнесенная к моменту времени t, при этом символ каждой работы α входит в Λ ровно p_α раз. Расписание $R = \langle \Lambda ; t \rangle$ интерпретируется следующим образом: пусть $\Lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p$, тогда в единичном интервале $[t+i-1, t+i)$ выполняется работа λ_i. Таким образом, рассматриваются расписания с прерываниями в целых точках.

Штрафом $f(R)$ расписания $R = \langle \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p ; t \rangle$ называется функция

$$f(R) = f(\langle \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p ; t \rangle) = F(\varphi_{\lambda_1}(t), \varphi_{\lambda_2}(t+1), \dots \varphi_{\lambda_p}(t+p-1)),$$

где F – некоторая заданная функция (критерий оптимальности). Расписание $R = \langle \Lambda ; t \rangle$ будем называть оптимальным в точке t, если оно имеет минимальный штраф среди штрафов всех расписаний в точке t.

Относительно функции F будем предполагать следующее (Условия У):

I) F – симметрическая функция;

2) $F(x_1, x_2, \dots x_s)$ $F(x_1, F(x_2, \dots, x_s))$ $(s \geq 2)$;

3) F не убывает при возрастании своих аргументов и

3а) F строго возрастает при возрастании своих аргументов;

3б) Если $F(x_1', x_2') > F(x_1, x_2)$, $F(x_2'', x_3') > F(x_2', x_3)$, то $F(x_1', x_2'', x_3') > F(x_1, x_2, x_3)$ (условие цепочного возрастания).

Очевидно, что $F(x_1, \dots, x_s) = \sum_{i=1}^{s} x_i$, $F(x_1, \dots, x_s) = \max_{i=1,\dots,s} x_i$ удовлетворяют этим условиям.

Опишем далее множество Φ индивидуальных штрафных функций работ. Будем говорить, что работа α предшествует работе β $(\alpha < \beta)$, если $\forall t_1, t_2$, $t_1 < t_2$ имеет место $F(\varphi_\alpha(t_1), \varphi_\beta(t_2)) < F(\varphi_\beta(t_1), \varphi_\alpha(t_2))$. Далее будем говорить, что работа α вложена в работу β $(\alpha \subset \beta)$, если существует такое целое $x(\alpha, \beta)$, что β предшествует α на полуоси $(-\infty, x(\alpha, \beta)]$ и α предшествует β на полуоси $(x(\alpha, \beta), +\infty)$. Относительно множества Φ будем предполагать, что функции $\varphi_\alpha \in \Phi$ таковы, что любая пара работ α, β находится либо в отношении предшествования, либо в отношении вложенности. Будем называть в этом случае множество Φ – структурным множеством функций, а множество J – структурным множеством работ.

Расписание называется структурным, если оно не противоречит заданным отношениям вложенности и следования работ. В работе [I] доказано, что в случае структурных множеств работ и при соответствующих ограничениях на F оптимальное расписание достаточно искать в классе структурных расписаний.

Свойства оптимальных структурных расписаний изучались в [2,3,4], там же получены алгоритмы построения оптимальных структурных расписаний при соответствующих условиях на функции φ_α и F.

В работах [5,6] изучалась устойчивость оптимальных структурных расписаний при изменении объема работы в случае $F = \sum$ и функциях штрафов работ, равных расстоянию до заданных директивных интервалов работ. Далее в работе [7] исследовалась устойчивость минимизирующих суммарный штраф согласованных расписаний при любых индивидуальных функциях штрафов, образующих структурное множество.

В данной работе исследуется устойчивость оптимального расписания, полученного с помощью алгоритма А работы [4], где относительно функции F предполагаются выполненными условия (У), а

индивидуальные функции штрафов работ образуют структурное множество. Здесь мы покажем, что перестройка оптимального расписания при изменении объема любой работы на единицу требует $O(n)$ операций, где n - число работ.

Приведем сначала необходимые определения и результаты работы [4].

§ 2. Алгоритм A и оператор O_+

Пусть J - структурное множество работ, и пусть $G(J)$ - орграф, задающий отношение вложенности (две работы α, β связаны дугой от β к $\alpha \Longleftrightarrow \beta \subset \alpha$). Пусть K - число ярусов графа $G(J)$, при этом первым ярусом будем называть множество всех работ, которые не вложены ни в одну работу множества J.

Подрасписанием $R[\tau_1, \tau_2]$ расписания $R = \langle \Lambda ; t \rangle$ называется отрезок расписания R, координаты τ которого удовлетворяют условию $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Множество работ, символы которых имеют в расписании R координаты τ, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, обозначим $Z[\tau_1, \tau_2]$, а соответствующий граф вложенности - $G(Z[\tau_1, \tau_2])$.

Будем говорить, что в расписании R работа λ_i предшествует работе λ_j ($\lambda_i \underset{R}{<} \lambda_j$), если $i < j$. Работа α вложена в работу β в расписании R ($\alpha \underset{R}{\subset} \beta$), если все символы работы α находятся между двумя соседними вхождениями работы β в строке Λ расписания R.

Расписание R является структурным, если

1) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \underset{R}{<} \beta$

2) Любая работа может быть прервана в R разве лишь вложенными в нее по отношению $\subset$ работами.

Пусть $\beta \in J$. Пусть λ_i - это последнее вхождение в строку Λ символа работы, предшествующей работе β по отношению следования $<$, а λ_j - первое вхождение в Λ работы, следующей за работой β по отношению $<$. Тогда максимальное β - подрасписание $R_{max}(\beta)$ структурного расписания R определим следующим образом:

$$R_{max}(\beta) = R_{[t+i, t+j-2]} .$$

Начало расписания $R_{max}(\beta)$ обозначим t_β ($t_\beta = t+i$).

Из работы [4] следует, что для каждой пары $\beta^{P_\beta} \subset \alpha$ вло-

женных работ существует единственный оптимальный целочисленный интервал вложения работы β в работу α $I(\beta^{p_\beta}, \alpha) = [x(\beta^{p_\beta}, \alpha), x(\beta^{p_\beta}, \alpha) + p_\beta - 1]$. Если объем работы β уменьшить на единицу, то из [4] известно, что $x(\beta^{p_\beta - 1}, \alpha)$ равен либо $x(\beta^{p_\beta}, \alpha)$, либо $x(\beta^{p_\beta}, \alpha) + 1$.

Пусть Z – некоторое α-единое множество, т.е. $\forall \beta_i \in Z$, $\beta_i \subset \alpha$ и $\bigcup I(\beta_i^{p_{\beta_i}}, \alpha)$ является целочисленным интервалом. Тогда по [4] существует единственный оптимальный интервал вложения множества Z в α, обозначаемый $I(Z, \alpha) = [x(Z, \alpha), x(Z, \alpha) + p_Z - 1]$. Если уменьшить на единицу объем некоторой $\beta_i \in Z$, то по [4] возможны только следующие варианты для оптимальных интервалов измененного множества работ $\hat{Z}$: I) множество $\hat{Z}$ остается α-единым множеством, при этом $x(\hat{Z}, \alpha)$ равен либо $x(Z, \alpha)$, либо $x(Z, \alpha) + 1$; 2) оптимальный интервал для $\hat{Z}$ распадется на два интервала

$$I(\hat{Z}, \alpha) = [x(Z, \alpha), x(Z, \alpha) + p_{\hat{Z}'} - 1] \cup [x(Z, \alpha) + p_{\hat{Z}'} + 1, x(Z, \alpha) + p_Z - 1],$$

где $\hat{Z} = \hat{Z}' \cup \hat{Z}''$ – объединение двух α-единых множеств $\hat{Z}'$ и $\hat{Z}''$.

Опишем далее алгоритм A, минимизирующий в заданной точке функционал f при условии (У) относительно функции F.

Пусть $\alpha_1 < \ldots < \alpha_m$ – работы первого яруса графа $G_c(J)$. Найдем в графе $G_c(J)$ множество Z^{α_1} всех вложенных в α_1 работ и для каждой $\gamma \in Z^{\alpha_1}$ вычислим $x(\gamma, \alpha_1)$ и $I(\gamma^{p_\gamma}, \alpha_1)$.

Пусть целочисленное объединение $\bigcup_{\gamma \in Z^{\alpha_1}} I(\gamma^{p_\gamma}, \alpha)$ состоит из s непересекающихся целочисленных интервалов. Тогда множество Z^{α_1} распадается на s подмножеств $Z^{i\alpha_1}$, $i = 1, \ldots, s$ с оптимальными интервалами $I(Z^{i\alpha_1}, \alpha_1)$. Если среди множеств $Z^{i\alpha_1}$ есть конфликтующие, т.е. их оптимальные интервалы пересекаются, то рассмотрим их объединение и вычислим для объединенных множеств их оптимальные интервалы. Продолжим этот процесс объединения конфликтующих множеств до тех пор, пока они присутствуют. В результате получим разбиение множества Z^{α_1} на подмножества, не конфликтующих между собой. Обозначим их Z^i, $i = 1, \ldots, s$. Предположим, что они перенумерованы в порядке возрастания величин $x(Z^i, \alpha_1)$, $i = 1, \ldots, s$.

Определим теперь расписание $R_A = \langle J_A; t \rangle$, построенное алгоритмом A, или A – расписание, рекурсивно следующим образом.

а) Если $s = 0$, то положим

$$R_A = \langle \alpha_1^{p_{\alpha_1}}, \hat{J}_A ; t \rangle ,$$

где $\hat{J}$ получается из J удалением работы α_1.

б) Если $x(z^1, \alpha_1) > t + p_{\alpha_1}$, то построим множество $z^0 = \{ \gamma \in z^1 \mid \gamma \subset \alpha_1 ,\ \gamma < \alpha_2 \}$ и положим

$$R_A = \langle \alpha_1^{p_{\alpha_1}} z_A^0 \hat{J}_A ; t \rangle ,$$

где $\hat{J}$ получается из J удалением работы α_1 и множества z^0.

в) Если $x(z^1, \alpha_1) \leq t + p_{\alpha_1}$, то составим расписание

$$R_1 = \langle \alpha_1^u z_A^1 ; t \rangle ,$$

где

$$u = \begin{cases} x(z^1, \alpha_1) - t & , \text{ если } x(z^1, \alpha_1) - t \geq 0 \\ 0 & \text{в противном случае .} \end{cases}$$

Положим

$$R_A = R_1 \cdot \langle \hat{J}_A ; t + u + p_{z^1} \rangle ,$$

где $\hat{J}$ получается из J удалением работ из z^1 и уменьшением кратности работы α_1 на u.

Определим далее оператор O_+, переводящий A – расписание, построенное в точке t $(R_A(t))$, в A – расписание, построенное в точке $t+1$ $(R_A(t+1))$.

Пусть t_{α_1} и $\bar{t}_{\alpha_1}$ – первое и последнее вхождения работы α_1 в $R_A(t)$ и пусть

$$R_A(t) = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} & t & t_{\alpha_1} & \tau_k & & & & \tau_{k+\ell-1} & & \bar{t}_{\alpha_1} & \\ \hline & z_A^0 & \alpha_1^{u_1} & z_A^k & \alpha_1^{u_2} & \dots & \alpha_1^{u_\ell} & z_A^{k+\ell-1} & \alpha_1^{u_{\ell+1}} & \bar{z}_A & \Lambda_f \end{array},$$

где $u_1 + u_2 + \dots + u_{\ell+1} = p_{\alpha_1}$, $z_A^k, \dots, z_A^{k+\ell-1}$ – множества, состоящие из вложенных в α_1 работ, находящихся в своих оптимальных интервалах, упорядоченные по алгоритму A, z_A^0 (соотв. $\bar{z}_A$) – множество вложенных в α_1 работ, начала оптимальных интервалов которых не превосходят t_{α_1} (соотв. не меньше $\bar{t}_{\alpha_1}$), упорядоченное по алгоритму A.

Тогда, если $\bar{t}_{\alpha_1} + 1 < \tau_{k+\ell}$, где $\tau_{k+\ell}$ – начало оптимального интервала для множества $z^{k+\ell}$, то

$$O_+(R_A(t)) =$$
$$= O_+(\langle z_A^0; t\rangle)\langle \alpha_1^{u_1-1} z_A^k \alpha_1^{u_2} \dots \alpha_1^{u_\ell} z_A^{k+\ell-1} \alpha_1^{u_{\ell+1}+1}; t_{\alpha_1}+1\rangle \cdot$$
$$\cdot O_+(\langle \bar{z}_A \wedge_f ; \bar{t}_{\alpha_1}+1\rangle).$$

Если $\bar{t}_{\alpha_1}+1 = \tau_{k+\ell}$, тогда по алгоритму A ([4]) $\langle \bar{z}_A; \tau_{k+\ell}\rangle = \langle z_A^{k+\ell} \bar{\bar{z}}_A; \tau_{k+\ell}\rangle$, т.е. в расписании $R_A(t)$ множество $z^{k+\ell}$ стоит в своем оптимальном интервале, начиная с $\bar{t}_{\alpha_1}+1$.

В этом случае оператор O_+ определяется так:

$$O_+(R_A(t)) =$$
$$= O_+(\langle z_A^0; t\rangle)\langle \alpha_1^{u_1-1} z_A^k \alpha_1^{u_2} \dots \alpha_1^{u_\ell} z_A^{k+\ell-1} \alpha_1^{u_{\ell+1}} z_A^{k+\ell} \alpha_1; t_{\alpha_1}+1\rangle \cdot$$
$$\cdot O_+\langle \bar{\bar{z}}_A \wedge_f ; \bar{t}_{\alpha_1}+1\rangle,$$

где $\bar{\bar{z}}$ – это множество тех работ из $\bar{z}$, которые не содержатся в $z^{k+\ell}$.

Так определенный оператор O_+ имеет сложность $O(n)$. Докажем это. Для каждой работы α требуется по координате $\bar{t}_\alpha$ ее последнего вхождения в $R_A(t)$ выяснить, существует ли такой оптимальный интервал вложенных в α работ, начало которого совпадает с $\bar{t}_\alpha+1$. Для этой цели рассмотрим упорядоченный список координат начал оптимальных интервалов вложенных в α работ с указанием последнего использованного при построении расписания $R_A(t)$ оптимального интервала $I(z^{k+\ell-1}, \alpha)$. Можно считать, что этот список начинается с координаты $\tau_{k+\ell}$ и, таким образом, достаточно сравнить $\bar{t}_\alpha$ с первым элементом этого списка. Следовательно, при построении $R_A(t+1)$ с помощью оператора O_+ для каждой работы требуется не более одного сравнения, что доказывает оценку $O(n)$ сложности оператора O_+.

Оператор O_-, строящий по расписанию $R_A(t+1)$ расписание $R_A(t)$, определяется очевидным образом, как обратный оператор к оператору O_+.

§ 3. Перестройка расписания $R_A(J,t)$ при изменении объема работы

<u>Задача</u>. Пусть $R_A(J,t)$ – оптимальное в точке t расписание, построенное алгоритмом A. Пусть $\alpha \in J$ и p_α – объем работы α. Найти линейно-зависящий от числа работ алгоритм перестройки расписания $R_A(J,t)$ в расписание $R_A(J',t)$, где

$\mathcal{J}'$ – множество работ, отличающееся от $\mathcal{J}$ изменением объема работы α на одну единицу.

I. Обозначения.

Пусть $\alpha \subset \beta_1 \subset \ldots \subset \beta_{q-1} \subset \beta_q$ и работа β_q находится на первом ярусе графа G (если работа α принадлежит первому ярусу, то цепочка $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ пуста).

Заметим, что, возможно, на первом ярусе графа G найдется m работ $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ таких, что $\gamma_1 < \ldots < \gamma_m$ и работа β_{q-1} вложена по графу G во все эти и только эти работы. Тогда β_q есть

$$\begin{cases} \gamma_m, \text{ если } \gamma_m \underset{R}{<} \alpha \\ \gamma_1, \text{ если } \alpha \underset{R}{<} \gamma_1 \\ \gamma_{\ell+1}, \text{ если } \alpha \underset{R}{\subset} \gamma_{\ell+1} \text{ или } \gamma_\ell \underset{R}{<} \alpha \underset{R}{<} \gamma_{\ell+1}. \end{cases} \qquad (I)$$

Выделив все вхождения β_q, представим $R_A(\mathcal{J}; t)$ в виде

$$R_A(\mathcal{J}; t) = \langle \Lambda_0 \Lambda_0^q \beta_q^{s_1^q} \Lambda_1^q \beta_q^{s_2^q} \ldots \beta_q^{s_{r_q}^q} \Lambda_{r_q}^q \Lambda_f; t \rangle, \qquad (*)$$

где $\sum_{i=1}^{r_q} s_i^q = p_{\beta_q}$,

$\langle \Lambda_0^q \beta_q^{s_1^q} \Lambda_1^q \beta_q^{s_2^q} \ldots \beta_q^{s_{r_q}^q} \Lambda_{r_q}^q, t_0^q \rangle$ – максимальное β_q – подрасписание.

По определению β_q символ α входит в некоторое Λ_ℓ^q $(\ell \in \{0, 1, \ldots, r_q\})$.

Тогда Λ_ℓ^q можно записать, как

$$\Lambda_{0,\alpha} \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \alpha^{s_2} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha}, \qquad (**)$$

где $\sum_{i=1}^{r} s_i = p_\alpha$,

$\Lambda_{i,\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ состоят из символов работ, вложенных в α по графу G, а $\Lambda_{0,\alpha}$ и $\Lambda_{r,\alpha}$ могут кроме того содержать символы работ, вложенных в β_q и не вложенных в α.

Если же α является работой первого яруса, то само расписание $R_A(\mathcal{J}; t)$ представимо в виде $(**)$, а $\Lambda_{0,\alpha}$ $(\Lambda_{r,\alpha})$ при этом состоит как из символов работ, вложенных в α, так и из символов работ, предшествующих (следующих за) α. В дальнейшем, для краткости будем обозначать $R = R_A(\mathcal{J}; t)$, $R' = R_{B^-}(\mathcal{J}; t)$, $R'' = R_A(\mathcal{J}', t)$.

2. Алгоритм перестройки расписания в случае уменьшения объема работы α – алгоритм B^-.

(I.) Найти разбиение $R = u_1 \cdot w \cdot u_2$.

I) Если $\alpha \in \Lambda_0^q$, то

$$u_1 = \langle \Lambda_0 ; t \rangle$$

$$w = \langle \Lambda_0^q \beta_q ; t + p_0 \rangle = \langle \Lambda_{0,\alpha} \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \alpha^{s_2} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha} \beta_q ; t + p_0 \rangle$$

$$u_2 = \langle \beta_q^{s_1^q - 1} \Lambda_1^q \ldots \Lambda_{r_q}^q \Lambda_f ; t + p_0 + p_0^q + 1 \rangle .$$

2) Если $\alpha \in \Lambda_\ell^q$ ($\ell \in \{1, \ldots, r_q - 1\}$) , то

$$u_1 = \langle \Lambda_0 \Lambda_0^q \beta_q^{s_1^q} \ldots \beta_q^{s_\ell^q} ; t \rangle$$

$$w = \langle \Lambda_\ell^q \beta_q ; t_\ell^q \rangle = \langle \Lambda_{0,\alpha} \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \alpha^{s_2} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha} \beta_q ; t_\ell^q \rangle$$

$$u_2 = \langle \beta_q^{s_{\ell+1}^q - 1} \Lambda_{\ell+1}^q \ldots \Lambda_{r_q}^q \Lambda_f ; t_\ell^q + p_\ell^q + 1 \rangle .$$

3) Если $\alpha \in \Lambda_{r_q}^q$, то

$$u_1 = \langle \Lambda_0 \Lambda_0^q \beta_q^{s_1^q} \ldots \beta_q^{s_{r_q}^q} ; t \rangle$$

$$w = \langle \Lambda_{r_q}^q ; t_{r_q}^q \rangle$$

$$u_2 = \langle \Lambda_f ; t_f \rangle$$

4) Если α – работа первого яруса, то

$$u_1 = \emptyset$$

$$w = \langle \Lambda_{0,\alpha} \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \alpha^{s_{r-1}} \Lambda_{r-1,\alpha} \alpha^{s_r} ; t_{0,\alpha} \rangle$$

$$u_2 = \langle \Lambda_{r,\alpha} ; t_{r,\alpha} \rangle$$

(II.) Преобразовать w в w' .

I,2) Если $\alpha \in \Lambda_\ell^q$ ($\ell \in \{0, 1, \ldots, r_q - 1\}$) , то

$$w' = O_-(O_+(\langle \Lambda_{0,\alpha} ; t_{0,\alpha} \rangle) \cdot \langle \alpha^{s_1 - 1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha} \beta_q ; t_{0,\alpha} + p_{0,\alpha} \rangle)$$

3) Если $\alpha \in \Lambda_{r_q}^q$, то представить w в виде (ж) относительно β_{q-1} . Применить к w алгоритм B^- . Полученное в результате расписание – w' .

4) Если α – работа первого яруса, то

$$w' = \langle \Lambda_{0,\alpha} \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \Lambda_{r-1,\alpha} \alpha^{s_r - 1} ; t_{0,\alpha} \rangle$$

(III.) $R' = u_1 \cdot w' \cdot O_-(u_2)$

3. Доказательство идентичности расписания, полученного в результате работы алгоритма B^- , расписанию, построенному при помощи алгоритма A для множества работ J'.

$$(R' = R'', \text{ т.е. } R_{B^-}(J ; t) = R_A(J', t)) .$$

Доказательство будем проводить индукцией по глубине вложенности работы α, т.е. по q – длине цепочки $\beta_1 \subset \ldots \subset \beta_q$.

$\underline{q=0}$.

Пусть работа α находится на первом ярусе графа G. Построим для измененной системы работ оптимальное расписание $R_A(J'; t)$ при помощи алгоритма A.

Легко видеть, что оптимальные интервалы работ, вложенных в α, не зависят от объема работы α. Следовательно, отрезки расписания, заключенные между двумя соседними вхождениями α в R, а также $\langle \Lambda_{0,\alpha}; t_{0,\alpha} \rangle$ займут те же места в R''. По алгоритму A промежутки между ними будут заняты символами работы α, а начиная с точки $t_{r,\alpha}-1$ будет расположено оптимальное расписание для множества работ $z_{r,\alpha}$. Используя определение оператора O_-, это расписание можно представить как $O_-(\langle \Lambda_{r,\alpha}; t_{r,\alpha} \rangle)$.

Т.о., расписание R'', полученное по алгоритму A для J', совпадает с R' – расписанием, полученным из R при помощи алгоритма B^-.

База индукции $\underline{q=1}$.

Построим для множества работ J' при помощи алгоритма A оптимальное в точке t расписание R'' и сравним его с R', полученным из R при помощи алгоритма B^-.

Пусть все символы работы α входят в R в Λ^1_ℓ ($\ell \in \{0,1,\ldots,r-1\}$).

Начнем со сравнения R и R''. $R[t, t_{0,\alpha}-1]$ имеет вид:

	Λ_0	Λ^1_0	$\beta_1^{s_1^1}$	Λ^1_1	$\beta_1^{s_2^1}$	$\ldots$	$\Lambda^1_{\ell-1}$	$\beta_1^{s_\ell^1}$	

где z_0 состоит как из работ первого яруса, предшествующих β_1, так и из вложенных в них.

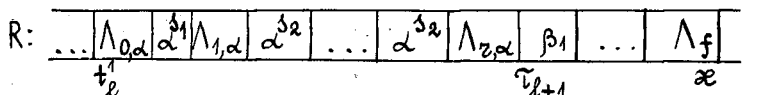
Т.к. Λ^1_i ($i=1,\ldots,\ell-1$) стоят в R в своих оптимальных интервалах, а Λ^1_0 либо в своем оптимальном интервале, либо по необходимости правее его, то и в R'' Λ^1_i ($i=0,1,\ldots,\ell-1$) будут стоять на тех же местах. Действительно, β_1 – работа первого яруса, а по алгоритму A разбиение на неконфликтующие множества работ осуществляется именно в зависимости от их вложенности в работы первого яруса.

Т.о.,

$$R[t, t_{0,\alpha}-1] = R''[t, t_{0,\alpha}-1].$$

Построим в точках t^1_ℓ и $t^1_\ell+1$ по A расписания для оставшихся работ.

При построении расписания в точке $t^1_\ell+1$ (обозначим его $\tilde{R}$) воспользуемся расписанием R



Ввиду того, что β_1 - работа первого яруса,

$$\tilde{R}\,[\tau_{\ell+1},\varkappa]=R\,[\tau_{\ell+1},\varkappa]\,.$$

$\tilde{R}\,[t^1_\ell+1,\ \tau_{\ell+1}-1]$ представляет собой упорядоченное по A множество работ $\tilde{z}_\alpha=\{\alpha^{p_\alpha-1}\}\cup(\bigcup_{i=0}^{r} z_{i,\alpha})$, где α является работой первого яруса графа $G\ (\tilde{z}_\alpha)$

Участки $\Lambda_{i,\alpha}(i=1,2,\ldots,r)$, очевидно, остаются на своих местах. Расписание для $z_{0,\alpha}$ в точке $t^1_\ell+1$ получается сдвигом на единицу вправо расписания $\langle\Lambda_{0,\alpha};t_{0,\alpha}\rangle$ при помощи оператора O_+ .

Т.о., $\tilde{R}\,[t^1_\ell+1,\varkappa]=\tilde{R}=$

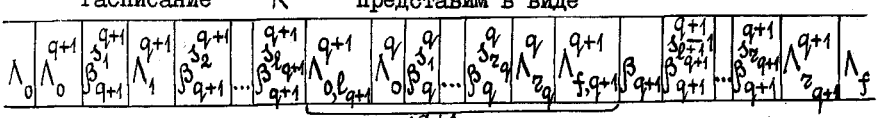
$$=O_+(\langle\Lambda_{0,\alpha};t_{0,\alpha}\rangle)\langle\alpha^{s_1-1}\Lambda_{1,\alpha}\ldots\Lambda_{r,\alpha};t_{0,\alpha}+p_{0,\alpha}+1\rangle R\,[\tau_{\ell+1},\varkappa].$$

Т.к. оператор O_- по A - расписанию в точке t дает A - расписание в точке $t-1$, то $R''[t^1_\ell,\varkappa-1]=O_-(\tilde{R})$ и, следовательно, A - расписание $R''=R'$.

Шаг индукции.

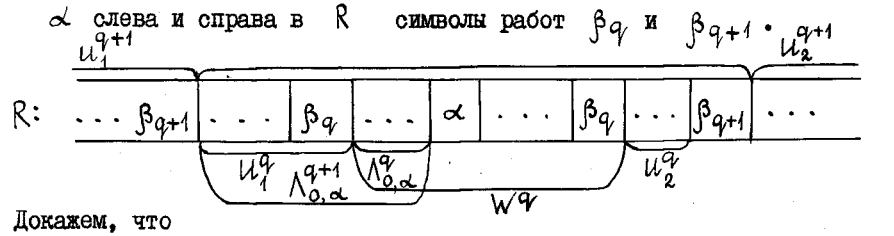
Пусть $\alpha\subset\beta_1\subset\ldots\subset\beta_q\subset\beta_{q+1}$ и β_{q+1} определяется, как (I).

Расписание R представим в виде



где все символы работы α входят в $\Lambda^{q+1}_{\ell_{q+1}}$

Выделим первое вхождение символа α в R и ближайшие к α слева и справа в R символы работ β_q и β_{q+1} .



Докажем, что

$R' = u_1^{q+1} (W^{q+1})' O_- (u_2^{q+1})$, где

$$(W^{q+1})' = O_-(O_+(\langle \Lambda_{0,\alpha}^{q+1}; t_{0,\alpha}^{q+1}\rangle)\langle \alpha^{s_1-1}\ldots\beta_q\ldots\beta_{q+1}; t_{0,\alpha}^{q+1} + p_{0,\alpha}^{q+1}\rangle).$$

Согласно индукционному предположению,

$R_q' = u_1^q (W^q)' O_- (u_2^q)$, где

$$(W^q)' = O_-(O_+(\langle \Lambda_{0,\alpha}^{q}; t_{0,\alpha}^{q}\rangle)\langle \alpha^{s_1-1}\ldots\beta_q; t_{0,\alpha}^{q} + p_{0,\alpha}^{q}\rangle).$$

По алгоритму A

$$R'' = u_1^{q+1}\cdot O_-(O_+(R_q')\langle\beta_{q+1}\rangle)\cdot O_-(u_2^{q+1}).$$

Осталось показать, что

$$O_+(\langle \Lambda_{0,\alpha}^{q+1}; t_{0,\alpha}^{q+1}\rangle)\langle \alpha^{s_1-1}\ldots\beta_q\ldots\beta_{q+1}; t_{0,\alpha}^{q+1} + p_{0,\alpha}^{q+1}\rangle =$$
$$= O_+(R_q')\langle\beta_{q+1}\rangle$$

$$O_+(R_q') = O_+(u_1^q\cdot O_-(O_+(\langle \Lambda_{0,\alpha}^{q}; t_{0,\alpha}^{q}\rangle)\langle\alpha^{s_1-1}\ldots\beta_q\rangle)O_-(u_2^q)). \quad (2)$$

Поскольку в R_q' β_q является работой верхнего яруса, из (2) следует, что

$$O_+(R_q') = O_+(u_1^q\cdot\langle \Lambda_{0,\alpha}^{q}; t_{0,\alpha}^{q}\rangle)\langle\alpha^{s_1-1}\ldots\beta_q; t_{0,\alpha}^{q} + p_{0,\alpha}^{q}\rangle u_2^q =$$
$$= O_+(\langle \Lambda_{0,\alpha}^{q+1}; t_{0,\alpha}^{q+1}\rangle)\langle\alpha^{s_1-1}\ldots\beta_q\ldots\Lambda_{r,\alpha}^{q+1}; t_{0,\alpha}^{q+1} + p_{0,\alpha}^{q+1}\rangle.$$

4. Алгоритм перестройки расписания при увеличении объема работы - алгоритм B^+.

(I.) Найти разбиение $R = u_1\cdot W\cdot u_2$.

I) Если $\alpha \in \Lambda_0^{q}$, то

$$u_1 = \langle \Lambda_0; t\rangle$$
$$W = \langle \Lambda_0^q; t_0^q\rangle$$
$$u_2 = \langle \beta_q^{s_1^q}\Lambda_1^q\ldots\Lambda_{r_q}^q\Lambda_f; t + p_0 + p_0^q\rangle$$

2) Если $\alpha \in \Lambda_\ell^q$ ($\ell \in \{1,2,\ldots,r_q-1\}$), то

$$u_1 = \langle \Lambda_0\Lambda_0^q\beta_q^{s_1^q}\ldots\Lambda_{\ell-1}^q\beta_q^{s_\ell^q-1}; t_0\rangle$$
$$W = \langle \beta_q\Lambda_\ell^q; t_\ell^q - 1\rangle$$
$$u_2 = \langle \beta_q^{s_{\ell+1}^q}\ldots\Lambda_{r_q}^q\Lambda_f; t_{\ell+1}^q - s_{\ell+1}^q\rangle.$$

3) Если $\alpha \in \Lambda_{r_q}^q$, то

$$u_1 = \langle \Lambda_0 \Lambda_0^q \beta_q^{s_1^q} \ldots \beta_q^{s_{r_q}^q - 1} ; t_0 \rangle$$
$$W = \langle \beta_q \Lambda_{r_q}^q ; \quad t_{r_q}^q - 1 \rangle$$
$$u_2 = \langle \Lambda_f ; t_f \rangle$$

4) Если α - работа I-го яруса, то

$$u_1 = \langle \Lambda_{0,\alpha} ; t_{0,\alpha} \rangle$$
$$W = \langle \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha} ; t_{1,\alpha} - s_1 \rangle$$
$$u_2 = \emptyset .$$

(II.) Преобразовать W в W'.

I) Если $\alpha \in \Lambda_0^q$, то представить W в виде (ж) относительно β_{q-1}. Применив к W алгоритм B^+, получить W'.

2,3) Если $\alpha \in \Lambda_\ell^q$ $(\ell \in \{1, 2, \ldots, r_q\})$, то

$$W' = O_+ \left(\langle \beta_\rho ; t_{0,\alpha} - 1 \rangle O_- \left(\langle \Lambda_{0,\alpha} \alpha ; t_{0,\alpha} \rangle \right) \langle \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha} ; t_{1,\alpha} - s_1 \rangle \right),$$

где

$$\Lambda_{0,\alpha} \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \Lambda_{r,\alpha} = \Lambda_\ell^q .$$

4) Если α - работа первого яруса, то

$$W' = \langle \alpha^{s_1} \Lambda_{1,\alpha} \ldots \alpha^{s_r} \Lambda_{r,\alpha}^1 \alpha ; t_{1,\alpha} - s_1 \rangle O_+ \left(\langle \Lambda_{r,\alpha}^2 ; t_{r,\alpha}^2 \rangle \right),$$

где $\Lambda_{r,\alpha}^1 \Lambda_{r,\alpha}^2 = \Lambda_{r,\alpha}$.

(III.) $R = u_1 W O_+ (u_2)$.

5. Обоснование алгоритма B^+ может быть проведено аналогично пункту 3 индукцией по глубине вложенности работы α на основе свойств оптимальных интервалов.

Литература

I. Шахбазян К.В. О структурных решениях в задачах теории расписаний. - В кн.: Численные методы и вопросы организации вычислений.2. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1978, т.80, с.239-248.

2. Шахбазян К.В. Алгоритм сдвигов для оптимальных структурных расписаний. - В кн.: Численные методы и вопросы организации вычисления.6. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.124, с.73--92.

3. Шахбазян К.В., Лебединская Н.Б. Об оптимальных расписаниях с прерываниями для независимых работ в системе обслуживания с N приборами. - В кн.: Численные мето-

ды и вопросы организации вычислений.I. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1977, т.70, с.205-231.

4. Л е б е д и н с к а я Н.Б. Об одном алгоритме построения оптимального структурного расписания. - В кн.: Численные методы и вопросы организации вычислений.6. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1983, т.124, с.5-20.

5. С а ф о н о в а Т.Е. О внесении изменений в оптимальное стркутурное расписание. - В кн.: Численные методы и вопросы организации вычислений.5. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1981, т.111, с.151-161.

6. С а ф о н о в а Т.Е. Об устойчивости согласованных расписаний. - В кн.: Численные методы и вопросы организации вычислений.6. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.124, с.21-34.

7. С а ф о н о в а Т.Е. Перестройка согласованного расписания в связи с изменением объема работ. - В кн.: Численные методы и вопросы организации вычислений.7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1984, т.139, с.5-21.