L. N. Bryzgalova, Maximum functions of a family of functions depending on parameters, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1978, Volume 12, Issue 1, 66–67

Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 1, 1978, 66—67.

УДК 517.27

О ФУНКЦИЯХ МАКСИМУМА СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Л. Н. Брызгалова

Рассмотрим гладкое семейство функций от n переменных, зависящих от k параметров. Обозначим это семейство через $f\colon X^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, где X^n — n-мерное компактное многообразие, $\mathbf{R}^k$ — пространство параметров. *Функцией максимума семейства функций на* X^n назовем функцию от параметров, значение которой в каждой точке y пространства параметров есть $F(y) = \max\limits_{x \in X^n} f(x, y)$.

Ростки (F_i, y_i), $i = 1, 2$, функций $F_i\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ в точках $y_i \in \mathbf{R}^k$ называются $\mathbf{R}^+$-*эквивалентными*, если существуют росток диффеоморфизма $\Theta\colon (\mathbf{R}^k, y_1) \to (\mathbf{R}^k, y_2)$ и гладкая функция $\Phi\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ такие, что $F_1 = F_2 \circ \Theta + \Phi$ (см. [3]). Будем говорить, что росток (F_1, y_1) функции $F_1\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ в точке $y_1 \in \mathbf{R}^k$ $\mathbf{R}^+$-*эквивалентен* ростку в нуле функции $F_2\colon \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}$ $(k > l)$, если росток (F_1, y_1) $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку в нуле функции $F_3\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, $F_3 = \pi^* F_2$, где через π^* обозначено отображение колец ростков в нуле гладких функций на $\mathbf{R}^l$ и $\mathbf{R}^k$, индуцированное проекцией $\pi\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^l$.

Снабдим пространство E гладких семейств $f\colon X^n \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ C^∞-топологией Уитни. Вместо того, чтобы говорить «свойство P точек E выполняется на открытом всюду плотном множестве», мы будем говорить «общее семейство обладает свойством P».

Теорема 1. *Для общего k-параметрического семейства функций на n-мерном многообразии росток функции максимума в любой точке пространства параметров $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку функции максимума общего семейства функций на r-мерном многообразии* $(r \geqslant 1)$, *если* $k < (r+1)(r+2)(r+6)/6$; *при* $k = (r+1)(r+2)(r+6)/6$ *неустранимым малым шевелением образом появляется k-параметрическое семейство, для которого росток функции максимума $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку функции максимума общего семейства функций на $(r+1)$-мерном многообразии.*

Следствие 1. *При $k \leqslant 6$ росток функции максимума общего k-параметрического семейства функций на n-мерном многообразии в любой точке пространства параметров $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку функции максимума общего семейства функций на одномерном многообразии.*

Росток функции максимума семейства $f \in E$ в точке $y_0 \in \mathbf{R}^k$ назовем а) *устойчивым*, если для каждого семейства $\tilde{f}$, близкого к f, вблизи y_0 имеется точка $\tilde{y}$ такая, что росток в точке $\tilde{y}$ функции максимума семейства $\tilde{f}$ $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку в точке y_0 функции максимума семейства f; б) *простым*, если существует конечное число семейств f_i таких, что для каждого семейства $\tilde{f}$, близкого к f, росток функции максимума этого семейства в любой точке $\tilde{y}$, достаточно близкой к y_0, $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку в нуле функции максимума одного из семейств f_i.

Заметим, что простой росток функции максимума может быть не устойчивым, а устойчивый — не простым.

Теорема 2. *Для семейства общего положения в пространстве семейств функций на одномерных многообразиях ростки функций максимума в каждой точке пространства параметров просты и устойчивы.*

Явный вид простого устойчивого ростка функции максимума может быть описан следующим образом. Рассмотрим вещественный многочлен от одной переменной x вида

$$f(x, Y) = -x^{2m} + y_1 x^{2m-2} + \ldots + y_{2m-2}x + y_{2m-1}.$$

Здесь Y обозначает набор коэффициентов $(y_1, \ldots, y_{2m-1})$ и принадлежит $\mathbf{R}^{2m-1}$. Рассмотрим максимум этого многочлена по x. Обозначим значение этой функции максимума в точке Y через $F(Y) = \max\limits_x f(x, Y)$. Будем рассматривать несколько многочленов указанного вида. Обозначим их число через s, j-й многочлен через f_j, его степень через $2m_j$ (среди чисел m_j могут быть равные), его набор коэффициентов через Y_j. Построим соответствующие функции F_j: $F_j(Y_j) = \max\limits_x f_j(x, Y_j)$, $j = 1, \ldots, s$.

Рассмотрим прямое произведение всех s пространств параметров. Точку этого пространства будем обозначать через $Y = (Y_1, \ldots, Y_s)$. Размерность этого пространства равна $\sum\limits_{j=1}^{s} (2m_j - 1)$. Обозначим это число через $\sigma(A) + 1$. Выделим в построенном пространстве гиперплоскость $\Gamma = \left\{Y\colon \sum_{j=1}^{s} f_j(0, Y_j) = 0\right\}$. Линейное пространство Г имеет размерность $\sigma(A)$. Точку пространства Г обозначим через y.

Функцией максимума типа $A = A_{2m_1-1} + \ldots + A_{2m_s-1}$ назовем функцию на Г, значение которой в каждой точке y на Г равно $\mathscr{F}(y) = \max_j F_j(Y_j)$.

Примеры. Функция максимума типа A_1 есть 0 $(\sigma(A) = 0)$, типа $lA_1 = A_1 + \ldots A_1$ — $\max\limits_{y_1+\ldots+y_l=0}(y_1, y_2, \ldots, y_l)$ $(\sigma(A) = l-1)$, типа A_3 — $\max\limits_x(-x^4 + y_1x^2 + y_2x)$ $(\sigma(A) = 2)$, типа A_7 —

$$\max_x(-x^8 + y_1x^6 + y_2x^5 + y_3x^4 + y_4x^3 + y_5x^2 + y_6x) \qquad (\sigma(A) = 6).$$

Функция максимума типа $2A_3 + A_1$ может быть записана (после подходящей линейной замены шести координат точки y) в виде

$$\max\left[\max_x(-x^4 + y_1x^2 + y_2x + y_3),\ \max_x(-x^4 + y_4x^2 + y_5x + y_6),\ -y_3 - y_6\right] \ (\sigma(A) = 6)$$

(ср. [3]).

Замечание. В пространстве $\mathbf{R}^k$ существует система координат, в которой график функции максимума типа A — полуалгебраическое множество.

Теорема 3. *Росток в нуле функции максимума типа A прост и устойчив.*

Теорема 4. *В пространстве k-параметрических семейств функций на n-мерных многообразиях при $k \leqslant 6$ открытое всюду плотное множество образуют такие семейства f, для которых росток функции максимума в каждой точке пространства параметров $\mathbf{R}^+$-эквивалентен ростку в нуле функции максимума типа A с $\sigma(A) \leqslant k$.*

Следствие 2. *Если $k \leqslant 6$, то k-параметрические семейства общего положения имеют в каждой точке пространства параметров простые устойчивые ростки функций максимума.*

В доказательстве теорем используются результаты работ [1], [2].

Автор приносит глубокую благодарность В. И. Арнольду и А. Г. Кушниренко за внимание к работе и важные замечания.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 6 июня 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Функц. анализ **6**, вып. 4 (1972), 3—25. 2. Dubois J. G., Dugour J. P., Stanek O., Ann. Inst. Henri Poincaré **24**, № 3 (1976), 261. 3. Брызгалова Л. Н., Функц. анализ **11**, вып. 1 (1977), 59—60.