



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Кричевер, О. К. Шейнман, Алгебры операторов Лакса, *Функци. анализ и его прил.*, 2007, том 41, выпуск 4, 46–59

DOI: 10.4213/faa2878

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.192.95.161

7 октября 2024 г., 17:09:00



УДК 917.9

## Алгебры операторов Лакса\*

© 2007. И. М. КРИЧЕВЕР, О. К. ШЕЙМАН

## §1. Введение

Общий подход к операторам Лакса на алгебраических кривых был предложен одним из авторов в [1], где известная теория представлений Лакса и представлений нулевой кривизны с *рациональным спектральным параметром* обобщалась на случай алгебраических кривых  $\Gamma$  произвольного рода  $g$ . Линейное пространство таких операторов, ассоциированное с эффективным дивизором  $D = \sum_k n_k P_k$ ,  $P_k \in \Gamma$ , определялось как пространство мероморфных  $(n \times n)$ -матричных функций на  $\Gamma$ , имеющих полюсы кратности не выше  $n_k$  в точках  $P_k$  и не более чем простые полюсы еще в  $ng$  точках  $\gamma_s$ . Коэффициенты лорановского разложения этих матричных функций в окрестности точки  $\gamma_s$  должны были удовлетворять определенным линейным условиям, параметризованным точкой  $\alpha_s$  проективного пространства (см. формулы (2.1)–(2.3) ниже).

Согласно [12], наборы  $(\gamma_s, \alpha_s)$  общего положения параметризуют стабильные оснащенные голоморфные векторные расслоения  $B$  ранга  $n$  и степени  $ng$  на  $\Gamma$ . В [1] отмечалось, что условия на вид оператора Лакса в точках  $\gamma_s$  означают, что эти операторы можно рассматривать как мероморфные сечения расслоения  $\text{End}(B)$  с дивизором полюсов  $D$ . Простым следствием этого замечания является то, что операторы Лакса, имеющие полюсы произвольного порядка в точках  $P_k$ , образуют алгебру относительно обычного поточечного умножения.

В простейшем случае двух отмеченных точек,  $D = P_+ + P_-$ , это позволяет ввести в алгебре соответствующих операторов почти градуированную структуру, обобщающую градуированную структуру классической аффинной алгебры  $\widehat{\mathfrak{gl}(n)}$ . Напомним, что алгебра Ли  $\mathcal{V}$  называется *почти градуированной*, если  $\mathcal{V} = \bigoplus \mathcal{V}_i$ , где  $\dim \mathcal{V}_i < \infty$  и  $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] \subseteq \bigoplus_{k=i+j-k_0}^{k=i+j+k_1} \mathcal{V}_k$ , причем  $k_0$  и  $k_1$  не зависят от  $i, j$ .

Общее понятие почти градуированных алгебр и модулей над ними было введено в работах [3]–[5], где были введены обобщения алгебр Гейзенберга и Вирасоро. В ряде работ, обзор которых дан в [11], исследовались почти градуированные аналоги классических аффинных алгебр Ли, названные алгебрами токов Кричевера–Новикова (КН). Алгебру операторов Лакса, имеющих полюсы в двух точках, естественно рассматривать как обобщение  $\mathfrak{gl}(n)$ -алгебры КН.

Центральное расширение алгебры  $\mathcal{V}$  называется *локальным*, если оно само представляет собой почти градуированную алгебру Ли. Локальные централь-

\*Работа первого автора частично поддержана грантом DMS-04-05519 Национального научного фонда США; работа второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 05-01-00170) и программой РАН «Математические методы в нелинейной динамике».

ные расширения задаются локальными 2-коциклами. 2-коцикл  $\gamma$  называется локальным, если существует  $K \in \mathbb{Z}$ , такое, что  $\gamma(\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j) = 0$  для  $|i + j| > K$ . Понятие локального коцикла введено в [3]. Там же была высказана гипотеза о его единственности и намечено ее доказательство для алгебр типа Вирасоро; полное доказательство дано в [9], [10]. Условие локальности важно при рассмотрении аналогов представлений старшего веса.

Основной целью настоящей работы является построение ортогональных и симплектических аналогов операторов Лакса. В этих случаях операторы Лакса не образуют ассоциативной алгебры. Они лишь образуют алгебру Ли. Для всех классических алгебр Ли  $\mathfrak{g}$  соответствующие алгебры операторов Лакса можно рассматривать как «подкрученную» версию алгебр токов КН и алгебр петель.

В §2 мы доказываем мультипликативные свойства  $\mathfrak{gl}(n)$ -значных операторов Лакса, вводим  $\mathfrak{g}$ -значные операторы Лакса для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$  и  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$  и доказываем, что они замкнуты относительно поточечного коммутатора.

В §3 мы определяем почти градуированную структуру на алгебрах операторов Лакса и показываем, что  $\dim \mathcal{V}_i = \dim \mathfrak{g}$ , как и для алгебр КН.

В §4 для каждого типа алгебр операторов Лакса мы определяем 2-коцикл и доказываем его локальность.

Авторы благодарят М. Шлихенмайера за плодотворную критику.

## §2. Операторы Лакса и их скобка Ли

**2.1. Операторы Лакса для  $\mathfrak{gl}(n)$  и  $\mathfrak{sl}(n)$ .** Следуя [1], назовем *оператором Лакса* с параметрами Тюринга  $\{\alpha_s, \gamma_s \mid s = 1, \dots, gn\}$  функцию  $L$  на  $\Gamma$  со значениями в  $\mathfrak{gl}(n)$ , голоморфную вне  $P_{\pm}$  и точек  $\{\gamma_s \mid s = 1, \dots, gn\}$  и имеющую в последних не более чем простые полюсы:

$$L = \frac{L_{s,-1}}{z - z_s} + L_{s0} + O(z - z_s), \quad z_s = z(\gamma_s), \quad (2.1)$$

так что

$$(i) \quad L_{s,-1} = \alpha_s \beta_s^t \text{ и}$$

$$\text{tr } L_{s,-1} = \beta_s^t \alpha_s = 0, \quad (2.2)$$

где  $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$  фиксирован,  $\beta_s \in \mathbb{C}^n$  произволен и  $t$  в верхнем индексе обозначает транспонированную матрицу. В частности,  $L_{s,-1}$  имеет ранг 1;

$$(ii) \quad \alpha_s \text{ является собственным вектором матрицы } L_{s0},$$

$$L_{s0} \alpha_s = k_s \alpha_s. \quad (2.3)$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $L'$  и  $L''$  удовлетворяют условиям (2.1)–(2.3). Тогда  $L = L' L''$  также удовлетворяет им.

**Доказательство.** Из формулы (2.1) получаем

$$L = \frac{L'_{s,-1} L''_{s,-1}}{(z - z_s)^2} + \frac{L'_{s,-1} L''_{s0} + L'_{s0} L''_{s,-1}}{(z - z_s)} + L'_{s,-1} L''_{s1} + L'_{s0} L''_{s0} + L'_{s1} L''_{s,-1} + O(1). \quad (2.4)$$

Из (2.2) для  $L'$  следует, что первое слагаемое обращается в нуль:

$$L'_{s,-1} L''_{s,-1} = \alpha_s (\beta_s^t \alpha_s) \beta_s^{t'} = 0.$$

Для второго слагаемого имеем  $L_{s,-1} = L'_{s,-1}L''_{s0} + L'_{s0}L''_{s,-1} = \alpha_s(\beta_s'^t L''_{s0}) + (L'_{s0}\alpha_s)\beta_s''^t$ . Из (2.2) для  $L'$  следует, что  $L'_{s0}\alpha_s = k'_s\alpha_s$ , а значит,  $L_{s,-1} = \alpha_s\beta_s^t$ , где  $\beta_s^t = \beta_s'^t L''_{s0} + k'_s\beta_s''^t$ . Далее,  $\text{tr } L_{s,-1} = (\beta_s'^t L''_{s0} + k'_s\beta_s''^t)\alpha_s = k''_s\beta_s^t\alpha_s + k'_s\beta_s''^t\alpha_s = 0$ .

Рассмотрим выражение  $L_{s,0}\alpha_s$ , где  $L_{s,0} = L'_{s,-1}L''_{s1} + L'_{s0}L''_{s0} + L'_{s1}L''_{s,-1}$ . Из определения операторов Лакса вытекает, что  $L''_{s,-1}\alpha_s = 0$  и  $L'_{s0}L''_{s0}\alpha_s = k'_s k''_s\alpha_s$ . Мы также имеем  $L'_{s,-1}L''_{s1}\alpha_s = \alpha_s(\beta_s'^t L''_{s1}\alpha_s)$ . Следовательно,  $\alpha_s$  — собственный вектор матрицы  $L_{s,0}$  с собственным значением  $k_s = \beta_s'^t L''_{s1}\alpha_s + k'_s k''_s$ .  $\square$

Так как условия (2.1), (2.2) линейны, операторы Лакса образуют ассоциативную алгебру, а следовательно, и ассоциированную алгебру Ли. Последняя называется *алгеброй операторов Лакса*.

Если функция  $L$  помимо (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию  $\text{tr } L = 0$ , то она называется *оператором Лакса со значением в  $\mathfrak{sl}(n)$* . Такие операторы Лакса образуют алгебру Ли.

**2.2. Алгебра операторов Лакса для  $\mathfrak{so}(n)$ .** Для элементов этой алгебры имеем  $X^t = -X$ . Мы вводим матричнозначную функцию  $L$  со значениями в  $\mathfrak{so}(n)$  с помощью того же выражения, что и в разд. 2.1, изменяя, однако, условие (i) этого раздела ввиду того, что не существует кососимметрических матриц ранга 1, и соответственно видоизменяем условие (ii). Мы опускаем для краткости индекс  $s$  и записываем выражение (2.1) в виде

$$L = \frac{L_{-1}}{z} + L_0 + O(z), \quad (2.5)$$

где  $L_0, L_1, \dots$  кососимметричны. Вместо условия (i) разд. 2.1 мы требуем, чтобы

$$L_{-1} = \alpha\beta^t - \beta\alpha^t, \quad (2.6)$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}^n$  фиксирован,  $\beta \in \mathbb{C}^n$  произволен и

$$\alpha^t\alpha = \beta^t\alpha (= \alpha^t\beta) = 0. \quad (2.7)$$

Мы также требуем выполнения аналога условия (2.3):

$$L_0\alpha = k\alpha \quad (2.8)$$

для некоторого комплексного числа  $k$ .

Докажем теперь замкнутость пространства операторов Лакса относительно взятия скобки Ли в рассматриваемом здесь случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ . Подчеркнем, что в этом случае структуры ассоциативной алгебры нет.

**Лемма 2.2.** *Свойства (2.5)–(2.8) инвариантны относительно скобки Ли.*

**Доказательство.** 1) Прежде всего докажем отсутствие члена с  $z^{-2}$ . Соответствующий коэффициент равен

$$\begin{aligned} [L_{-1}, L'_{-1}] &= [\alpha\beta^t - \beta\alpha^t, \alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t] \\ &= (\beta^t\alpha)(\alpha\beta'^t - \beta'\alpha^t) - (\alpha^t\alpha)(\beta'\beta^t - \beta\beta'^t) - (\alpha^t\beta')(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t). \end{aligned}$$

Он обращается в нуль ввиду соотношения (2.7) (примененного как к  $\beta$ , так и к  $\beta'$ ). Подчеркнем, что для произведения  $L_{-1}L'_{-1}$  член с  $z^{-2}$  в нуль не обращается.

2) Далее вычислим коэффициент при  $z^{-1}$  в произведении  $LL'$ . Коэффициент равен

$$\begin{aligned} L_{-1}L'_0 + L_0L'_{-1} &= \alpha(\beta^t L'_0) - \beta(\alpha^t L'_0) + (L_0\alpha)\beta^{tt} - (L_0\beta')\alpha^t \\ &= \alpha(\beta^t L'_0) - \beta(-k'\alpha^t) + k\alpha\beta^{tt} - (L_0\beta')\alpha^t \\ &= \alpha(\beta^t L'_0 + k\beta^{tt}) - (L_0\beta' - k'\beta)\alpha^t \end{aligned}$$

(здесь мы использовали соотношение (2.8)). Мы видим, что пока он не имеет требуемого вида (2.6). Теперь рассмотрим соответствующий коэффициент в разложении коммутатора:

$$\begin{aligned} [L, L']_{-1} &= \alpha(\beta^t L'_0 - \beta^{tt} L_0 + k\beta^{tt} - k'\beta^t) - (L_0\beta' - L'_0\beta - k'\beta + k\beta')\alpha^t \\ &= \alpha\beta^{tt} - \beta''\alpha^t, \end{aligned}$$

где  $\beta^{tt} = \beta^t L'_0 - \beta^{tt} L_0 + k\beta^{tt} - k'\beta^t$ .

Легко проверить, что  $\beta''$  удовлетворяет условию (2.7).

3) Проверим условие (2.8) на собственное значение матричного коэффициента при члене нулевой степени:  $(LL')_0 = L_{-1}L'_1 + L_0L'_0 + L_1L'_{-1}$ .

Ввиду (2.7) имеем  $L'_{-1}\alpha = 0$ ; следовательно, для третьего слагаемого  $L_1L'_{-1}\alpha = 0$ .

Для первого слагаемого имеем

$$L_{-1}L'_1\alpha = (\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)L'_1\alpha = \alpha(\beta^t L'_1\alpha) - \beta(\alpha^t L'_1\alpha).$$

Последний член в правой части этого соотношения обращается в нуль в силу кососимметричности матрицы  $L'_1$ .

Таким образом,

$$(LL')_0\alpha = k''\alpha, \quad \text{где } k'' = \beta^t L'_1\alpha + k k'. \quad (2.9)$$

□

**2.3. Алгебры операторов Лакса для  $\mathfrak{sp}(2n)$ .** Для элементов симплектической алгебры имеем  $X^t = -\sigma X \sigma^{-1}$ , где  $\sigma$  — невырожденная кососимметрическая матрица.

Возьмем разложение для  $L$  в виде

$$L = \frac{L_{-2}}{z^2} + \frac{L_{-1}}{z} + L_0 + L_1 z + L_2 z^2 + O(z^3) \quad (2.10)$$

(мы снова опускаем для краткости индекс  $s$ ), где  $L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, \dots$  — симплектические матрицы и

$$L_{-2} = \nu\alpha\alpha^t, \quad L_{-1} = (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma \quad (\nu \in \mathbb{C}, \beta \in \mathbb{C}^{2n}). \quad (2.11)$$

Потребуем выполнения условия, аналогичного одному из условий (2.7):

$$\beta^t \sigma \alpha = 0. \quad (2.12)$$

Заметим, что при этом второе,  $\alpha^t \sigma \alpha = 0$ , выполнено автоматически ввиду кососимметричности матрицы  $\sigma$ .

Далее, мы требуем, чтобы

$$L_0\alpha = k\alpha \quad (2.13)$$

для некоторого комплексного числа  $k$ .

Мы накладываем новое соотношение

$$\alpha^t \sigma L_1 \alpha = 0. \quad (2.14)$$

Докажем теперь замкнутость пространства операторов Лакса относительно взятия скобки Ли в рассматриваемом здесь случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ . Подчеркнем, что и в этом случае структуры ассоциативной алгебры нет.

**Лемма 2.3.** *Свойства (2.10)–(2.14) инвариантны по отношению к скобке Ли.*

**Доказательство.** Пусть  $L'' = [L, L']$ .

1) Отсутствие членов порядка  $-4$  и  $-3$  по  $z$  в  $L''$  вытекает только из соотношений  $\beta^t \sigma \alpha = 0$ ,  $\alpha^t \sigma \alpha = 0$ .

2) Для члена порядка  $-2$  имеем

$$L''_{-2} = (\nu' k - \nu k' + \beta^t \sigma \beta') \alpha \alpha^t \sigma,$$

т. е. он имеет вид, требуемый соотношением (2.11) (здесь и ниже  $\nu'$ ,  $\beta'$ ,  $L'_i$  имеют тот же смысл для  $L'$ , что  $\nu$ ,  $\beta$ ,  $L_i$  для  $L$ ).

3) Для члена порядка  $-1$  прямое вычисление с использованием (2.10), (2.11) дает

$$\begin{aligned} L''_{-1} = & \alpha(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_1 - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_1 + \beta^t \sigma L'_0 - \beta'^t \sigma L_0 + k \beta'^t \sigma - k' \beta^t \sigma) \\ & + (-\nu L'_1 \alpha + \nu' L_1 \alpha - L'_0 \beta + L_0 \beta' + k \beta' - k' \beta) \alpha^t \sigma. \end{aligned}$$

Обозначим вторую скобку через  $\beta''$ . Тогда из соотношений  $L_1^t = -\sigma L_1 \sigma^{-1}$ ,  $L_0^t = -\sigma L_0 \sigma^{-1}$  (симплектичность матриц) вытекает, что первая скобка равна  $\beta''^t \sigma$ . Таким образом,

$$L''_{-1} = (\alpha \beta''^t + \beta'' \alpha^t) \sigma,$$

где

$$\beta'' = -\nu L'_1 \alpha + \nu' L_1 \alpha - L'_0 \beta + L_0 \beta' + k \beta' - k' \beta.$$

Покажем, что  $\beta''^t \sigma \alpha = 0$ . Из полученного выше выражения для  $\beta''^t \sigma$  находим

$$\beta''^t \sigma \alpha = \nu \cdot \alpha^t \sigma L'_1 \alpha - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_1 \alpha + \beta^t \sigma L'_0 \alpha - \beta'^t \sigma L_0 \alpha + k \beta'^t \sigma \alpha - k' \beta^t \sigma \alpha.$$

Первые два члена этого выражения обращаются в нуль в силу соотношения (2.14), примененного к  $L$  и  $L'$ . Ко вторым двум членам применим соотношения  $L_0 \alpha = k \alpha$  и  $L'_0 \alpha = k' \alpha$ , после чего все оставшиеся члены исчезают ввиду соотношений (2.12).

4) Проверим условие (2.13) на собственные значения члена нулевой степени. По определению

$$(LL')_0 = \nu \alpha \alpha^t \sigma L'_2 + (\alpha \beta^t + \beta \alpha^t) \sigma L'_1 + L_0 L'_0 + L_1 (\alpha \beta'^t + \beta' \alpha^t) \sigma + \nu' L_2 \alpha \alpha^t \sigma.$$

При умножении справа на  $\alpha$  два последних члена очевидным образом исчезают. Получаем

$$(LL')_0 \alpha = \nu \alpha \alpha^t \sigma L'_2 \alpha + \alpha \beta^t \sigma L'_1 \alpha + \beta \alpha^t \sigma L'_1 \alpha + k k' \alpha.$$

Третье слагаемое равно 0 в силу (2.14). Таким образом, вектор  $\alpha$  является собственным уже для свободного члена в произведении  $LL'$ :

$$(LL')_0 \alpha = \alpha(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_2 \alpha + \beta^t \sigma L'_1 \alpha + k k'),$$

а в коммутаторе получим

$$L''_0\alpha = \alpha(\nu \cdot \alpha^t \sigma L'_2 \alpha - \nu' \cdot \alpha^t \sigma L_2 \alpha + \beta^t \sigma L'_1 \alpha - \beta^{tt} \sigma L_1 \alpha). \quad (2.15)$$

5) Проверим сохранение условия  $\alpha^t \sigma L_1 \alpha = 0$  в произведении и коммутаторе. Для произведения по определению

$$(LL')_0 = L_{-2}L'_3 + L_{-1}L'_2 + L_0L'_1 + L_1L'_0 + L_2L'_{-1} + L_3L'_{-2}.$$

Подставляя известные выражения для  $L_{-2}$ ,  $L'_{-2}$ ,  $L_{-1}$ ,  $L'_{-1}$ , получим

$$\begin{aligned} \alpha^t \sigma (LL')_0 \alpha &= \nu(\alpha^t \sigma \alpha) \alpha^t \sigma L'_3 \alpha + ((\alpha^t \sigma \alpha) \beta^t + (\alpha^t \sigma \beta) \alpha^t) \sigma L'_2 \alpha \\ &\quad - k(\alpha^t \sigma L'_1 \alpha) + \tilde{k}(\alpha^t \sigma L_1 \alpha) \\ &\quad + \alpha^t \sigma L_2 (\alpha(\beta^{tt} \sigma \alpha) + \beta'(\alpha^t \sigma \alpha)) + \nu' \alpha^t \sigma L_3 \alpha (\alpha^t \sigma \alpha). \end{aligned}$$

Ввиду соотношений (2.11)–(2.14) это выражение обращается в нуль.  $\square$

### §3. Почти градуированная структура

В этом параграфе мы рассматриваем следующие случаи:  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$ , и заканчиваем случаем  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ , который является специальным в отношении почти градуированной структуры. Общее определение почти градуированной структуры дано во введении. Обозначим через  $\bar{\mathfrak{g}}$  алгебру операторов Лакса, соответствующую  $\mathfrak{g}$ .

Для любой из перечисленных выше алгебр  $\mathfrak{g}$ , за исключением  $\mathfrak{gl}(n)$ , и любого  $m \in \mathbb{Z}$  пусть

$$\mathfrak{g}_m = \{L \in \bar{\mathfrak{g}} \mid (L) + D \geq 0\},$$

где  $(L)$  — дивизор  $\mathfrak{g}$ -значной функции  $L$ , и для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + \sum_{s=1}^{ng} \gamma_s,$$

а для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$

$$D = -mP_+ + (m+g)P_- + 2 \sum_{s=1}^{ng} \gamma_s.$$

Мы называем  $\mathfrak{g}_m$  (однородным) подпространством степени  $m$  алгебры Ли  $\bar{\mathfrak{g}}$ .

**Теорема 3.1.** Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ,  $\mathfrak{so}(n)$ ,  $\mathfrak{sp}(2n)$

$$1) \dim \mathfrak{g}_m = \dim \mathfrak{g};$$

$$2) \bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_m;$$

$$3) [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subseteq \bigoplus_{m=k+l} \mathfrak{g}_m.$$

**Доказательство.** Сначала докажем 1). Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$  и  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$  по теореме Римана–Роха размерность пространства всех  $\mathfrak{g}$ -значных функций  $L$ , удовлетворяющих соотношению  $(L) + D \geq 0$ , равна  $(\dim \mathfrak{g})(ng+1)$ . Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$  она равна  $(\dim \mathfrak{g})(2ng+1)$ . Мы докажем, что в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ ,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$  для произвольного  $m \in \mathbb{Z}$  имеется ровно  $\dim \mathfrak{g}$  соотношений в каждом полюсе

$\gamma_s$ , а в случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$  таких соотношений  $2 \dim \mathfrak{g}$ . Это будет означать, что  $\dim \mathfrak{g}_m = \dim \mathfrak{g}$ .

Сначала рассмотрим случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ . Элементы подпространства  $\mathfrak{g}_m$  удовлетворяют определенным условиям трех типов, происходящим из условий (2.2), (2.3) на вычеты, собственные значения и следы матрицы  $L \in \mathfrak{g}_m$ , которые описаны ниже.

1) Для каждой слабой особенности  $L_{-1} = \alpha\beta^t$ , что должно было бы дать  $\dim \mathfrak{g}$  соотношений (так как  $L_{-1} \in \mathfrak{g}$ ), если бы правая часть была фиксирована. Но она зависит от свободного  $n$ -мерного вектора  $\beta$ . Следовательно, мы имеем  $\dim \mathfrak{g} - n$  условий в каждом из  $ng$  простых полюсов  $\gamma_s$ .

2) Для каждой слабой особенности  $L_0\alpha = k\alpha$ , что дает  $n$  условий. Принимая во внимание один свободный параметр  $k$ , получаем  $n - 1$  условий в каждом  $\gamma_s$ .

3) Мы также имеем  $\text{tr } L = 0$ , т. е. еще одно условие в каждой слабой особенности.

Таким образом, мы имеем  $(\dim \mathfrak{g} - n) + (n - 1) + 1 = \dim \mathfrak{g}$  соотношений в каждой точке  $\gamma_s$ , что и требовалось.

Для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$  мы придерживаемся той же аргументации. Снова соотношение (2.6)  $L_{-1} = \alpha\beta^t - \beta\alpha^t$  дает  $\dim \mathfrak{g} - n$  уравнений, соотношение (2.8)  $L_0\alpha = k\alpha$  дает  $n - 1$  уравнений и (2.7)  $\beta^t\alpha = 0$  дает еще одно уравнение. Суммируя, получаем  $\dim \mathfrak{g}$  уравнений в каждой точке  $\gamma_s$ .

В случае  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$  в каждой точке  $\gamma_s$  имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} L_{-2} = \nu\alpha\alpha^t : & \quad \dim \mathfrak{g} - 1 \text{ условий (один свободный параметр } \nu), \\ L_{-1} = (\alpha\beta^t + \beta\alpha^t)\sigma : & \quad \dim \mathfrak{g} - 2n \text{ условий (} 2n \text{ свободных параметров } \beta), \\ L_0\alpha = k\alpha : & \quad 2n - 1 \text{ условий (один свободный параметр } k), \\ \beta^t\sigma\alpha = 0, \alpha^t\sigma L_1\alpha = 0 : & \quad 2 \text{ условия,} \end{aligned}$$

т. е.  $2 \dim \mathfrak{g}$  условий в каждой из  $ng$  точек, что и требовалось.

Для  $m > 0$  и  $m < -g$  подпространства  $\mathfrak{g}_m$  линейно независимы по очевидной причине: порядки в  $P_{\pm}$  элементов этих подпространств различны для различных  $m$ .

Для  $-g \leq m \leq 0$  линейная независимость подпространств  $\mathfrak{g}_m$  вытекает из того факта, что не существует голоморфных везде операторов Лакса. Мы хотели бы подчеркнуть, что последний аргумент применим только в случае простых алгебр Ли. Этим объясняется то, почему в случае редуکتивной алгебры  $\mathfrak{gl}(n)$  требуется некоторая модификация (см. ниже).

Утверждение 3) теоремы следует из рассмотрения порядков в точках  $P_{\pm}$ .  $\square$

Теорема 3.1 определяет почти градуированную структуру на  $\bar{\mathfrak{g}}$ .

Теперь рассмотрим случай  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ . В этом случае  $\bar{\mathfrak{g}}$  содержит подпространство функций, принимающих значения в одномерном пространстве скалярных матриц. Пусть  $L$  — такая функция. Ввиду (2.2) получаем  $\text{tr } L_{-1} = 0$ . Так как  $L_{-1}$  — скалярная матрица, то  $L_{-1} = 0$ . Следовательно,  $L$  голоморфна везде, за исключением точек  $P_{\pm}$ . Пусть  $\mathcal{A}$  обозначает алгебру мероморфных функций на  $\Gamma$ , голоморфных везде, кроме точек  $P_{\pm}$ . Тогда  $L \in \mathcal{A} \cdot \text{id}$ , где  $\text{id}$  — единичная матрица. Следовательно,

$$\overline{\mathfrak{gl}(n)} = \overline{\mathfrak{sl}(n)} \oplus \mathcal{A} \cdot \text{id}. \quad (3.1)$$



В [3] в пространстве таких функций был введен некоторый базис  $\{A_m\}$  (позднее названный *базисом Кричевера–Новикова*). Положим  $\mathcal{A}_m = \mathbb{C}A_m$  и  $\mathfrak{gl}(n)_m = \mathfrak{sl}(n)_m \oplus (\mathcal{A}_m \cdot \text{id})$ . Для  $m > 0$  и  $m < -g$  это определение эквивалентно данному выше определению подпространства  $\mathfrak{g}_m$  (с  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ ).

Как следует из (3.1), с  $\mathfrak{g}_m = \mathfrak{gl}(n)_m$  теорема 3.1 остается справедливой для  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ . Лишь соотношение 3) теоремы выполняется с другим верхним пределом суммирования, определяемым алгеброй  $\mathcal{A}$  (см. [3]).

## §4. Центральные расширения алгебр операторов Лакса

### 4.1. Центральные расширения алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{gl}(n)$ .

Для алгебр токов Кричевера–Новикова (в том числе для алгебр петель) 2-коцикл, задающий центральное расширение, дается известным выражением  $\text{tr res}_{P_+} L dL'$ . Для этих алгебр данный коцикл является локальным. Коцикл  $\chi$  называется *локальным* [3], если существуют константы  $\mu'$ ,  $\mu''$ , такие, что  $\chi(\mathfrak{g}_m, \mathfrak{g}_{m'}) = 0$  за исключением тех случаев, когда  $\mu' \leq m + m' \leq \mu''$ , где  $\mathfrak{g}_m$ ,  $\mathfrak{g}_{m'}$  — однородные подпространства, введенные в предыдущем разделе. В случае алгебр операторов Лакса приведенный выше коцикл уже не является локальным. В этом параграфе мы подправим его так, чтобы получить локальный коцикл.

Для каждого оператора  $L$  собственное значение  $k$  его компоненты нулевой степени  $L_0$  (см. (2.3)) может рассматриваться как линейный функционал от  $L$ . Мы обозначим этот функционал через  $k(L)$ .

**Лемма 4.1.** *В каждой слабой особенности 1-форма  $\text{tr } L dL'$  имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\text{res tr } L dL' = k([L, L']). \quad (4.1)$$

**Доказательство.** Подсчитаем обе части этого соотношения явно.

1) Используя соотношение

$$dL' = -\frac{\alpha\beta^{tt}}{z^2} + L'_1 + \dots$$

и формулу (2.1), получаем

$$L dL' = -\frac{\alpha\beta^t\alpha\beta^{tt}}{z^3} - \frac{L_0\alpha\beta^{tt}}{z^2} - \frac{L_1\alpha\beta^{tt} - \alpha\beta^t L'_1}{z} + \dots$$

Первый член обращается в нуль, так как  $\beta^t\alpha = 0$ . Второй член обращается в нуль под символом следа, так как  $L_0\alpha = k\alpha$  и  $\text{tr } \alpha\beta^{tt} = \beta^{tt}\alpha = 0$ . Третий член дает нам требуемый вычет. Имеем

$$\text{res tr } L dL' = \text{tr}(\alpha\beta^t L'_1 - L_1\alpha\beta^{tt}) = \beta^t L'_1\alpha - \beta^{tt} L_1\alpha.$$

2) Теперь вычислим правую часть рассматриваемого соотношения. Обозначим через  $[L, L']_0$  член нулевой степени разложения (2.1) для коммутатора  $[L, L']$ . Имеем

$$[L, L']_0 = \alpha\beta^t L'_1 + L_0 L'_0 + L_1\alpha\beta^{tt} - \alpha\beta^{tt} L_1 - L'_0 L_0 - L'_1\alpha\beta^t.$$

Умножим обе части этого соотношения на  $\alpha$  справа. Тогда третьи члены в обеих строках обращаются в нуль, так как они содержат множители  $\beta^{tt}\alpha$ ,  $\beta^t\alpha$ , равные

нулю ввиду (2.2). Вторые члены взаимно уничтожаются, так как  $L_0 L'_0 \alpha = k' k \alpha$  и  $L'_0 L_0 \alpha = k k' \alpha$ . Следовательно,

$$[L, L']_0 \alpha = \alpha \beta^t L'_1 \alpha - \alpha \beta^{t'} L_1 \alpha = \alpha (\beta^t L'_1 \alpha - \beta^{t'} L_1 \alpha).$$

Выражение в скобках представляет собой  $1 \times 1$ -матрицу, т. е. комплексное число. Разумеется, это комплексное число является собственным значением матрицы  $[L, L']_0$  на векторе  $\alpha$ , т. е. значением  $k([L, L'])$ . Это значение в точности совпадает с вычисленным выше выражением для  $\text{tr res } L dL'$ , что завершает доказательство.  $\square$

Мы хотим избавиться от сингулярностей 1-формы  $\text{tr } L dL'$  в  $\gamma_s$  путем вычитания из нее другого выражения для собственного значения в правой части соотношения (4.1). Замечательно, что это новое выражение формулируется в терминах связностей в голоморфных расслоениях на  $\Gamma$ , явный вид которых дан в [2]. Ниже  $\mathcal{L}$  обозначает 1-форму такой связности.

**Лемма 4.2.** Пусть  $\mathcal{L}$  — матричнозначная 1-форма, локально, в окрестности слабой особенности, равная

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathcal{L}_0 dz + \dots,$$

причем  $\mathcal{L}$  удовлетворяет тем же условиям, что и  $L$  (см. (2.1)–(2.3)), с одним лишь отличием:  $\tilde{\beta}^t \alpha = 1$ , где  $\mathcal{L}_{-1} = \alpha \tilde{\beta}^t$ . Тогда 1-форма  $\text{tr } L \mathcal{L}$  имеет, самое большее, простой полюс при  $z = 0$  и

$$\text{res tr } L \mathcal{L} = k(L).$$

**Доказательство.** Имеем

$$L = \frac{\alpha \beta^t}{z} + L_0 + \dots, \quad \mathcal{L} = \left( \frac{\alpha \tilde{\beta}^t}{z} + \mathcal{L}_0 + \dots \right) dz;$$

следовательно,

$$L \mathcal{L} = \left( \frac{\alpha \beta^t \alpha \tilde{\beta}^t}{z^2} + \frac{\alpha \beta^t \mathcal{L}_0 + L_0 \alpha \tilde{\beta}^t}{z} + \dots \right) dz.$$

Как и выше, первый член обращается в нуль. Для второго члена имеем

$$\text{res tr } L \mathcal{L} = \text{tr}(\alpha \beta^t \mathcal{L}_0 + L_0 \alpha \tilde{\beta}^t) = \beta^t \mathcal{L}_0 \alpha + \tilde{\beta}^t L_0 \alpha.$$

Далее,  $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \alpha$ ,  $L_0 \alpha = k \alpha$ ; следовательно,  $\beta^t \mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \beta^t \alpha = 0$  и  $\tilde{\beta}^t L_0 \alpha = k \tilde{\beta}^t \alpha = k$ . Это завершает доказательство.  $\square$

**Теорема 4.3.** Для каждой 1-формы  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющей условиям леммы 4.2, 1-форма  $\text{tr}(L dL' - [L, L'] \mathcal{L})$  регулярна везде, за исключением точек  $P_{\pm}$ , и выражение

$$\gamma(L, L') = \text{res}_{P_{\pm}} \text{tr}(L dL' - [L, L'] \mathcal{L})$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

**Доказательство.** В ходе доказательства леммы 4.1 и леммы 4.2 мы видели, что 1-формы  $\text{tr } L dL'$  и  $\text{tr}[L, L'] \mathcal{L}$  имеют простые полюсы в каждой из точек  $\gamma_s$ , и их вычеты равны одной и той же величине  $k_s([L, L'])$ . Следовательно, их разность регулярна в каждой из точек  $\gamma_s$ .

Предположим, что в точке  $P_+$  мы имеем разложения

$$L(z) = \sum_{i=m}^{\infty} a_i z^i, \quad L'(z) = \sum_{j=m'}^{\infty} b_j z^j, \quad \mathcal{L}(z) = \sum_{k=m_+}^{\infty} c_k z^k dz. \quad (4.2)$$

Тогда

$$L(z) dL'(z) = \sum_{p=m+m'}^{\infty} \left( \sum_{i+j=p} j a_i b_j \right) z^{p-1} dz$$

и

$$[L(z), L'(z)] \mathcal{L} = \sum_{p=m+m'+m_+}^{\infty} \left( \sum_{i+j+k=p} [a_i, b_j] c_k \right) z^p dz.$$

Чтобы хотя бы одна из этих 1-форм имела нетривиальный вычет в точке  $P_+$ , необходимо, чтобы выполнялось либо неравенство  $m+m' \leq 0$ , либо неравенство  $m+m'+m_+ \leq -1$ , другими словами,

$$m+m' \leq \max\{0, -1-m_+\}.$$

Если  $L$  и  $L'$  однородны степеней  $m$ ,  $m'$  соответственно, то в точке  $P_-$  их разложения, аналогичные разложениям (4.2), начинаются с  $i = -m-g$ ,  $j = -m'-g$  соответственно. Разложение для  $\mathcal{L}$  начинается с некоторого целого  $m_-$ . Следовательно, условие в точке  $P_-$  выглядит так:

$$-m-m'-2g \leq \max\{0, -1+m_-\}.$$

Окончательно, получаем

$$\min\{0, 1-m_-\} - 2g \leq m+m' \leq \max\{0, -1-m_+\}.$$

Так как  $m_{\pm}$  фиксированы ( $\mathcal{L}$  фиксирована), последнее в точности означает, что коцикл локален.  $\square$

**4.2. Центральные расширения для алгебр операторов Лакса над  $\mathfrak{so}(n)$ .** Мы придерживаемся здесь той же линии рассуждений, что и в предыдущем разделе.

**Лемма 4.4.** *В каждой слабой особенности 1-форма  $\text{tr } L dL'$  имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\text{res } \text{tr } L dL' = 2k([L, L']). \quad (4.3)$$

**Доказательство.** 1) Применяя (2.5) и соотношение

$$dL' = -L'_{-1} z^{-2} + L'_1 + \dots,$$

где  $L'_{-1}$  дается соотношением (2.6), мы получаем

$$L dL' = -\frac{L_{-1} L'_{-1}}{z^3} - \frac{L_0 L'_{-1}}{z^2} - \frac{L_1 L'_{-1} - L_{-1} L'_1}{z} + \dots. \quad (4.4)$$

Для первого члена мы имеем

$$L_{-1} L'_{-1} = (\alpha \beta^t - \beta \alpha^t)(\alpha \beta^{t'} - \beta' \alpha^t) = \alpha(\beta^t \alpha) \beta^{t'} - \beta(\alpha^t \alpha) \beta^{t'} - \alpha \beta^t \beta' \alpha^t - \beta \alpha^t \beta' \alpha^t.$$

Первые два слагаемых обращаются в нуль благодаря (2.7). Для оставшихся имеем

$$\text{tr}(L_{-1} L'_{-1}) = \text{tr}(-\alpha \beta^t \beta' \alpha^t - \beta \alpha^t \beta' \alpha^t) = -(\alpha^t \alpha) \beta^t \beta' - (\alpha^t \beta) \alpha^t \beta',$$

что снова обращается в нуль ввиду (2.7).

Снова (как и в разд. 4.1) член, содержащий  $z^{-2}$ , обращается в нуль под символом следа. По определению

$$L_0 L'_{-1} = L_0(\alpha\beta^{tt} - \beta^t\alpha^t) = k\alpha\beta^{tt} - L_0\beta^t\alpha^t.$$

Теперь заметим, что  $\text{tr}(L_0\beta^t\alpha^t) = \text{tr}(\alpha^t L_0\beta^t)$  и  $\alpha^t L_0 = -k\alpha^t$ . Следовательно,  $\text{tr}(L_0 L'_{-1}) = 2k\alpha^t\beta^t$  обращается в нуль ввиду (2.7).

Третий член в (4.4) дает нам требуемый вычет. Имеем

$$\text{res } L dL' = (L_{-1}L'_1 - L_1L'_{-1}).$$

Подставляя  $L_{-1}$ ,  $L'_{-1}$  из (2.6), мы получим

$$\text{res } L dL' = \alpha\beta^t L'_1 - \beta\alpha^t L'_1 - L_1\alpha\beta^{tt} + L_1\beta^t\alpha^t;$$

следовательно,

$$\text{tr } \text{res } L dL' = \beta^t L'_1\alpha - \alpha^t L'_1\beta - \beta^{tt} L_1\alpha + \alpha^t L_1\beta^t.$$

В силу кососимметричности матриц  $L_1$ ,  $L'_1$  первые два слагаемых в последнем соотношении равны и то же самое верно относительно двух последних слагаемых. Следовательно,

$$\text{tr } \text{res } L dL' = 2(\beta^t L'_1\alpha - \beta^{tt} L_1\alpha).$$

Из (2.9), очевидно, вытекает, что  $[L, L']_0\alpha = \beta^t L'_1\alpha - \beta^{tt} L_1\alpha$ , и это доказывает лемму.  $\square$

**Лемма 4.5.** Пусть  $\mathcal{L}$  — кососимметрическая матричнозначная 1-форма, такая, что локально, в окрестности слабой особенности,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathcal{L}_0 dz + \dots,$$

где  $\mathcal{L}_{-1} = \alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t$ ,  $\tilde{\beta}^t\alpha = 1$  и  $\mathcal{L}_0\alpha = \tilde{k}\alpha$ . Тогда 1-форма  $\text{tr } L\mathcal{L}$  имеет, самое большее, простой полюс при  $z = 0$  и

$$\text{res } \text{tr } L\mathcal{L} = 2k(L).$$

**Доказательство.** Коэффициент при  $z^{-2}$  в произведении  $L\mathcal{L}$  равен по определению

$$(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t) = \alpha(\beta^t\alpha)\tilde{\beta}^t - \alpha\beta^t\tilde{\beta}\alpha^t - \beta(\alpha^t\alpha)\tilde{\beta}^t + \beta\alpha^t\tilde{\beta}\alpha^t.$$

Первый и третий члены обращаются в нуль по (2.7). Для следа оставшейся суммы имеем

$$\text{tr}(-\alpha\beta^t\tilde{\beta}\alpha^t + \beta\alpha^t\tilde{\beta}\alpha^t) = -(\alpha^t\alpha)\beta^t\tilde{\beta} + (\alpha^t\beta)\alpha^t\tilde{\beta},$$

что обращается в нуль по той же причине.

Перемножая разложения для  $L$  и  $\mathcal{L}$ , находим

$$\text{tr } \text{res}(L\mathcal{L}) = \text{tr}(L_{-1}\mathcal{L}_0 + L_0\mathcal{L}_{-1}) = \text{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathcal{L}_0 + \text{tr } L_0(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t).$$

Для первого слагаемого имеем

$$\text{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathcal{L}_0 = \text{tr}(\alpha\beta^t\mathcal{L}_0 - \beta\alpha^t\mathcal{L}_0) = \beta^t\mathcal{L}_0\alpha - \alpha^t\mathcal{L}_0\beta.$$

Заметим, что в силу кососимметричности  $\alpha^t\mathcal{L}_0\beta = -\beta^t\mathcal{L}_0\alpha$ , а следовательно,

$$\text{tr}(\alpha\beta^t - \beta\alpha^t)\mathcal{L}_0 = \beta^t\mathcal{L}_0\alpha - \alpha^t\mathcal{L}_0\beta = 2\beta^t\mathcal{L}_0\alpha = 2\tilde{k}\beta^t\alpha,$$

что обращается в нуль ввиду (2.7).

Для второго слагаемого имеем

$$\operatorname{tr} L_0(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t) = \operatorname{tr}(L_0\alpha\tilde{\beta}^t - L_0\tilde{\beta}\alpha^t) = \tilde{\beta}^t L_0\alpha - \alpha^t L_0\tilde{\beta}.$$

Так как  $L_0\alpha = k\alpha$ ,  $\alpha^t L_0 = -k\alpha^t$  и  $\tilde{\beta}^t\alpha = \alpha^t\tilde{\beta} = 1$ , мы получаем

$$\operatorname{tr} L_0(\alpha\tilde{\beta}^t - \tilde{\beta}\alpha^t) = 2k. \quad \square$$

**Теорема 4.6.** *Для каждой 1-формы  $\mathcal{L}$ , удовлетворяющей условиям леммы 4.5, 1-форма  $\operatorname{tr}(L dL' - [L, L']\mathcal{L})$  регулярна везде, за исключением точек  $P_{\pm}$ , и выражение*

$$\gamma(L, L') = \operatorname{res}_{P_{\pm}} \operatorname{tr}(L dL' - [L, L']\mathcal{L})$$

*даёт локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.3. Оно опирается только на отсутствие вычетов 1-формы, определяющей коцикл, в слабых особенностях.

Имеется определенный произвол в определении  $\mathcal{L}$  в лемме 4.5. Например, мы могли бы потребовать, чтобы  $\mathcal{L}_{-1} = \alpha\tilde{\beta}^t$ , и взять в теореме 4.6  $\operatorname{tr}(L dL' - 2[L, L']\mathcal{L})$ .

### 4.3. Центральные расширения алгебр операторов Лакса над $\mathfrak{sp}(2n)$ .

Мы продолжаем придерживаться той же линии рассуждений, что и в предыдущих разделах. Во-первых, докажем следующий точный аналог леммы 4.4.

**Лемма 4.7.** *В каждой слабой особенности 1-форма  $\operatorname{tr} L dL'$  имеет, самое большее, простой полюс, и*

$$\operatorname{res} \operatorname{tr} L dL' = 2k([L, L']). \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Прямое вычисление формы  $L dL'$  на основе разложения (2.10) показывает, что коэффициенты при  $z^{-5}$  и  $z^{-4}$  этой матричнозначной 1-формы равны 0 ввиду соотношений (2.12).

Для коэффициента при  $z^{-3}$  имеем

$$(L dL')_{-3} = -(\beta^t\sigma\beta' - 2\nu')\alpha\alpha^t\sigma.$$

Это выражение обращается в нуль под знаком следа:

$$\operatorname{tr}(L dL')_{-3} = -(\beta^t\sigma\beta' - 2\nu')(\alpha^t\sigma\alpha) = 0.$$

Аналогично, используя (2.12)–(2.14), имеем

$$\operatorname{tr}(L dL')_{-2} = \nu(\alpha^t\sigma L'_1\alpha) - 2k(\beta^{tt}\sigma\alpha) - \nu'(\alpha^t\sigma L_1\alpha) = 0.$$

Таким образом, 1-форма  $\operatorname{tr} L dL'$  действительно имеет не более чем простой полюс в рассматриваемой точке. Прямое вычисление вычета даёт

$$\operatorname{tr}(L dL')_{-1} = 2(\nu \cdot \alpha^t\sigma L'_2\alpha - \nu' \cdot \alpha^t\sigma L_2\alpha + \beta^t\sigma L'_1\alpha - \beta^{tt}\sigma L_1\alpha),$$

что в точности совпадает с удвоенным выражением (2.15) для  $k([L, L'])$ .  $\square$

**Лемма 4.8.** Пусть  $\mathcal{L}$  есть  $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма, такая, что локально, в окрестности каждой слабой особенности,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1} \frac{dz}{z} + \mathcal{L}_0 dz + \dots,$$

где  $\mathcal{L}_{-1} = (\alpha \tilde{\beta}^t + \tilde{\beta} \alpha^t) \sigma$ ,  $\tilde{\beta}^t \sigma \alpha = 1$ ,  $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \alpha$  и  $\alpha^t \sigma \mathcal{L}_1 \alpha = 0$ . Тогда 1-форма  $\text{tr } L\mathcal{L}$  имеет, самое большое, простой полюс при  $z = 0$  и

$$\text{res tr } L\mathcal{L} = 2k(L).$$

**Доказательство.** Разложение для  $L\mathcal{L}$  начинается с  $z^{-3}$ . Имеем

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-3} = \nu(\tilde{\beta}^t \sigma \alpha)(\alpha^t \sigma \alpha) = 0,$$

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-2} = \nu(\alpha^t \sigma \tilde{\beta})(\alpha^t \sigma \alpha) + (\beta^t \sigma \tilde{\beta})(\alpha^t \sigma \alpha) + (\alpha^t \sigma \tilde{\beta})(\alpha^t \sigma \beta) = 0.$$

Таким образом, 1-форма  $\text{tr } L\mathcal{L}$  действительно имеет не более чем простой полюс в рассматриваемой точке. Вычисление вычета дает

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-1} = \nu \cdot \alpha^t \sigma \mathcal{L}_1 \alpha + \beta^t \sigma(\mathcal{L}_0 \alpha) + (\alpha^t \sigma \mathcal{L}_0) \beta + \tilde{\beta}^t \sigma(L_0 \alpha) + (\alpha^t \sigma L_0) \tilde{\beta}.$$

По условию леммы  $\alpha^t \sigma \mathcal{L}_1 \alpha = 0$ ,  $\mathcal{L}_0 \alpha = \tilde{k} \alpha$ . Из последнего равенства также следует, что  $\alpha^t \sigma \mathcal{L}_0 = -\tilde{k} \alpha^t \sigma$ . Поэтому

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-1} = \tilde{\beta}^t \sigma(L_0 \alpha) + (\alpha^t \sigma L_0) \tilde{\beta}.$$

Ввиду соотношений  $L_0 \alpha = k \alpha$ ,  $\alpha^t \sigma L_0 = -k \alpha^t \sigma$  имеем

$$\text{tr}(L\mathcal{L})_{-1} = 2k(\tilde{\beta}^t \sigma \alpha) = 2k. \quad \square$$

Из двух последних лемм, как и выше, вытекает

**Теорема 4.9.** При  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$  выражение

$$\gamma(L, L') = \text{res}_{P_+} \text{tr}(L dL')$$

дает локальный коцикл на алгебре операторов Лакса.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] I. M. Krichever, *Vector bundles and Lax equations on algebraic curves*, Comm. Math. Phys., **229**:2 (2002), 229–269; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0108110>.
- [2] I. M. Krichever, *Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Witham equations*, Mosc. Math. J., **2**:4 (2002), 717–752, 806; <http://arxiv.org/abs/hep-th/0112096>.
- [3] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов*, Функц. анализ и его прил., **21**:2 (1987), 46–63.
- [4] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского*, Функц. анализ и его прил., **21**:4 (1987), 47–61.
- [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях*, Функц. анализ и его прил., **23**:1 (1989), 46–63.
- [6] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения и коммутирующие разностные операторы. Двухточечные конструкции*, УМН, **55**:4 (2000), 181–182.
- [7] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения на римановых поверхностях и уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП). I*, Функц. анализ и его прил., **12**:4 (1978), 41–52.

- [8] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Голоморфные расслоения на алгебраических кривых и нелинейные уравнения*, УМН, **35**:6 (1980), 47–68.
- [9] M. Schlichenmaier, *Local cocycles and central extensions for multi-point algebras of Krichever–Novikov type*, J. Reine Angew. Math., **559** (2003), 53–94.
- [10] M. Schlichenmaier, *Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type*, Moscow Math. J., **3**:4 (2003), 1395–1427; <http://arxiv.org/abs/math/0210360>.
- [11] O. K. Sheinman, *Affine Krichever–Novikov algebras, their representations and applications*, in: Geometry, Topology and Mathematical Physics. S. P. Novikov’s Seminar 2002–2003, Amer. Soc. Transl. (2), vol. 212 (eds. V. M. Buchstaber, I. M. Krichever), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2004, 297–316; <http://arxiv.org/abs/Math.RT/0304020>.
- [12] А. Н. Тюрин, *Классификация векторных расслоений на алгебраических кривых произвольного рода*, Изв. АН СССР, сер. мат., **29** (1965), 657–688.

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН  
Университет Колумбия, Нью-Йорк  
e-mail: krichev@math.columbia.edu

Поступило в редакцию  
28 февраля 2007 г.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН  
Независимый московский университет  
e-mail: sheinman@mi.ras.ru