



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Sh. Yarmukhamedov, On harmonic continuation of differentiable functions defined on a part of the boundary,
Sibirsk. Mat. Zh., 2002, Volume 43, Number 1, 228–239

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1281>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 21, 2025, 01:09:53



О ГАРМОНИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ,
ЗАДАННЫХ НА КУСКЕ ГРАНИЦЫ

Ш. Ярмухамедов

Аннотация: Устанавливается явная формула восстановления гармонической функции в области по ее известным значениям и известным значениям ее нормальной производной на части границы, т. е. приводится в явном виде решение задачи Коши для уравнения Лапласа. Библиогр. 14.

Введение

Пусть D — односвязная ограниченная область в комплексной плоскости z с границей ∂D , состоящей из отрезка $[A, B]$ действительной оси и гладкой дуги S кривой, лежащей в верхней замкнутой полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, $\partial D = \{z : A \leq z \leq B\} \cup S$. Обозначим через S_0 внутренние точки дуги S , $S_0 = S/\{A, B\}$. Пусть $f(z) \in C(S_0)$,

$$\int_S |f(\zeta)| |d\zeta| < \infty.$$

При $\sigma \geq 0$ введем обозначения:

$$I_\sigma(f) = \int_S f(\zeta) e^{-i\sigma\zeta} d\zeta, \quad 2\pi i f_\sigma(z) = \int_S e^{-i\sigma(\zeta-z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta,$$

$$2\pi i f_0(z) = \int_S \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta-z}, \quad z \notin S,$$

где функция $f_\sigma(z)$ дифференцируема по параметру σ ($\sigma \geq 0$) при каждом фиксированном $z \notin S$ и имеет место формула

$$2\pi i \frac{df_\sigma(z)}{d\sigma} = -i \int_S e^{-i\sigma(\zeta-z)} f(\zeta) d\zeta = -ie^{i\sigma z} I_\sigma(f).$$

В этих условиях В. А. Фок и Ф. М. Куни [1] установили следующий интересный результат.

Для существования функции $F(z)$, голоморфной в D и такой, что $F(z) = f(z)$, $z \in S_0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \sigma^{-1} \ln |I_\sigma(f)| = 0.$$

Если это условие выполнено, то аналитическое продолжение в область D осуществляется формулой

$$2\pi i F(z) = 2\pi i \lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_\sigma(z) \equiv \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S f(\zeta) e^{-i(\zeta-z)\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z \in D, \quad (1)$$

которую можно преобразовать в такую:

$$2\pi i F(z) = \int_S \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta-z} - i \int_0^\infty e^{i\sigma z} I_\sigma(f) d\sigma, \quad z \in D. \quad (2)$$

Эквивалентность формул продолжения (1) и (2) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} f_\sigma(z) = \int_0^\infty \frac{df_\sigma(z)}{d\sigma} d\sigma + f_0(z), \quad (3)$$

где существование предела слева влечет за собой сходимость несобственного интеграла справа.

Формула восстановления голоморфной в области функции по ее заданным значениям на куске границы была получена впервые Т. Карлеманом еще в 1926 г. [2]. Далеко идущие обобщения формулы Карлемана получили Г. М. Голузин и В. И. Крылов [3]. Они впервые заметили эквивалентность формул (1) и (2). Различные одномерные и многомерные обобщения формулы Карлемана приведены в [4].

Проследим бегло основную идею доказательства теоремы Фока — Куни [1]. Подынтегральная функция в (1) состоит из произведения двух функций. Первый множитель — это $f(\zeta)$, а второй, как легко видеть, представляет собой регулярную функцию, кроме точки $\zeta = z$, в которой она имеет простой полюс с вычетом, равным единице, стремящуюся к нулю при $\sigma \rightarrow \infty$, когда $\text{Im } \zeta = 0$, $\text{Im } z > 0$. Функция с указанными свойствами согласно М. М. Лаврентьеву [5], называется функцией Карлемана для рассматриваемой области D и части S . Теперь формула (1) немедленно следует из интегральной формулы Коши. Отсюда в силу (3) получаем формулу (2) и вместе с ней необходимость условия теоремы. С другой стороны, второе слагаемое в правой части (2) изображает регулярную функцию в полуплоскости $\text{Im } z > 0$, а первое слагаемое как интеграл типа Коши — различные аналитические функции в D и в $\{\text{Im } z > 0\}/D \cup \partial D$ соответственно, поэтому $F(z)$ распадается на две регулярные функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ соответственно. Из (2) видно, что $F^-(z) = 0$, когда $\text{Im } z > \sup \text{Im } \zeta$, $\zeta \in \overline{D}$. Это вытекает из того, что повторные интегралы перестановочны и имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\sigma z} I_\sigma(f) d\sigma &= \int_0^\infty e^{i\sigma z} \left[\int_S e^{-i\sigma \zeta} f(\zeta) d\sigma \right] d\zeta \\ &= \int_S f(\zeta) \left[\int_0^\infty e^{-i\sigma(\zeta-z)} d\sigma \right] d\zeta = -i \int_S \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta-z}. \end{aligned}$$

Теперь полное доказательство формулы (1) следует из теоремы единственности и формулы скачка для граничных значений интеграла типа Коши, а также из теоремы о продолжимости $F^+(z)$ на S_0 как функции класса $C(D \cup S_0)$ [4].

Здесь приводим аналогичный результат для гармонических функций многих переменных. Доказанные формулы продолжения основаны на постановке М. М. Лаврентьева конструкции многомерной функции Карлемана [6]. Введем обозначения: \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, — m -мерное вещественное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $x' = (0, x_2, \dots, x_m)$, $y' = (0, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\alpha^2 = |y' - x'|^2$, $r^2 = \alpha^2 + (y_1 - x_1)^2$, $s = \alpha^2$, $R_+^m = \{y = (y_1, y') : y' \in \mathbb{R}^{m-1}, y_1 > 0\}$; D — односвязная ограниченная область с границей, состоящей из компактной части гиперплоскости $y_1 = 0$ (при $m = 2$ — отрезок $a_1 \leq y \leq b$) и гладкого куска поверхности S (гладкой дуги кривой, когда $m = 2$), лежащей в полупространстве $y_1 \geq 0$; $\bar{D} = D \cup \partial D$; S_0 — внутренние точки S , т. е. поверхность S без края; ω_m — площадь единичной сферы в \mathbb{R}^m , $C_2 = -2\pi$, $C_3 = 2\pi^{-1}\omega_3$,

$$C_m = \begin{cases} (-1)^{n-1}(m-2)(n-2)!\omega_m, & m = 2n, \\ (-1)^n 2^{-n}(2n-3)!!(m-2)\pi\omega_m, & m = 2n+1, \end{cases} \quad n \geq 2;$$

$H(D)$ обозначает совокупность вещественных функций $U(y)$ класса $C^2(D)$, гармонических в D .

В § 1 приводится конструкция фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра и исчезающего в пределе вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на той части границы, где $y_1 = 0$. Выписывается в явном виде функция Карлемана для области D . Для гармонической функции устанавливается справедливость классической формулы Грина, в которой в качестве фундаментального решения присутствует построенная функция Карлемана. Из полученной формулы легко выводятся многомерный аналог формулы Карлемана и удобный критерий разрешимости задачи Коши для уравнения Лапласа. Эти результаты изложены в § 2.

§ 1. Функция Карлемана

Функцию $\Phi_\sigma(y-x)$ при $\alpha > 0$, $\sigma \geq 0$ определим следующими равенствами. Если $m = 2$, то

$$C_2\Phi_\sigma(y-x) = 4a^2 \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w}}{w(w-2a)^2} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_1 - x_1, \quad (4)$$

где $a = \max_{y \in \bar{D}} y_1$, $0 \leq y_1 \leq a$. Если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$C_m\Phi_\sigma(y-x) = \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w}}{\alpha w} \right], \quad w = i\alpha + y_1 - x_1. \quad (5)$$

Если $m = 2n+1$, $n \geq 1$, то

$$C_m\Phi_\sigma(y-x) = \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{\sigma w}}{w} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_1 - x_1. \quad (6)$$

При $\sigma = 0$ интегралы в (4) и (6) вычисляются и для $\Phi_0(y-x)$ получаем

$$\Phi_0(y-x) = \begin{cases} (m-2)^{-1}\omega_m^{-1}r^{-m+2}, & m \geq 3, \\ (2\pi)^{-1} \ln \frac{1}{r} + (2\pi)^{-1} \ln \frac{1}{r_1} - \frac{8a^2}{\pi} \frac{y_1 - x_1 - 2a}{r_1^2}, & m = 2, \end{cases} \quad (7)$$

где $r_1^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_1 - x_1 - 2a)^2$. Обозначим

$$e^{\sigma x_1} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma}(y - x) = F_\sigma(y, x). \quad (8)$$

Тогда из (4)–(6) для $F_\sigma(y, x)$ находим

$$C_2 F_\sigma(y, x) = 4a^2 e^{\sigma y_1} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{i\sigma \sqrt{u^2 + a^2}}}{(w - 2a)^2} \right] \frac{u \, du}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \quad m = 2,$$

$$C_m F_\sigma(y, x) = e^{\sigma y_1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[\frac{\sin \sigma \alpha}{\alpha} \right], \quad m = 2n, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{2}{\pi} C_m F_\sigma(y, x) = e^{\sigma y_1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} J_0(\sigma \alpha), \quad m = 2n + 1, \quad n \geq 1,$$

где $J_0(\alpha)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Основная лемма. Функция $\Phi_\sigma(y - x)$, определенная при $\sigma \geq 0$, $\alpha > 0$ равенствами (4)–(6), представима в виде

$$\Phi_\sigma(y - x) = \varphi(r) + G_\sigma(y - x), \quad \varphi(r) = \Phi_0(y - x), \quad m \geq 3, \quad \varphi(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad m = 2, \quad (9)$$

где функция $G_\sigma(y - x)$ определена и гармонична в \mathbb{R}^m , включая точку $y = x$, когда $m \geq 3$. Если $m = 2$, то представление справедливо в замкнутой области $\overline{D} \ni y$ для любого $x \in \mathbb{R}_+^m$, где $G_\sigma(y - x)$ гармонична в D , включая точку $y = x$. При этом функция $G_\sigma(y - x)$ гармонична по $x \in R_+^m$, когда $y \in \overline{D}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем положить $x = 0$, $s = \alpha^2 = y_2^2 + \dots + y_m^2$. Из (4)–(6) видим, что $\Phi_\sigma(y) = f(y, s)$ зависит от координат y_1, s точки (y_1, s) .

Сначала докажем два предложения.

Предложение 1. Уравнение Лапласа в координатах y_1, s точки (y_1, s) имеет вид

$$4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 2(m - 1) \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0. \quad (10)$$

Действительно, пусть $U(y) = f(y, s)$ — решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{dy_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 U}{dy_m^2} = 0.$$

Вычислим вторые производные:

$$\frac{\partial U}{\partial y_k} = \frac{df}{ds} \frac{ds}{dy_k} = \frac{df}{ds} 2y_k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_k^2} = \frac{d^2 f}{ds^2} 4y_k^2 + 2 \frac{df}{ds}, \quad k = 2, \dots, m, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} = \frac{d^2 f}{dy_1^2},$$

и сложим, тогда получим (10).

Предложение 2. Решения уравнения Лапласа $f(y, s) \equiv f_m(y_1, s)$, где $s = y_2^2 + \dots + y_m^2$ и нижний индекс указывает на число независимых переменных, определенные равенствами (4)–(6), с числом переменных m и $m + 2$ связаны соотношением

$$\frac{df_m}{ds} = \frac{C_{m+2} f_{m+2}}{C_m}, \quad s = y_2^2 + \dots + y_{m+2}^2. \quad (11)$$

Действительно, продифференцируем по s равенства (5) и (6). Тогда в правых частях n заменится на $n + 1$, при этом m заменится на $m + 2$, поскольку $m = (n + 1)2 + 1 = 2n + 1 + 2$, $m = 2(n + 1) = 2n + 2$. Поэтому правая часть полученного равенства будет равна $C_{m+2}f_{m+2}$; приходим к равенству (11). Покажем, что если $f = f_{m+2}$, то $s = y_2^2 + \dots + y_{m+2}^2$ также является решением уравнения (10) с числом переменных $m + 2$. С этой целью продифференцируем (10) по s . Тогда

$$4 \frac{d^2 f}{ds^2} + 4s \frac{d^3 f}{ds^3} + 2(m-1) \frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{d}{ds} \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0, \quad f = f_m.$$

Заменим $\frac{df}{ds}$ из соотношения (11). Тогда

$$4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 2(m+1) \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0, \quad f = f_{m+2}, \quad s = y_2^2 + \dots + y_{m+2}^2,$$

где $\frac{d}{ds} \frac{d^2 f}{dy_1^2} = \frac{d^2 f}{dy_1^2} \frac{df}{ds}$ и равенство смешанных производных очевидно. Утверждение доказано.

Продолжим доказательство основной леммы. Пусть $m = 2n + 1$, $n \geq 1$. Сначала докажем лемму на случай, когда $m = 3$, $s = y_2^2 + y_3^2$. Напишем уравнение (10) для $m = 3$:

$$L(f) = 4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 4 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0. \quad (12)$$

Покажем, что функция

$$f = \int_0^\infty \varphi(w) \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad \varphi(w) = \frac{\exp(\sigma w)}{w}, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1,$$

при $s > 0$ является решением уравнения (12). Тогда функция

$$C_3 \Phi_\sigma(y) = \int_0^\infty \operatorname{Im}[\varphi(w)] \frac{du}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}}, \quad s > 0, \quad \sigma \geq 0,$$

также будет решением уравнения (12).

Дифференцированием получаем

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} &= \int_0^\infty \left\{ \frac{i\varphi'}{2(u^2 + s)} - \frac{\varphi}{2(u^2 + s)\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right\} du, \\ \frac{d^2 f}{ds^2} &= \int_0^\infty \left[-\frac{\varphi''}{4(u^2 + s)^{3/2}} - \frac{\varphi'i}{2(u^2 + s)} - \frac{\varphi'i}{4(u^2 + s)} + \frac{3\varphi}{4(u^2 + s)\sqrt{u^2 + s}} \right] du. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 4s \frac{d^2 f}{ds^2} &= \int_0^\infty \left[\frac{-s\varphi''}{(u^2 + s)^{3/2}} - \frac{3is\varphi'}{(u^2 + s)^2} + \frac{3s\varphi}{(u^2 + s)^{5/2}} \right] ds, \\ 4 \frac{df}{ds} &= 2 \int_0^\infty \left[\frac{\varphi'}{u^2 + s} - \frac{\varphi}{(u^2 + s)^{3/2}} \right] du, \quad \frac{d^2 f}{dy_1^2} = \int_0^\infty \frac{\varphi'' du}{(u^2 + s)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Сложим полученные равенства:

$$L(f) = \int_0^\infty \frac{u^2 \varphi'' du}{(u^2 + s)^{3/2}} + \int_0^\infty \frac{(2u^2 - s)i}{(u^2 + s)^2} \varphi' du + \int_0^\infty \frac{s - 2u^2}{(u^2 + s)^{5/2}} \varphi du.$$

Так как

$$-i d\varphi' = \frac{u\varphi'' dy}{\sqrt{u^2 + s}},$$

интегрируя по частям первый интеграл, видим, что он равен

$$\int_0^\infty i \left(\frac{u}{u^2 + s} \right)' \varphi' dy = \int_0^\infty \frac{i\varphi' dy}{(u^2 + s)} - \int_0^\infty \frac{2iu^2}{(u^2 + s)^2} \varphi' du.$$

Объединим интегралы, содержащие φ' , с учетом соотношений

$$\frac{2u^2 - s}{(u^2 + s)^2} - \frac{2u^2}{(u^2 + s)^2} + \frac{1}{u^2 + s} = \frac{2u^2 - s - 2u^2 + u^2 + s}{(u^2 + s)^2} = \frac{u^2}{(u^2 + s)^2}.$$

Тогда

$$L(f) = \int_0^\infty \varphi \frac{s - 2u^2}{(u^2 + s)^{5/2}} du + \int_0^\infty \frac{i u^2 \varphi' du}{(u^2 + s)^2}.$$

Интегрируя по частям второй интеграл, убеждаемся, что он равен первому с обратным знаком, так что $L(f) = 0$. Гармоничность функции f доказана.

Теперь для разности $\Phi_\sigma(y) - \Phi_0(y) = G_\sigma(y_1, s)$ имеем

$$G_\sigma(y_1, s) = -2\pi^{-1}\omega_3^{-1} \int_0^\infty \text{Im}[\varphi(w)] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}} - \frac{1}{\omega_3 r}.$$

Так как

$$\int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{1}{w} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}} = -\frac{\pi}{2r}, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1,$$

то

$$\begin{aligned} G_\sigma(y_1, s) &= -\frac{2}{\pi\omega_3} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{\varphi_1(w) - 1}{w} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}} \\ &= -\frac{2}{\pi\omega_3} \left(\int_0^1 + \int_1^\infty \right) \text{Im} \left[\frac{\varphi_1(w) - 1}{w} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}}, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_1(w) = e^{\sigma w}, \quad w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1, \quad \varphi_1(0) = 1.$$

Поскольку функция $K_1(w) = \frac{\varphi_1(w) - 1}{w}$ целая и вещественная при вещественном w , имеет место разложение

$$\text{Im} K_1(w) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} K_1^{2k+1}(y_1) (\sqrt{u^2 + s})^{2k+1}. \quad (13)$$

Отсюда заключаем, что первый интеграл является функцией точки (y_1, s) и принадлежит классу C^∞ по переменным y_1, y_2, y_3 . Этим свойством обладает и

второй интеграл. Представление (9) и вместе с ним лемма доказаны для $m = 3$ (на прямую $y_2 = y_3 = 0$ функция $G_\sigma(y_1, S)$ гармонически продолжается). Из последнего представления имеем

$$\int_0^\infty \operatorname{Im}[\varphi(w)] \frac{du}{\sqrt{u^2 + s}} = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{r} + \omega_3 G_\sigma(y_1, s) \right).$$

Продифференцируем обе части этого равенства $n - 1$ раз по s . Тогда из формулы (6) получаем

$$\Phi_\sigma(y) = -\frac{\pi}{2} C_m^{-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \frac{1}{r} - \frac{\pi}{2} C_m^{-1} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} G_\sigma(y_1, s).$$

Первое слагаемое является фундаментальным решением уравнения Лапласа и равно $(m - 2)^{-1} w_m^{-1} r^{2-m}$. Второе слагаемое согласно предложению 2 представляет собой регулярную гармоническую функцию в \mathbb{R}^m , которую обозначим через $G_\sigma(y)$. Лемма доказана при $m = 2n + 1$, $n \geq 1$. Пусть $m = 2n$, $n \geq 2$. Рассмотрим сначала случай $n = 2$, $m = 4$. Тогда из (5) получаем

$$C_4 \Phi_\sigma(y) = \operatorname{Im} \frac{\varphi(w)}{\sqrt{s}}, \quad \varphi(w) = \frac{e^{\sigma w}}{w}, \quad w = i\sqrt{s} + y, \quad s = y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = \alpha^2.$$

Покажем, что функция $f(w) = \frac{\varphi(w)}{\sqrt{s}}$ гармонична при $s > 0$. Запишем уравнение (10) при $m = 4$:

$$L(f) = 4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 6 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0.$$

Последовательно дифференцируя, получаем

$$\frac{df}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{s\sqrt{s}} + \frac{i\varphi'}{2s}, \quad s \frac{df}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\varphi}{\sqrt{s}} + \frac{i\varphi'}{2}; \quad \frac{df}{ds} + s \frac{d^2 f}{ds^2} = \frac{1}{4} \frac{\varphi}{s\sqrt{s}} - \frac{i\varphi'}{4s} - \frac{\varphi''}{4\sqrt{s}};$$

$$L(f) = 4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 6 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{\varphi}{s\sqrt{s}} - \frac{i\varphi'}{s} - \frac{\varphi''}{\sqrt{s}} + 2 \frac{df}{ds} + \frac{\varphi''}{\sqrt{s}} = 0.$$

Далее, имеем

$$C_4 \Phi_\sigma(y) = \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(0)}{w\sqrt{s}} \right] + \operatorname{Im} \frac{\varphi_1(0)}{w\sqrt{s}}, \quad \varphi_1(w) = e^{\sigma w}. \quad (14)$$

Второе слагаемое в правой части равно $-r^{-2}$ и является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Первое слагаемое, которое обозначим через $G_\sigma(y) = G_\sigma(y_1, s)$, согласно разложению (13), где $u = 0$, представляет собой целую гармоническую функцию в \mathbb{R}^m (функция $G_\sigma(y)$ на множество $y_2 = y_3 = y_4 = 0$ гармонически продолжается). Лемма доказана для $m = 4$. Далее, из (14) имеем

$$\operatorname{Im} \frac{\varphi_1(w)}{\sqrt{sw}} = -r^{-2} + G_\sigma(y_1, s).$$

В этом равенстве вычислим частные производные по s порядка $n - 2$. Правая часть полученного равенства согласно (5) равна $C_m \Phi(y)$, где $s = y_2^2 + \dots + y_m^2$. Из предложения 2 заключаем, что функция

$$C_m^{-1} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} G_\sigma(y_1, s), \quad s = y_2^2 + \dots + y_m^2,$$

является целой гармонической функцией. Теперь из равенства

$$C_m^{-1} \frac{d^{n-2}}{ds^{n-2}} r^{-2} = (m-2)^{-1} \omega_m^{-1} r^{-2+m}$$

следует утверждение леммы, когда $m = 2n, n \geq 2$. Наконец, рассмотрим случай $m = 2$. Обозначим

$$f(y) = \int_0^\infty \varphi(w) \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}}, \quad \varphi(w) = \frac{\varphi_1(w)}{w}, \quad \varphi_1(w) = \frac{e^{\sigma w}}{(w-2a)^2},$$

$\sigma \geq 0, 0 \leq y_1 \leq a_1, \varphi_1(0) = (2a)^{-2}, w = i\sqrt{u^2 + s} + y_1$.

Достаточно доказать гармоничность $f(y)$ в \overline{D} при $s > 0$. Уравнение (10) при $m = 2$ имеет вид

$$4s \frac{d^2 f}{ds^2} + 2 \frac{df}{ds} + \frac{d^2 f}{dy_1^2} = 0.$$

Так как $\frac{d}{ds} \sqrt{u^2 + s} = \frac{d}{du^2} \sqrt{u^2 + s}$, дифференцированием получаем

$$2 \frac{df}{ds} = \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left(\frac{\varphi(w)}{\sqrt{u^2 + s}} \right) du^2 = -\frac{\varphi(w_1)}{\sqrt{s}}, \quad 4s \frac{d^2 f}{ds^2} = -i\varphi'(w_1) + \frac{\varphi(w_1)}{\sqrt{s}},$$

$$\frac{d^2 f}{dy_1^2} = \int_0^\infty \varphi''(w) \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}} = i\varphi'(w_1), \quad w_1 = i\sqrt{s} + y_1.$$

Складывая полученные равенства, убедимся, что $L(f) = 0, s > 0$. Рассмотрим разность $\Phi_\sigma(y) - (2\pi)^{-1} \ln \frac{1}{r} = G_\sigma(y_1, s)$, где

$$\begin{aligned} 2\pi G_\sigma(y_1, S) &= -(\varphi_1(0))^{-1} \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi_1(w)}{w} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}} - \ln \frac{1}{r} \\ &= -(\varphi_1(0))^{-1} \int_1^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi_1(w)}{w} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}} - \ln \frac{1}{r} - (\varphi_1(0))^{-1} \int_0^1 \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi_1(0)}{w} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}} \\ &\quad - (\varphi_1(0))^{-1} \int_0^1 \operatorname{Im} \left[\frac{\varphi_1(w) - \varphi_1(0)}{w} \right] \frac{u du}{\sqrt{u^2 + s}}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части — функция класса C^∞ при $0 \leq y_1 \leq a$, второе и третье слагаемые в сумме равны $2^{-1} \ln(1+r^2)$ и являются функциями класса $C^\infty(\overline{D})$. Из разложения (13) видим, что четвертое слагаемое также функция класса $C^\infty(\overline{D})$. Обозначим $2\pi G_\sigma(y_1, s) = G_\sigma(y)$. Тогда получим представление (9), где $G_\sigma(y)$ гармонична в \overline{D} при $s > 0$. Из $G_\sigma(y) \in C^\infty(\overline{D})$ следует, что она гармонична всюду в \overline{D} . Основная лемма доказана.

Из основной леммы и равенства (8) видим, что функция

$$\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x) = e^{-\sigma x_1} F_\sigma(y, x) \tag{15}$$

является регулярной гармонической функцией в \mathbb{R}^m при $m \geq 3$. Если $m = 2$, то она гармонична в $\overline{D} \ni y$ ($x_1 \geq 0$). Из представления (9) следует формула Грина. Пусть $U(y) \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$. Тогда для любого $x \in D$ справедлива формула

$$U(x) = \int_{\partial D} \left[\Phi_\sigma(y-x) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}(y-x) \right] ds_y. \quad (16)$$

Если $x \in \mathbb{R}^m / \overline{D}$, то интеграл справа равен нулю. Здесь n — направление внешней нормали на ∂D .

§ 2. Многомерная формула Карлемана

Пусть $f(y), g(y) \in L(S)$. Введем обозначения:

$$U_\sigma(x) = \int_S \left[g(y) \Phi_\sigma(y-x) - f(y) \frac{d\Phi_\sigma}{dn}(y-x) \right] ds_y, \quad (17)$$

$$U_0(x) = U_\sigma(x)|_{\sigma=0} = \int_S \left[g(y) \Phi_0(y-x) - f(y) \frac{d\Phi_0}{dn}(y-x) \right] ds_y, \quad x \notin S$$

$$I(\sigma, x) = \int_S \left[g(y) F_\sigma(y, x) - f(y) \frac{dF_\sigma}{dn}(y, x) \right] ds_y, \quad (18)$$

где $\Phi_\sigma(y-x)$, $\Phi_0(y-x)$, $F_\sigma(y, x)$ определяются из (4)–(8) соответственно. Из (15) заключаем, что функция $U_\sigma(x)$ дифференцируема по параметру σ ($\sigma \geq 0$) и при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}_+^m / S$ справедлива формула

$$\frac{dU_\sigma(x)}{d\sigma} = e^{-\sigma x_1} I(\sigma, x),$$

при этом функция $e^{-\sigma x_1} I(\sigma, x)$ гармонична в \mathbb{R}_+^m при каждом фиксированном $\sigma \geq 0$.

Согласно формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma x_1} I_\sigma(\sigma, x) d\sigma + U_0(x) \quad (19)$$

при условии, что предел слева существует и конечен при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}_+^m / S$.

Теорема 1. Пусть $U(y) \in H(D) \cap C^1(\overline{D})$ и $U(y) = f(y)$, $\frac{\partial U}{\partial n}(y) = g(y)$, $y \in S$, где $f(y)$, $g(y)$ — заданные функции класса $C(S)$. Тогда для любого $x \in D$ справедлива формула Карлемана

$$U(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} U_\sigma(x) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \int_S \left[g(y) \Phi_\sigma(y-x) - f(y) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}(y-x) \right] ds_y, \quad (20)$$

которую можно преобразовать так:

$$U(x) = \int_0^\infty e^{-\sigma x_1} I(\sigma, x) d\sigma + \int_S \left[g(y) \Phi_0(y-x) - f(y) \frac{\partial \Phi_0}{\partial n}(y-x) \right] ds_y. \quad (21)$$

Теорема 2. Пусть $S \subset C^2$, $f(y) \in C^1(S_0) \cap L(S)$, $g(y) \in C(S_0) \cap L(S)$. Для существования функции $U(y) \in H(D) \cap C^1(D \cup S_0)$ такой, что

$$U(y) = f(y), \quad \frac{dU}{dn}(y) = g(y), \quad y \in S_0, \quad (22)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |I(\sigma, x)|}{\sigma} = 0 \quad (23)$$

для каждой точки $x \in \mathbb{R}_+^m$, при этом (23) выполняется равномерно на компактах из \mathbb{R}_+^m . Если условие (23) выполнено, то гармоническое продолжение осуществляется формулами (20) и (21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из (4)–(6) следуют очевидные неравенства, которые запишем в виде леммы.

Лемма. Если $m \geq 3$, $\sigma \geq 1$, то

$$|\Phi_\sigma| + \left| \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma \right| \leq \text{const} \cdot \sigma^n e^{\sigma(y_1 - x_1)} \left(\frac{\sigma}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m-2}} \right), \quad r > 0,$$

$$\left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \sigma} \right| + \left| \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma \right| \leq \text{const} \cdot \sigma^{n+1} e^{\sigma(y_1 - x_1)}.$$

Если $m = 2$, $\sigma \geq 1$, $0 \leq y_1 \leq a$, $x_1 > 0$, то

$$|\Phi_\sigma| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial y_k} \right| \leq \text{const} \cdot \sigma e^{\sigma(y_1 - x_1)} \left(\ln \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right), \quad r > 0,$$

$$\left| \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma} \right| + \left| \frac{d}{d\sigma} \frac{\partial}{\partial y_k} \Phi_\sigma \right| \leq \text{const} \cdot \sigma e^{\sigma(y_1 - x_1)}.$$

Здесь постоянные не зависят от σ , x , y .

Из леммы видно, что в формуле (16) интеграл по части $\partial D|S$, где $y_1 = 0$, стремится к нулю, когда $\sigma \rightarrow \infty$ и $x_1 > 0$; стремление будет равномерным на компактах из \mathbb{R}_+^m . Отсюда следует формула (20). Эквивалентность формул продолжения (20) и (21) вытекает из (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть функция $U(y) \in H(D) \cap C^1(D \cup S_0)$ удовлетворяет на S_0 условиям (22), где $f(y), g(y) \in L(S)$, и пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Обозначим

$$S_\varepsilon = \{y : y \in \mathbb{R}_+^m, y_1 = \varepsilon\} \cap D, \quad S_\varepsilon^+ = S \cap \{y : y \in \mathbb{R}_+^m, y_1 \geq \varepsilon\}.$$

Так как $F_\sigma(y, x)$ гармонична в $\mathbb{R}_+^m \cup \{y_1 = 0\}$, $\sigma \geq 0$, $m \geq 3$, и в \bar{D} при $m = 2$ ($x_1 > 0$), то согласно формуле Грина, применяемой в области с границей $S_\varepsilon \cup S_\varepsilon^+$, получаем

$$\int_{S_\varepsilon^+} \left[g(y) F_\sigma(y, x) - f(y) \frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y, x) \right] ds_y = \int_{S_\varepsilon} \left[g(y) F_\sigma(y, x) - f(y) \frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y, x) \right] ds_y,$$

где направления нормалей к S_ε и S_ε^+ согласованы. Используя это равенство, для $I(\sigma, x)$, имеем

$$I(\sigma, x) = \int_{S/S_\varepsilon^+} \left[g(y) F_\sigma(y, x) - f(y) \frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y, x) \right] ds_y$$

$$+ \int_{S_\varepsilon} \left[g(y) F_\sigma(y, x) - f(y) \frac{\partial F_\sigma}{\partial n}(y, x) \right] ds_y.$$

Оценим интегралы. В первом интеграле $y_1 \leq \varepsilon$, а во втором $y_1 = \varepsilon$. Используем оценки для

$$\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x) = e^{-\sigma x_1} F_\sigma(y, x).$$

Из леммы с учетом того, что $f(y), g(y) \in L(S)$, получаем

$$|I(\sigma, x)| \leq C_\varepsilon \sigma^{n+1} e^{\varepsilon\sigma}, \quad \sigma \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}_+^m,$$

где $m = 2n$ при четном $m \geq 2$; $m = 2n+1$, когда m нечетно, $m \geq 3$, и постоянная C_ε не зависит от σ . Так как $\varepsilon > 0$ любое, отсюда следует (23) ($x_1 > 0$).

Достаточность. Определим функцию $U(x)$ формулой (21), эквивалентной (20). Из (23) заключаем, что первое слагаемое в правой части (21) представляет собой гармоническую функцию в полупространстве $x_1 > 0$ как предел равномерно сходящейся последовательности гармонических функций

$$U_n(x) = \int_0^n e^{-\sigma x_m} I(\sigma x) d\sigma.$$

Второе слагаемое представляет собой разность потенциалов простого и двойного слоев и является гармонической функцией в D и в $D_1 = \mathbb{R}_+^m / \bar{D}$. Поэтому правая часть в (21) определяет в D и D_1 две различные гармонические функции $U^+(x)$ и $U^-(x)$ соответственно. Если x^1, x^2 — две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно точки $x \in S_0$, то

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} [U^+(x^1) - U^-(x^2)] = f(x), \quad \lim_{x_1 \rightarrow x} \left[\frac{\partial U^+}{\partial n}(x^1) - \frac{\partial U^-}{\partial n}(x^2) \right] = g(x),$$

причем предельные соотношения выполняются равномерно относительно x из каждой компактной части S_0 . Из равенства (20), которое эквивалентно (21), видим, что $U^-(x) = 0$, когда $x_1 > \max_{y \in D} y_1$. Согласно теореме единственности $U^-(x) \equiv 0, x \in D_1$. Ясно, что $U^-(x)$ непрерывно дифференцируемо продолжается на $D_1 \cup S_0$. Поэтому $U^+(x)$ также непрерывно дифференцируемо продолжается на $D \cup S_0$. Положим $U^+(x) = f(x), x \in S_0$. Тогда $U^+(x)$ гладко продолжается на $D \cup S_0$ (см. [14, лемма 1.1]).

Тем самым $U^+(x) = f(x), \frac{\partial U^+(x)}{\partial n} = g(x), x \in S_0$, где $U(x) = U^+(x), x \in D \cup S_0$. Теорема 2 доказана.

Посмотрим на формулу (21) с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Она является аналогом классических формул Б. Римана, В. Вольтерра, Ж. Адамара, полученных ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений. Поскольку задача Коши для гиперболических уравнений корректна, в них условие типа (23) отсутствует. Формула (21) дает решение задачи Коши для уравнения Лапласа, где $f(y), g(y)$ удовлетворяют условию (23). Для произвольных непрерывных $f(y), g(y)$ задача Коши для уравнения Лапласа неразрешима. Если S — аналитическая поверхность и $f(y), g(y)$ аналитичны и аналитически продолжаемы в D , то согласно классической теореме Коши — Ковалевской продолжение осуществимо (если отказаться от условия Коши — Ковалевской, то речь может идти о построении решения, существование которого постулируется априори), но, как заметил Ж. Адамар [7], полученное решение неустойчиво. Для построения устойчивого решения необходимо сузить класс рассматриваемых решений [6, 8, 9]. Если вместо $f(y), g(y)$ на S заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y), g_\delta(y)$ с заданным уклонением $\delta > 0$, а

также задано число, характеризующее компакт, которому принадлежит решение, то речь идет о построении регуляризации. Регуляризация решения задачи Коши для уравнения Лапласа впервые была построена М. М. Лаврентьевым в работе [5], ныне ставшей классической. Регуляризация, основанная на постановке М. М. Лаврентьева, в явном виде построена в [10–12]. Полученные здесь формулы продолжения основаны на конструкции функции Карлемана $\Phi_\sigma(y-x)$ в явном виде для рассматриваемой области D . Существование функции Карлемана для произвольной ограниченной односвязной области с гладкой границей вытекает из аппроксимационной теоремы С. Н. Мергеляна [13]. Однако предложенный метод сложный и не позволяет написать функции Карлемана в явном виде. Формула Карлемана, аналогичная (20), когда $\partial D/S$ — шар, получена в [14].

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок Б. А., Куни Ф. М. О введении «гасящей» функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.
2. Carleman T. Les fonctions quasianalytiques. Paris: Gauthier-Villiar, 1926.
3. Голузин Г. М., Крылов В. И. Обобщенная формула Карлемана и ее приложение к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.
4. Айзенберг Л. А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1990.
5. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
6. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
7. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
9. Тихонов А. Н. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 5. С. 195–198.
10. Мухамеджанов А. М., Ярмухамедов Ш., Ярмухамедов Р. Об аналитическом продолжении сечений реакции // Теор. и мат. физика. 1988. Т. 74, № 2. С. 270–280.
11. Ярмухамедов Ш. Аналог формулы Римана - Вольтерра для гармонических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 4. С. 560–564.
12. Ярмухамедов Ш. Задача Коши для уравнения Лапласа в постановке М. М. Лаврентьева // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, 1984. С. 203–209.
13. Мергелян С. Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // Успехи мат. наук. 1956. Т. 1, № 5. С. 3–26.
14. Шлапунов А. А. О задаче Коши для уравнения Лапласа // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 205–215.

Статья поступила 30 ноября 1998 г., окончательный вариант — 18 марта 2001 г.

*Ярмухамедов Шароф
Самаркандский гос. университет им. Навои,
механико-математический факультет, кафедра теории функций,
Университетский бульв., 15, Самарканд 703043, Узбекистан.
iipp@samarkand.uz*