Ф. Н. Гарифьянов, О неоднородной задаче Римана на неограниченном контуре, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1982, выпуск 18, 46–53

Откуда видно, что перераспределение напора между шпунтом и понуром, при постоянстве общего падения напора и напора на грунтонаполняемой части, слабо влияет на форму последнего. То же самое происходит с любым элементом флютбета при фиксации на нем падения напора.

В заключение автор выражает благодарность Н. Д. Якимову и А. В. Поташеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косиченко Ю. М., Сергеев Б. И. Фильтрация под гибкими флютбетами гидродинамических сооружений из синтетических материалов.— Проектирование и расчет мягких конструкций гидротехнических сооружений. Новочеркасск, ЮжНИИГ и М., 1976.

2. Павловский И. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения.— Собр. соч., т. 2, изд-во АН СССР, М.-Л., 1956.

3. Косиченко Ю. М. Расчет фильтрации под грунтонаполняемыми флютбетами с неравными плоскими участками и вертикальной преградой.— Гидротехнические сооружения мелиоративных систем. Новочеркасск, 1976.

4. Нужин М. Т., Ильинский Н. Б. Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Казань, изд-во Казанск. ун-та, 1963.

5. Глущенко А. А. Об одном методе решения обратных задач теории фильтрации.— Прикладная механика, т. I, вып. 10. Киев, „Наукова думка", 1965.

6. Виниченко А. А. Разработка метода электромоделирования обратных задач теории фильтрации во вспомогательных плоскостях.— Труды семинара по краевым задачам, вып. 17. Казань. Изд-во Казанск. ун-та, 1980.

7. Фильчаков П. Ф. Теория фильтрации под гидротехническими сооружениями, т. 2. Киев, Изд-во АН УССР, 1960.

Доложено на семинаре 6 февраля 1980 года.

УДК 517.544

Ф. Н. Гарифьянов

О НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА НЕОГРАНИЧЕННОМ КОНТУРЕ

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1] и имеет с ней общую нумерацию и обозначения.

1. Будем искать аналитические в области D функции, граничные значения которых на противоположных берегах разреза удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in l_0, \tag{15}$$

где функция $G(t)$ по-прежнему удовлетворяет равенству (13), а функцию $g(t)$ будем считать гёльдеровой всюду, включая бесконечно удаленную точку. В дальнейшем будем считать, что $h_{\varkappa}(0) > 0$, т. е.

$$(-1)^{[\rho]+1} R_0 \cos(\Theta_0 - \rho\pi) > 0. \tag{16}$$

Используя в качестве канонической функции однородной задачи (12), построенную в [1] функцию $\varkappa(z)$, перепишем условие (15) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\varkappa^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\varkappa^-(t)} = \frac{g(t)}{\varkappa^+(t)},$$

откуда для всей совокупности аналитических в области D функций, удовлетворяющих условию (15), получается представление

$$\Phi(z) = \varkappa(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_0} \frac{g(\tau)\,d\tau}{\varkappa^+(\tau)(\tau - z)} + P(z)\right] =$$
$$= \varkappa(z)\,[\omega(z) + P(z)] = \varkappa(z)\,F(z), \tag{17}$$

где $P(z)$ — целая функция, а интеграл $\omega(z)$ сходится, поскольку $\lim\limits_{\tau\to\infty} \frac{g(\tau)}{\varkappa^+(\tau)} = 0$ в силу условия (16).

Обозначим через T_ρ, $\rho > 0$, класс тригонометрически ρ — выпуклых на всей действительной оси, 2π — периодических функций. Через T_0 обозначим класс выпуклых на всей действительной оси, 2π — периодических функций. Как показано в статье А. Ф. Гришина [2], индикатор целой функции, имеющей нулевой порядок, принадлежит классу T_0, состоящему только из положительных постоянных.

Пусть вначале $\rho < \frac{1}{2}$. Будем различать следующие случаи.

1) Существует хотя бы одна точка λ_0, в которой

$$h(\lambda_0) - h_{\varkappa}(\lambda_0) > 0.$$

В этом случае целая функция $P(z)$ в формуле (17) не может быть уточненного порядка $\rho_1(r) \to \rho_1 > \rho$, поскольку тогда в некоторой точке λ_1, было бы $h_F(\lambda_1) = \infty$. Целая функция $P(z)$ не может быть и уточненного порядка $\rho_2(r) \to \rho_2 < \rho$, поскольку тогда $h_F(\lambda_0) = 0$. Следовательно, целая функция $P(z)$ в формуле (17) уточненного порядка $\rho(r) \to \rho$, т. е. $k_p(\lambda) = h_p(\lambda)/c(\lambda) \in T_\rho$. Но класс T_ρ при $\rho < \frac{1}{2}$ состоит только из положительных функций ([3], с. 82), а это означает, что рост сомножителя $F(z)$ целиком определяется вторым слагаемым — целой функцией $P(z)$. Таким образом, справедлива

Теорема. *Для того, чтобы краевая задача* (15) *была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы* $\frac{h(\lambda) - h_{\varkappa}(\lambda)}{c(\lambda)} \in T_\rho$.

При выполнении этого условия задача имеет бесконечное множество решений. Все они даются формулой (17), *где* $P(z)$ — *целая функция с индикатором* $h(\lambda) - h_{\varkappa}(\lambda)$ *относительно порядка* ρ.

2) $h(\lambda) - h_{\varkappa}(\lambda) \equiv 0$, $\lambda \in [0, 2\pi]$.

Легко видеть, что если целая функция $P(z) \not\equiv 0$ имеет относительно порядка ρ индикатор $h_P(\lambda) \equiv 0$, то $h_F(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, в этом случае задача имеет бесконечное множество решений. Кроме того, существует, быть может, еще одно решение, которое дается формулой

$$\Phi(z) = \varkappa(z)\,\omega(z). \tag{18}$$

Для того, чтобы функция $\Phi(z)$, определенная формулой (18), было решением, необходимо и достаточно, чтобы $h_{\omega}(\lambda) \equiv 0$.

3) Существует хотя бы одна точка λ_0, в которой $h(\lambda_0) - h_{\varkappa}(\lambda_0) < 0$.

Из предыдущих рассуждений следует, что в этом случае задача может иметь не более одного решения вида

$$\Phi(z) = \varkappa(z)\,\omega(z). \tag{19}$$

Для того, чтобы функция $\Phi(z)$, определенная формулой (19), была решением, необходимо и достаточно, чтобы

$$h_{\omega}(\lambda) = h(\lambda) - h_{\varkappa}(\lambda). \tag{20}$$

Из условия (20) следует, что задача может быть разрешима, лишь когда

$$h(\lambda) - h_{\varkappa}(\lambda) \leqslant 0, \quad \lambda \in [0, 2\pi].$$

Поскольку функция $k_{\omega}(\lambda)$ тригонометрически ρ-выпукла на интервалах $(0, \lambda_0)$ и $(\lambda_0, 2\pi)$, то имеют место неравенства

$$k_{\omega}(0)\sin\rho(\lambda_0 - \lambda) - k_{\omega}(\lambda)\sin\rho\lambda_0 + k_{\omega}(\lambda_0)\sin\rho\lambda \geqslant 0,$$
$$k_{\omega}(\lambda_0)\sin\rho(2\pi - \lambda) - k_{\omega}(\lambda)\sin\rho(2\pi - \lambda_0) + k_{\omega}(2\pi)\sin\rho(\lambda - \lambda_0) \geqslant 0,$$

где

$$k_{\omega}(\lambda) = h_{\omega}(\lambda)/c(\lambda).$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Если в некоторой точке* $\lambda_0 \in [0, 2\pi]$ *выполнено неравенство* $h(\lambda_0) > h_{\varkappa}(\lambda_0)$, *то для разрешимости задачи необходимо, чтобы* $h(\lambda) > h_{\varkappa}(\lambda)$, $\lambda \in [0, 2\pi]$. *Если в некоторой точке* $\lambda_0 \in (0, 2\pi]$, $h(\lambda_0) = h_{\varkappa}(\lambda_0)$, *то для разрешимости задачи необходимо, чтобы* $h(\lambda) \equiv h_{\varkappa}(\lambda)$, $\lambda \in (0, 2\pi)$. *Если в некоторой точке* $\lambda_0 \in (0, 2\pi)$ $h(\lambda_0) < h_{\varkappa}(\lambda_0)$, *то для разрешимости задачи необходимо, чтобы* $h(\lambda) < h_{\varkappa}(\lambda)$, $\lambda \in (0, 2\pi)$.

Легко показать, что если $\Omega(z) = Q(z) + N(z)$, то

$$h_{\Omega}(\lambda) \leqslant \max(h_Q(\lambda), h_N(\lambda)) \tag{21}$$

причем имеет место знак равенства в любой точке λ, где

$$h_Q(\lambda) \neq h_N(\lambda).$$

Отсюда и из формулы Сохоцкого

$$\omega^+(t) = \omega^-(t) + g(t)/\varkappa^+(t) \tag{22}$$

вытекает

Следствие 1. *Для того, чтобы задача была разрешима в случае* (3), *необходимо, чтобы величины* $h(0) - h_\varkappa(0)$ и $h(2\pi) - h_\varkappa(2\pi)$ *либо одновременно обращались в ноль, либо одновременно были отрицательны.*

Пусть $\rho = \frac{1}{2}$. Тогда в силу хорошо известного свойства тригонометрически выпуклых функций ([3], с. 84) должно выполняться соотношение

$$k_\omega(0) + k_\omega(2\pi) \geqslant 0,$$

откуда можно сделать вывод, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы $h(0) - h_\varkappa(0) = h(2\pi) - h_\varkappa(2\pi)$. Теперь в предположении, что функция $k(\lambda) = h(\lambda)/c(\lambda)$ непрерывно дифференцируема, можно показать, что для разрешимости задачи необходимо, чтобы $2k'(\pi) = R_0\pi \sin\Theta_0$. В самом деле, если это не так, то в силу формулы (20) функция $k_\omega(\lambda)$ имеет точку минимума в некоторой точке $\lambda_1 \neq \pi$. Это означает, что

$$\max(\lambda_1,\ 2\pi - \lambda_1) > \pi.$$

Но тогда при $|\lambda - \lambda_1| \leqslant 2\pi$ (т. е. для всех $\lambda \in [0, 2\pi]$) должно выполняться неравенство

$$k_\omega(\lambda) \geqslant k_\omega(\lambda_1) \cos\frac{\lambda - \lambda_1}{2}$$

([3], с. 78). А это, в свою очередь, означает, что одно из чисел $k_\omega(\lambda_1)$ и $k_\omega(2\pi - \lambda_1)$ положительно, что невозможно. Заметим, что функция $k_\omega(\lambda)$ не может тождественно равняться отрицательной постоянной на любом интервале (α, β), так как это противоречило бы тригонометрической выпуклости этой функции.

Пусть теперь $\rho > \frac{1}{2}$ и

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_0} \frac{g(\tau)\,d\tau}{\varkappa^+(\tau)(\tau - t)},\quad t \in l_0,$$

где $\omega(t)$ — особый интеграл, понимаемый в смысле главного значения. Имеет место

Лемма 4. *Для того, чтобы* $h_\omega(\lambda) \equiv -\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} S(t)^{-\rho} \ln |g(t)| = -\infty \tag{23}$$

и

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} S(t)^{-\rho} \ln |\omega(t)| = -\infty. \tag{24}$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то $h_\omega(\lambda) \equiv 0$.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из формул (21) и (22) и леммы Н. В. Говорова ([4]), состоящей в следующем: если функция $h(\lambda)$ тригонометрически ρ — выпукла на интервале (α, β), причем $\beta-\alpha > \frac{\pi}{\rho}$ и $-\infty < h(\lambda) \leqslant 0$, то $h(\lambda) \equiv 0$.

Рассмотрим следующие случаи.

1) $h_\omega(\lambda) \equiv -\infty$. Для того, чтобы задача была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)}{c(\lambda)} \in T_\rho. \tag{25}$$

Если условие (25) выполнено, то задача имеет бесконечное множество решений. Все они даются формулой (17), где $P(z)$ — целая функция с индикатором $h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)$ относительно порядка ρ.

2) $h_\omega(\lambda) \equiv 0$.

а) $h(\lambda) \leqslant h_\varkappa(\lambda)$, причем $h(\lambda) \not\equiv h_\varkappa(\lambda)$.

Для того, чтобы задача была разрешима, необходимо, чтобы $h_F(\lambda) \leqslant 0$. Но тогда в силу леммы 4 либо $h_F(\lambda) \equiv 0$, либо $h_F(\lambda) \equiv -\infty$. Следовательно, задача неразрешима.

б) $h_\varkappa(\lambda) \equiv h(\lambda)$. В этом случае задача имеет бесконечное множество решений, которые даются формулой (17), где целая функция $P(z) \not\equiv 0$ имеет относительно порядка ρ индикатор $h_p(\lambda) \equiv 0$. В том и только в том случае, когда не выполнено хотя бы одно из условий (23) и (24), существует еще одно решение $\Phi(z) = \varkappa(z)\,\omega(z)$.

в) $h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda) > 0$. Можно сделать те же выводы, что и в случае 1).

г) $h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda) \geqslant 0$, причем множество нулей не имеет внутренних точек. Можно сделать те же выводы, что и в случае 1).

д) $h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda) \geqslant 0$ причем $h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (0, \alpha) \cup \cup (\beta, 2\pi)$, где $\min(\alpha, 2\pi - \beta) \geqslant \frac{\pi}{\rho}$.

В этом случае справедлива

Теорема. *Для того, чтобы задача была разрешима, необходимо, чтобы* $\frac{h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)}{c(\lambda)} \in T_\rho$.

Доказательство. Продолжим рассматриваемую функцию с периодом 2π на всю действительную ось. Получившаяся функция может не принадлежать классу T_ρ лишь за счет того обстоятельства, что она не тригонометрически ρ — выпукла на интервале (α, β), содержащему внутри себя одну из точек $2\pi k$, где k — целое число или нуль. Но этого не может произойти, поскольку рост сомножителя $F(z)$ в формуле (17) определяется на этом интервале вторым слагаемым — целой функцией $P(z)$, а функция $h_p(\lambda)/c(\lambda)$, как известно, принадлежит классу T_ρ.

В общем случае имеет место

Теорема. *Если* $h(0) > 0$ *и* $k_F(0) \geqslant k'_F(2\pi)$, *где*

$$k_F(\lambda) = \frac{h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)}{c(\lambda)},$$

то для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)}{c(\lambda)} \in T_\rho.$$

При этом задача имеет решение, в которое входит бесконечное число произвольных постоянных. При $k'_F(0) < k'_F(2\pi)$ *и*

$$\frac{h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)}{c(\lambda)} \in T_\rho$$

задача решений не имеет.

Достаточность. Рассмотрим новую каноническую функцию $\varkappa_2(z) = \varkappa(z) P_2(z)$, где $P_2(z)$ — целая функция вполне регулярного роста на каждой кривой l_λ, с индикатором $h(\lambda) - h_\varkappa(\lambda)$. Тогда всю совокупность аналитических в области D функций, удовлетворяющих условию (15), можно представить в виде

$$\Phi(z) = \varkappa_2(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_0} \frac{g(\tau)\,d\tau}{\varkappa_2(\tau)(\tau - z)} + \frac{P(z)}{P_2(z)}\right] =$$

$$= \varkappa_2(z)\left[\omega_1(z) + \frac{P(z)}{P_2(z)}\right] = \varkappa_2(z) F_1(z), \tag{25}$$

где функция $F_1(z)$, вообще говоря, уже не аналитическая в области D (у нее могут быть полюсы в нулях функции $P_2(z)$). Функция $\Phi(z)$ будет иметь индикатор $h(\lambda)$ в том и только в том случае, когда индикатор функции $F_1(z)$ тождественно равен нулю. Этого можно добиться, если, например, положить в формуле (25) $P(z) = P_2(z) P_0(z)$, где целая функция $P_0(z) \not\equiv 0$, а ее индикатор тождественно равен нулю.

Необходимость. Пусть задача разрешима. Тогда всю совокупность аналитических в области D функций, удовлетворяющих условию (15), можно представить в виде

$$\Phi(z) = \varkappa(z)\left[\frac{P_3(z)}{2\pi i}\int\limits_{l_0} \frac{g(\tau)\,d\tau}{P_3(\tau)\varkappa^+(\tau)(\tau - z)} + P(z)\right] = \varkappa(z) F_2(z), \tag{26}$$

где функция $P_3(z)$ выбрана так, чтобы $h_{P_3}(0)+h_\varkappa(0)>0$ (например, эта функция вполне регулярного роста на каждой кривой l_λ, с индикатором $h_{P_3}(\lambda)=[\varepsilon-h_\varkappa(0)]c(\lambda)$, если $h_\varkappa(0)\leqslant 0$ и $P_3(z)\equiv 1$, если $h_\varkappa(0)>0$, а $P(z)$ принадлежит некоторому классу целых функций, выбранному так, что функция $F_2(z)$ имеет индикатор $h(\lambda)-h_\varkappa(\lambda)$. В силу (26)

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|F^+(t)|}{S(t)^\rho}=h(0)-h_\varkappa(0)>-h_\varkappa(0)$$

откуда, используя формулу Сохоцкого

$$F^-(t)=F^+(t)-\frac{g(t)}{\varkappa^+(t)}$$

и тот факт, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}S(t)^{-\rho}(\ln|g(t)|-\ln|\varkappa^+(t)|)<-h_\varkappa(0)$$

получим, что $h_F(0)=h_F(2\pi)$. Продолжим функцию $k_F(\lambda)$ с периодом 2π на всю действительную ось. Полученная функция может не принадлежать классу T_ρ лишь за счет того, что она не тригонометрически выпукла на интервале (α,β), содержащем внутри себя точку $2\pi k$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2\ \ldots$, причем можно считать, что $\beta-\alpha<\frac{\pi}{\rho}$. Чтобы доказать, что $k_F(\lambda)\in T_\rho$, покажем, что

$$k'_{F^-}(\beta)-k'_{F^+}(\alpha)+\rho^2\int_\alpha^\beta k(\varphi)\,d\varphi\geqslant 0, \tag{27}$$

т. е. используем характеристическое свойство тригонометрически ρ — выпуклых функций ([3], с. 79—80). При этом в силу периодичности функции $k_F(\lambda)$ достаточно рассмотреть такой интервал (α,β), что $2\pi\in(\alpha,\beta)$. Представив левую часть неравенства (27) в виде

$$\left[k'_{F^-}(\beta)-k'_{F^+}(2\pi)+\rho^2\int_{2\pi}^\beta k_F(\varphi)\,d\varphi\right]+$$
$$+\left[k'_{F^-}(2\pi)-k'_{F^+}(\alpha)+\rho^2\int_\alpha^{2\pi}k_F(\varphi)\,d\varphi\right]+k'_{F^+}(2\pi)-k'_{F^-}(2\pi),$$

заметим, что выражения в квадратных скобках неотрицательны, поскольку функция $k_F(\lambda)$ тригонометрически выпукла на интервалах $(\alpha,\ 2\pi)$ и $(2\pi,\ \beta)$, и, кроме того $k'_{F^+}(2\pi)=k'_F(0)$.

Замечание. При доказательстве необходимости можно вместо условия $h(0)>0$ считать, что

$$h(0) \neq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|g(t)|}{S(t)^{\rho}}.$$

Автор благодарен проф. Л. И. Чибриковой за ценные советы и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарифьянов Ф. Н. К решению однородной задачи Римана для неограниченного контура.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 17. Изд-во Казанск. ун-та, 1980, с. 27—34.
2. Гришин А. Ф. О функциях голоморфных внутри угла и имеющих там нулевой порядок.— В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 1. Харьков, 1965, с. 41—66.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., ГИТТЛ, 1956,
4. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка меньше 1/2.— В сб.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 6. Харьков, 1968, с. 151—168.

Доложено на семинаре 4 февраля 1980 г.

УДК 517.544

А. М. Елизаров

О СМЕШАННЫХ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассматриваются внутренние и внешние смешанные обратные краевые задачи в двусвязной области с граничными условиями типа [1].

§ 1. Внутренняя задача для регулярной функции и функции с полюсом

1°. *Постановка задачи*

Пусть в плоскости z задана простая гладкая кривая Γ_0 с началом в точке z_0, уходящая в бесконечность, и $\Psi(s)$, $0\leqslant s\leqslant\infty$,— угол наклона к вещественной оси касательной к Γ_0, причем

$$\Psi\in C_\lambda,\ 0<\lambda\leqslant 1;\ K=\sup_{0\leqslant s\leqslant\infty}\Psi(s)-\inf_{0\leqslant s\leqslant\infty}\Psi(s)<\pi \tag{1}$$

(C_λ — пространство гельдеровых функций, λ — показатель Гельдера).