В. И. Овчинников, Интерполяционные орбиты классов $\mathfrak{S}_p$ в парах гильбертовых пространств, *Докл. АН СССР*, 1978, том 242, номер 1, 52–55

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 242, № 1

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ОВЧИННИКОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ОРБИТЫ КЛАССОВ $\mathfrak{S}_p$ В ПАРАХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 V 1978)

В этой заметке выясняется возможность улучшения интерполяционных теорем для пространств $(H_0, H_1)_{\theta,p}$ Ж. Петре за счет рассмотрения более узких, чем ограниченные, классов операторов.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ — некоторая пара банаховых пространств. Для $a\in X_0+X_1$ положим

$$K(s,t,a;\{X_0,X_1\})=\inf_{a=x_0+x_1} s\|x_0\|_{X_0}+t\|x_1\|_{X_1},$$

$$K(t,a;\{X_0,X_1\})=K(1,t,a;\{X_0,X_1\}).$$

Пространство $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ состоит из тех $a\in X_0+X_1$, для которых

$$\int_0^\infty [t^{-\theta}K(t,a;\{X_0,X_1\})]^p\frac{dt}{t}<\infty \quad \text{при} \quad 1\leqslant p<\infty,$$

$$\sup t^{-\theta}K(t,a;\{X_0,X_1\})<\infty \quad \text{при} \quad p=\infty.$$

Пространство $(X_0,X_1)^0_{\theta,\infty}$ равно замыканию $X_0\cap X_1$ в $(X_0,X_1)_{\theta,\infty}$. Если, например, $X_0=W_p^{s_0}(\mathbf{R}^n)$, $X_1=W_p^{s_1}(\mathbf{R}^n)$, то $(X_0,X_1)_{\theta,q}=B^{s_\theta}_{p,q}$, где $s_\theta=(1-\theta)s_0+\theta s_1$.

Пусть H, G — гильбертовы пространства. Как обычно, обозначаем $\mathfrak{S}_p(H\to G)$ пространство операторов T: $H\to G$ таких, что

$$sp(T^*T)^{p/2}<\infty.$$

Операторы класса $\mathfrak{S}_2(H\to G)$ называются операторами Гильберта — Шмидта. Операторы классов $\mathfrak{S}_1(H\to G)$ совпадают с ядерными операторами, т. е. такими, что

$$T=\sum_{i=1}^\infty x_i\otimes y_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^\infty \|x_i\|\cdot\|y_i\|<\infty,$$

$x_i\in H^*$, $y_i\in G$. Класс $\mathfrak{S}_\infty(H\to G)$ состоит из всех вполне непрерывных операторов.

Всюду в дальнейшем для упрощения рассуждений предполагается, что пересечение пространства $H_0\cap H_1$ в парах гильбертовых пространств плотно в H_0 и в H_1.

Пусть $\{H_0, H_1\}$ — пара гильбертовых пространств такая, что $H_0\cap H_1$ плотно в H_0 и в H_1. Нетрудно показать, что существует последовательность гильбертовых пространств $\{G_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ таких, что пара $\{l_2(G_i), l_2(2^iG_i)\}$ изоморфна паре $\{H_0, H_1\}$. Заметим, что некоторые из пространств G_i могут быть нулевыми.

Воспользовавшись указанным представлением пары $\{H_0, H_1\}$, можно описать пространства $(H_0, H_1)_{\theta,p}$. А именно $(H_0, H_1)_{\theta,p}\cong\cong(l_2(G_i), l_2(2^iG_i))_{\theta,p}=l_p(2^{i\theta}G_i)$ (см. (1), стр. 123).

Рассмотрим пару $\{l_2(\mathbf{R}), l_2(2^i\mathbf{R})\}$ или любую другую пару $\{l_2(F_i), l_2(2^iF_i)\}$ такую, что $F_i\neq0$ при всех i и элемент $a_\theta\in l_2(F_i)+l_2(2^iF_i)$,

$a_\theta = \left\{ \frac{1}{2^{i\theta}} f_i \right\}$, где $f_i \in F_i$ и $\|f_i\|_{F_i} = 1$. Как известно (см. ([1]), стр. 116), $K(t, a_\theta; \{l_2(F_i), l_2(2^i F_i)\}) \asymp t^\theta$.

Теорема 1. *Для произвольной пары гильбертовых пространств $\{H_0, H_1\}$ и любого элемента $y \in (H_0, H_1)_{\theta, p}$ существует оператор T: $l_2(F_i) \to H_0$, $l_2(2^i F_i) \to H_1$ такой, что $T a_\theta = y$; при этом $T \in \mathfrak{S}_p(l_2(F_i) \to H_0) \cap \mathfrak{S}_p(l_2(2^i F_i) \to H_1)$, если $1 \leqslant p < \infty$. Если $y \in (H_0, H_1)_{\theta, \infty}$, то оператор T ограничен; если $y \in (H_0, H_1)^0_{\theta,\infty}$, то оператор T может быть выбран вполне непрерывным.*

Доказательство. Будем рассматривать пару $\{H_0, H_1\}$ как пару $\{l_2(G_i), l_2(2^i G_i)\}$. Тогда элементу $y \in (H_0, H_1)_{\theta, p}$ соответствует последовательность $\{y_i\}$ такая, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (\|y_i\| \cdot 2^{i\theta})^p < \infty.$$

Обозначим $s_i = \|y_i\| \cdot 2^{i\theta}$, тогда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} s_i^p < \infty.$$

Обозначим через T_i не более чем одномерный оператор T_i: $F_i \to G_i$, $\|T_i\| \leqslant 1$ такой, что $T_i(f_i) = y_i / \|y_i\|$, если $y_i \neq 0$, и $T_i = 0$, если $y_i = 0$, и положим $T = \sum^{\oplus} s_i T_i$.

Вычислим образ a_θ при действии T: $T(a_\theta) = \{s_i T_i (f_i / 2^{i\theta})\} = \{y_i\}$. Оператор T, очевидно, принадлежит классу $\mathfrak{S}_p(l_2(F_i) \to l_2(G_i))$ и $\mathfrak{S}_p(l_2(2^i F_i) \to l_2(2^i G_i))$, так как $\sum s_i^p < \infty$. В случае $p = \infty$ оператор T ограничен. Если $y \in (H_0, H_1)^0_{\theta,\infty}$, то $T \in \mathfrak{S}_\infty$, так как в этом случае $s_i \to 0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Вместо пары $\{l_2(F_i), l_2(2^i F_i)\}$ можно рассматривать любую другую пару гильбертовых пространств $\{F_0, F_1\}$ такую, что в $F_0 + F_1$ существует элемент a_θ с $K(t, a_\theta; \{F_0, F_1\}) \asymp t^\theta$. Это непосредственно следует из того, что интерполяционная орбита любого элемента в гильбертовой паре пространств описывается K-методом.

Пусть $\{H_0', H_1'\}$ и $\{H_0, H_1\}$ — произвольные пары гильбертовых пространств $a \in H_0' + H_1'$. Опишем орбиту элемента a при действии всевозможных операторов Гильберта — Шмидта, действующих из пары $\{H_0', H_1'\}$ в пару $\{H_0, H_1\}$.

Теорема 2. *Множество элементов вида $\{Ta\} \subset H_0 + H_1$, где $T \in \mathfrak{S}_2(H_0' \to H_0)$ и $T \in \mathfrak{S}_2(H_1' \to H_1)$, совпадает с пространством $K(H_0, H_1, a; \{H_0', H_1'\})$, в частности, $\{T a_\theta\} = H_0^{1-\theta} H_1^\theta = (H_0, H_1)_{\theta, 2}$.*

Доказательство. В статье ([2]) показано, что пространство $K(H_0, H_1, a; \{H_0', H_1'\})$ совпадает с множеством $\{Ta\}$, где T^*: $H_0^* \to H_0'^*$, T^*: $H_1^* \to H_1'^*$ — абсолютно суммирующие операторы. Множество таких операторов совпадает, как известно (см., например, ([3])), с операторами Гильберта — Шмидта.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если T: $H_0' \to H_0$ и T: $H_1' \to H_1$ является оператором Гильберта — Шмидта, то T: $(H_0', H_1')_{\theta, \infty} \to (H_0, H_1)_{\theta, 2}$ при любом $0 < \theta < 1$.*

Доказательство. По теореме 1 для любого элемента $y \in (H_0', H_1')_{\theta, \infty}$ найдется такой ограниченный оператор S: $F_0 \to H_0'$ и S: $F_1 \to H_1'$, что $S a_\theta = y$. Оператор TS: $F_0 \to H_0$, $F_1 \to H_1$ будет оператором Гильберта — Шмидта и по теореме 2 $TS a_\theta \in (H_0, H_1)_{\theta, 2}$, т. е. $Ty \in (H_0, H_1)_{\theta, 2}$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Если T: $H_0' \to H_0$ и T: $H_1' \to H_1$ является оператором Гильберта — Шмидта, то T: $(H_0', H_1')_{\theta, 2} \to (H_0, H_1)_{\theta, 1}$.*

Доказательство. Рассмотрим пары сопряженных пространств $\{H_0^*, H_1^*\}$ и $\{H_0'^*, H_1'^*\}$. Оператор T^* по предыдущему следствию отображает $(H_0^*, H_1^*)_{1-\theta,\infty}$ в $(H_0'^*, H_1'^*)_{1-\theta,2}$ и тем более $(H_0^*, H_1^*)^0_{1-\theta,\infty} \to (H_0'^*, H_1'^*)_{1-\theta,2}$. Тогда сопряженный оператор T: $(H_0', H_1')_{\theta,2} = (H_0'^*, H_1'^*)^*_{1-\theta,2} \to (H_0^*, H_1^*)^{0*}_{1-\theta,1} = (H_0, H_1)_{\theta,1}$ в силу теоремы 3.7.1 из ([1]).

Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть оператор T: $H_0' \to H_0$, T: $H_1' \to H_1$ является ядерным, тогда T: $(H_0', H_1')_{\theta,\infty} \to (H_0, H_1)_{\theta,1}$.*

Прежде чем доказывать эту теорему, докажем следующую лемму, имеющую самостоятельный интерес. Напомним, что оператор T, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y, называется гильбертовым, если существует гильбертово пространство H и ограниченные операторы S: $X \to H$ и U: $H \to Y$ такие, что $T = U \cdot S$.

Лемма. *Пусть $\{X_0, X_1\}$ и $\{Y_0, Y_1\}$ — две пары банаховых пространств, T — линейный оператор, отображающий $X_0 \to Y_0$ и $X_1 \to Y_1$, является гильбертовым как отображение $X_0 \to Y_0$ и $X_1 \to Y_1$; тогда существует пара гильбертовых пространств $\{H_0, H_1\}$ и операторы S и U такие, что S: $\{X_0, X_1\} \to \{H_0, H_1\}$, U: $\{H_0, H_1\} \to \{Y_0, Y_1\}$ и $T = U \cdot S$.*

Доказательство. Так как T: $X_0 \to Y_0$ гильбертов, существуют операторы S_0: $X_0 \to H_0$ и U_0: $H_0 \to Y_0$ такие, что $T|_{X_0} = U_0 S_0$; аналогично S_1: $X_1 \to H_1$, U_1: $H_1 \to Y_1$ и $T|_{X_1} = U_1 S_1$. Легко видеть, что операторы U_0 и U_1 можно предполагать имеющими нулевое ядро. Это позволяет рассматривать два непрерывных вложения U_0: $H_0 \to Y_0 + Y_1$ и U_1: $H_1 \to Y_0 + Y_1$. Обозначим $\{H_0, H_1\}$ пару, которая задается этими вложениями.

Определим теперь оператор S: $\{X_0, X_1\} \to \{H_0, H_1\}$. Пусть $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$; положим $Sx = S_0 x_0 + S_1 x_1 \in H_0 + H_1$. Если $x = x_0' + x_1'$, то тогда $x_0 - x_0' = x_1' - x_1 \in X_0 \cap X_1$, следовательно, $T(x_0 - x_0') = T(x_1' - x_1)$ или $U_0 S_0 (x_0 - x_0') = U_1 S_1 (x_1' - x_1)$, т. е. $S_0(x_0 - x_0') = S_1(x_1' - x_1)$ в паре $\{H_0, H_1\}$. Отсюда $S_0 x_0 + S_1 x_1 = S_0 x_0' + S_1 x_1'$. Это значит, что определение оператора S корректно. Аналогично операторы U_0 и U_1 определяют оператор U: $\{H_0, H_1\} \to \{Y_0, Y_1\}$.

Лемма доказана.

Из определения операторов U и S видно, что $S|_{X_0} = S_0$, $S|_{X_1} = S_1$, $U|_{H_0} = U_0$, $U|_{H_1} = U_1$.

Доказательство теоремы 3. Пусть T — ядерный оператор, отображающий пару $\{H_0', H_1'\}$ в пару $\{H_0, H_1\}$. Как известно ([4]), если T: $H_0' \to H_0$ ядерно, то существует гильбертово пространство G_0 и операторы Гильберта — Шмидта S_0: $H_0' \to G_0$ и U_0: $G_0 \to H_0$ такие, что $T|_{H_0'} = U_0 \cdot S_0$. Аналогично существует пространство G_1 и операторы S_1: $H_1' \to G_1$ и U_1: $G_1 \to H_1$ такие, что $T|_{H_1} = U_1 \cdot S_1$. Тогда по лемме существует пара $\{G_0, G_1\}$ и операторы S и U такие, что $T = U \cdot S$; при этом операторы S и U являются операторами Гильберта — Шмидта из пары $\{H_0', H_1'\}$ в $\{G_0, G_1\}$ и из пары $\{G_0, G_1\}$ в $\{H_0, H_1\}$ соответственно.

По следствию 1 тогда S: $(H_0', H_1')_{\theta,\infty} \to (G_0, G_1)_{\theta,2}$, а по следствию 2 U: $(G_0, G_1)_{\theta,2} \to (H_0, H_1)_{\theta,1}$, поэтому $T = U \cdot S$: $(H_0', H_1')_{\theta,\infty} \to (H_0, H_1)_{\theta,1}$.

Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $\{F_0, F_1\}$ — произвольная пара гильбертовых пространств, $a_\theta \in F_0 + F_1$ и $K(t, a_\theta \{F_0, F_1\}) \asymp t^\theta$; тогда орбита элемента a_θ при действии ядерных операторов из пары $\{F_0, F_1\}$ в пару $\{H_0, H_1\}$ совпадает с пространством $(H_0, H_1)_{\theta,1}$.*

Доказательство. Это непосредственно следует из теорем 1 и 3, так как $a_\theta \in (F_0, F_1)_{\theta,\infty}$.

Теорема 4. *Пусть $\{F_0, F_1\}$ — произвольная пара гильбертовых пространств, $a_\theta \in F_0 + F_1$ такой, что $K(t, a_\theta \{F_0, F_1\}) \asymp t^\theta$; тогда орбита элемента a_θ при действии всевозможных операторов класса $\mathfrak{S}_p$ из пары $\{F_0, F_1\}$ в пару $\{H_0, H_1\}$ совпадает с пространством $(H_0, H_1)_{\theta,p}$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно показать, что если $T\in\mathfrak{S}_p(F_0\to H_0)$ и $T\in\mathfrak{S}_p(F_1\to H_1)$, то T: $(F_0, F_1)_{\theta,\infty}\to(H_0, H_1)_{\theta,p}$.

Покажем сначала, что если $T^*\in\mathfrak{S}_p(H_0^*\to F_0^*)$ и $T^*\in\mathfrak{S}_p(F_1^*\to H_1^*)$, то T^*: $(H_0^*, H_1^*)_{1-\theta,q}\to(F_0^*, F_1^*)_{1-\theta,1}$, где $1/p+1/q=1$.

Пусть $y\in(H_0^*, H_1^*)_{1-\theta,q}$, тогда по теореме 1 найдется оператор $S\in\in\mathfrak{S}_q(F_0\to H_0^*)$ и $S\in\mathfrak{S}_q(F_1\to H_1^*)$ такой, что $Sa_{1-\theta}=y$. Тогда $T^*y=T^*Sa_{1-\theta}$, где T^*S — ядерный оператор, так как $T^*\in\mathfrak{S}_p$, а $S\in\mathfrak{S}_q$. По следствию 3 получаем, что $T^*y=T^*Sa_{1-\theta}\in(F_0^*, F_1^*)_{1-\theta,1}$. Итак, T^*: $(H_0^*, H_1^*)_{1-\theta,q}\to\to(F_0^*, F_1^*)_{1-\theta,1}$, поэтому T: $(F_0, F_1)_{\theta,\infty}\to(H_0, H_1)_{\theta,p}$.

Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть* $\{H_0', H_1'\}$ *и* $\{H_0, H_1\}$ — *произвольные пары гильбертовых пространств. Если оператор* $T\in\mathfrak{S}_p(H_0'\to H_0)$ *и* $T\in\mathfrak{S}_p(H_1'\to H_1)$, *то* T: $(H_0', H_1^1)_{\theta,r}\to(H_0, H_1)_{\theta,s}$, *где* $1/s\leqslant1/r+1/p$.

Доказательство. Пусть $y\in(H_0', H_1')_{\theta,r}$, тогда по теореме 4 найдется оператор S такой, что $S\in\mathfrak{S}_r(F_0\to H_0')\cap\mathfrak{S}_r(F_1\to H_1')$ и $Sa_\theta=y$. Тогда $Ty=TSa_\theta$ и оператор $TS\in\mathfrak{S}_s$ для любого s, $1/s\leqslant1/r+1/p$ (см. ([4])), поэтому по теореме 4 $Ty=TSa_\theta\in(H_0, H_1)_{\theta,s}$.

Теорема доказана.

Следует заметить, что аналога теоремы 3, вообще говоря, нет для произвольных пар банаховых пространств. Так, например, если оператор T ядерный из пары $\{X_0, X_1\}$ в пару гильбертовых пространств $\{H_0, H_1\}$, то T: $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}\to(H_0, H_1)_{\theta,2}$ (это легко показать, развивая использованную в этой заметке технику), причем в случае пары $\{X_0, X_1\}=\{l_1, l_1(2^i)\}$ этот результат оказывается точным. Аналогично, если оператор T ядерный из пары $\{H_0, H_1\}$ в произвольную пару банаховых пространств, то T: $(H_0, H_1)_{\theta,\infty}\to(X_0, X_1)_{\theta,2}$ и этот результат в случае пары $\{X_0, X_1\}==\{l_\infty, l_\infty(2^i)\}$ не уточняется.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
10 V 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. Bergh, J. Löfström,* Interpolation Spaces, An Introduction, Berlin, 1976. [2] *В. И. Овчинников,* Функциональн. анализ и его прилож., т. 10, в. 4, 45 (1976). [3] *А. Пич,* Ядерные локально выпуклые пространства, М., «Мир», 1967. [4] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн,* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.