Н. Б. Васильев, Геометрические вероятности, *Квант*, 2020, номер 8, 2–8

Геометрические вероятности

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ НЕ БУДЕМ заниматься строгим определением основных понятий теории вероятностей, а познакомимся с некоторыми задачами, где посчитать вероятности событий помогают соображения симметрии, а также наглядное изображение событий с помощью координат на плоскости.

При этом мы будем иметь дело не только с задачами, где имеется конечное число равновозможных вариантов, но и с такими, где вариантов бесконечно много. Вот две из них.

Задача о встрече. *Двое приятелей договорились встретиться на площади Маяковского от* 12 *до* 13 *часов. Каждый приходит в некоторый случайный момент времени, ждет* 15 *минут другого и уходит. Какова вероятность, что они встретятся?*

Задача об остроугольном треугольнике. *На окружности случайно выбираются три точки. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в этих точках – остроугольный?*

Но начнем мы все же с более простых, конечных примеров.

Бросаем кубик

Самый удобный инструмент для первого знакомства с вероятностями – игральная кость: кубик, грани которого занумерованы числами 1, 2, …, 6.

Поскольку кубик совершенно симметричен, мы считаем, что все шесть возможных вариантов имеют одинаковую вероятность. Скажем, вероятность выпадения шестерки равна $1/6$, вероятность, что выпадет число

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1991 год.

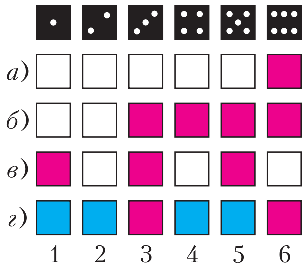

Рис. 1

не меньшее 3, равна $4/6 = 2/3$, вероятность, что выпадет нечетное число очков, равна $1/2$. (Соответствующие *события* – множества «благоприятных исходов» – показаны красным цветом на рисунках 1,*а–в*.)

Если под рукой нет игрального кубика, с таким же успехом можно катить по столу шестигранный карандаш, на гранях которого написаны номера 1, 2, …, 6. Легко представить себе карандаш не с 6, а с любым числом n боковых граней.

Итак, пусть у нас есть инструмент, обеспечивающий получение n равновозможных вариантов. Мы по определению считаем, что вероятность осуществления каждого из этих вариантов равна $1/n$, а вероятность каждого события A, состоящего из k вариантов, равна k/n.

При $n = 6$, конечно, легко просто пересчитать все варианты, изобразив их на рисунке. Но когда число вариантов n велико, на помощь приходят некоторые правила вычисления вероятностей.

Будем обозначать вероятность события A через $p(A)$. События у нас – это просто некоторое подмножество множества E всех возможных вариантов, причем $p(E) = 1$. Для бросаний кубика множество E состоит из шести элементов 1, 2, …, 6. Самые простые соотношения между вероятностями возникают из соотношений между множествами, точнее, количествами элементов в них.

Вероятность события $\bar{A}$, *дополнительного* к A (в него входят все элементы E, не входящие в A), равна

$$p\left(\bar{A}\right) = 1 - p\left(A\right). \qquad (1)$$

Например, если A состоит из чисел от 1 до 6, делящихся на 3, то $\bar{A}$ – числа, не делящиеся на 3; $p\left(A\right) = 1/3$, $p\left(\bar{A}\right) = 1 - 1/3 = 2/3$ (рис.1,*г*).

Объединение $A \cup B$ – событие, состоящее в том, что произошло *хотя бы одно* из двух событий: *A или B*. Если события A и B *несовместны*, т.е. два множества A и B не пересекаются, то

$$p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right). \qquad (2)$$

Если же события A и B *совместны*, т.е. имеется непустое пересечение AB, то

$$p\left(A \cup B\right) = p\left(A\right) + p\left(B\right) - p\left(AB\right). \qquad (3)$$

(Пересечение двух множеств A и B – событие, состоящее в том, что выполняются одновременно A и B, – мы обозначаем, как принято в теории вероятностей, просто AB.)

Повторные испытания

Представим себе, что кубик бросили два раза (или – что сразу бросили два кубика); это – два независимых испытания.

Задача 1. *Какова вероятность, что при первом бросании выпадет не меньше 5 очков, а при втором – не меньше 4?*

Теперь множество E – это множество всех пар (x, y), где x и y – числа от 1 до 6 (x означает число очков, выпавшее на первом кубике, y – на втором). Все пары (x, y) равновероятны, их число равно $6 \cdot 6 = 36$. Удобно изобразить их в виде квадрата 6×6 клеток: клеточка с координатами x и y изображает пару (x, y) (рис.2). Из них надо выбрать те клетки, которые удовлетворяют условию задачи: $x \le 5$, $y \le 4$. Они заполняют прямоугольник 2×3 клетки. Итак, среди $6 \cdot 6$ пар выбрано $2 \cdot 3$, так что искомая вероятность равна

$$\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

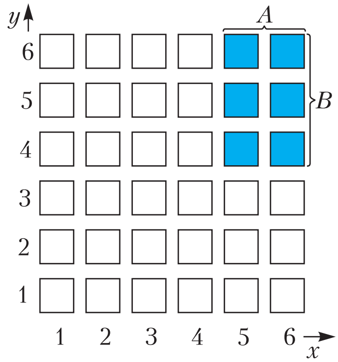

Рис. 2

Вообще, если событие A определяется по результату первого испытания, а B – по второму испытанию (т.е. A – это некоторый набор столбцов, а B – некоторый набор строк), то вероятность одновременного выполнения A и B равна

$$p\left(AB\right) = p\left(A\right) \cdot p\left(B\right). \qquad (4)$$

В этом случае события A к B называют *независимыми*. Правило произведения (4) можно использовать и для большего числа независимых испытаний. Например, вероятность, что при каждом из трех бросаний кубика выпадет пятерка или шестерка, равна $(1/3)^3 = 1/27$.

Рассмотрим теперь два примера, где речь тоже идет о двух испытаниях, т.е. E – множество пар (x, y), но интересующее нас событие зависит от x и y более сложным образом, так что условие «независимости» уже не выполнено.

Задача 2. *Какова вероятность, что хотя бы при одном из двух бросаний кубика выпадет не менее 5 очков?*

Соответствующие пары отмечены на рисунке 3, так что искомая вероятность равна $20/36 = 5/9$.

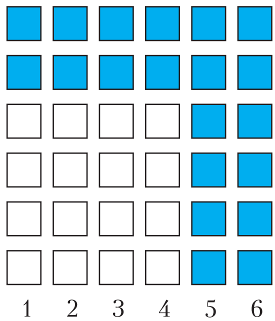

Рис. 3

Заметим, что можно рассуждать иначе: найти дополнительную вероятность того, что и при первом, и при втором бросании выпадет не более 4 очков. Это уже можно сделать по правилу произведения: $(2/3)\times(2/3) = 4/9$, поэтому искомая вероятность равна $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Задача 3. *Какова вероятность, что количества очков, выпавших при двух бросаниях, отличаются не более чем на 1?*

Нужные пары отмечены на рисунке 4, это 6 клеточек по диагонали $x = y$ и по 5 на двух соседних с ней параллельных прямых. Искомая вероятность равна $16/36 = 4/9$.

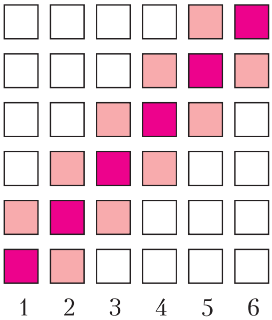

Рис. 4

Случайные числа и точки: равномерное распределение

Теперь речь пойдет о случайных точках на отрезке, на окружности, в квадрате… Как определяются вероятности в этом случае? Какие «события» можно рассматривать?

Покатим по столу круглый карандаш – цилиндр. Пусть его поверхность желтая, но некоторая полоска или несколько полосок ширины α покрашены в красный цвет (рис.5); какова вероятность, что карандаш остановится на красной, а не на желтой линии? (Здесь α – угол, измеряемый, скажем, в градусах.)

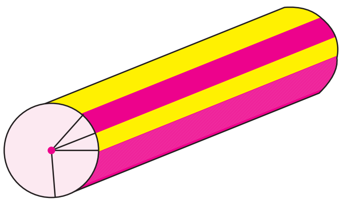

Рис. 5

Представим себе аналогичную задачу про карандаш с большим числом граней n, из которых k закрашены в красный цвет. Тогда искомая вероятность будет равна отношению k/n. Для круглого карандаша множество «элементарных событий» E – окружность, и вероятность каждого отдельного элемента – вероятность остановки на одной определенной линии – равна 0; но вероятность события «остановка на одной из красных линий» естественно считать равной отношению $\alpha/360°$.

Точно так же, говоря о случайной точке на отрезке (или на окружности) длины L, будем считать, что вероятность ее попадания в любой отрезок (или на дугу) длины d равна d/L. В соответствии с правилом (1), мы считаем также, что вероятность попадания в один из данных (непересекающихся) отрезков суммарной длины d равна d/L. Например, вероятность, что первая после запятой цифра случайного числа на отрезке $[0;1]$ – простое число, т. е. одна из цифр 2, 3, 5 и 7 (рис.6), равна $4/10 = 2/5$.

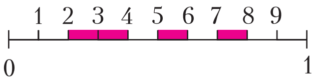

Рис. 6

Точно так же, говоря о случайной точке в квадрате или другой фигуре площади S, мы будем считать, что вероятность ее попадания в каждую область площади s равна s/S. Заметим, что и для длины на отрезке и для площади фигуры выполнены правила (1), (2) и (3).

Замечательно, что, выбирая независимо друг от друга два числа x и y на отрезке $[0;1]$, можно считать, что (x, y) – это координаты случайной точки в единичном квадрате: по аналогии с формулой произведения (4), вероятность попадания точки (x, y) в прямоугольник со сторонами a и b, параллельными осями Ox и Oy, равна произведению ab, т. е. площади этого прямоугольника.

Например, вероятность того, что случайное число, выбранное на отрезке $[0;1]$, находится на расстоянии не более 0,1 от

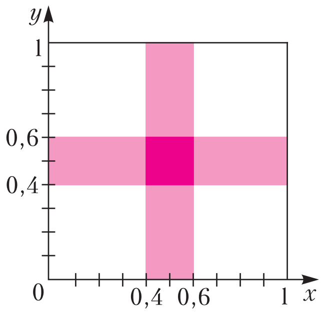

Рис. 7

середины отрезка, равна 0,2 (такие точки покрывают отрезок от 0,4 до 0,6). Если x и y – два случайных числа на отрезке $[0; 1]$, вероятность того, что *оба* они удалены от середины не более чем на 0,1, равна $0,2^2 = 0,04$, а вероятность того, что *хотя бы одно* из них удалено от середины не более чем на 0,1, равна 0,36 (рис.7); эту вероятность можно найти, сложив площади прямоугольников, составляющих «крест», а можно – перейдя к «дополнительным событиям» – по формуле $\left(1-0,8^2\right)$.

Теперь мы можем решить и задачу о встрече, сформулированную в начале статьи. Уточним ее следующим образом. Будем считать, что каждый из приятелей приходит в некоторый случайный момент, выбранный на отрезке $[0; 45]$ (в течение первых 45 минут условленного часа), и ждет другого 15 минут; тем самым они встретятся, если разность между моментами x и y их прихода (по модулю) не превосходит 15.

Изобразим на квадрате $0 \le x \le 45$, $0 \le y \le 45$ множество точек (x, y), в которых $|x - y| \le 15$ – оно ограничено прямыми $y - x = 15$ и $y - x = -15$, параллельными диагонали $x = y$ (рис.8). Площадь этого

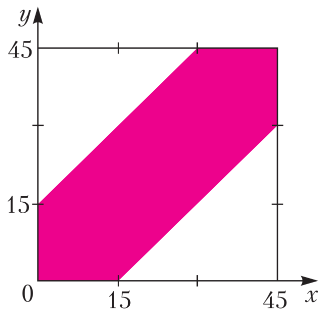

Рис. 8

множества равна $45^2 - 30^2$ (два белых треугольника вместе составляют квадрат со стороной 30), а искомая вероятность равна ее отношению к площади всего квадрата 45×45:

$$1-\frac{30^2}{45^2}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}.$$

Решим еще одну задачу про случайную точку (x, y).

Задача 4. *Найдите вероятность $p = p(a)$ того, что сумма $x + y$, где x, y – случайные числа на отрезке* $[0; 1]$, *больше данного числа a.*

Уравнение $x + y = a$ задает прямую, параллельную диагонали $x + y = 1$ квадрата. Искомая вероятность – площадь части квадрата, лежащей выше этой прямой. (При $a > 1$ это треугольник, при $a < 1$ – пятиугольник, и легче считать площадь дополнения.) Ответ записывается так:

$$p=\begin{cases}(2-a)^2/2 \text{ при } a \ge 1,\\ 1-a^2/2 \text{ при } a \le 1.\end{cases}$$

Соображения симметрии. Точки на окружности

Заметим, что при $a = 1$ в предыдущей задаче получается ответ $p = 1/2$. (Соответствующие точки (x, y) лежат над диагональю.) Его можно угадать сразу, не рисуя картинку на квадрате: если x, y – числа, случайно выбираемые на отрезке $[0; 1]$, то условие $x + y \le 1$ можно записать в виде $x \le 1 - y$ и прочесть так: «x ближе к 0, чем y к 1». Ясно, что дополнительное условие получается просто заменой x на y и имеет ту же вероятность: ведь роли x и y, а также концов отрезка совершенно равноправны.

Вот еще один пример.

Задача 5. *На отрезке* $[0; 1]$ *случайно выбираются три числа. Какова вероятность того, что а) выбранное последним число наибольшее; б) числа идут в порядке возрастания?*

Здесь речь идет уже не о двух, а о трех числах x, y, z. Тройки (x, y, z) можно было бы рассматривать как координаты точки в кубе и подсчитывать объемы нужных множеств. Но в этом нет нужды. Ведь ясно, что все 6 вариантов расположения трех чисел: $x<y<z$, $y<x<z$, $x<z<y$, $y<z<x$, $z<x<y$, $z<y<x$ совершенно равноправны и имеют одинаковую вероятность по 1/6. (При этом совпадение хотя бы двух из трех чисел имеет нулевую вероятность. – *Прим. ред.*) Таким образом, ответ на вопрос б) 1/6, а на вопрос а) 1/3 (ему отвечают два первых варианта).

Решим теперь задачу об остроугольном треугольнике, сформулированную в начале статьи. Ясно, что при любом повороте окружности вероятности событий и условие «остроугольности» сохраняются; так что мы можем считать, что одна из трех выбираемых вершин A, B, C – скажем C – фиксирована, а две другие уже выбираются случайно. Будем задавать их положения величинами дуг $CA=\alpha$, $CB=\beta$, отсчитываемых против часовой стрелки. Будем измерять дуги в радианах, тогда пара (α,β) – это точка в квадрате $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$. По теореме о том, что величина вписанного угла измеряется половиной дуги между его сторонами, углы треугольника ABC равны $\pi-\beta/2$, $\alpha/2$ и $(\beta-\alpha)/2$ (мы считаем, что $\beta>\alpha$, как на рисунке 9; случай $\alpha>\beta$ совершенно аналогичен – α и β меняются ролями). Точки (α,β) в треугольнике $\alpha<\beta<2\pi$, для которых все три угла A, B, C меньше $\pi/2$, т.е. $\beta>\pi$, $\alpha<\pi$ и $\beta-\alpha<\pi$, заполняют внутренность меньшего треугольника, образуемого средними линиями большего (рис.10). Ситуация в нижнем треугольнике $\beta<\alpha<2\pi$ симметрична относительно диагонали $\alpha=\beta$ квадрата. Поэтому искомая вероятность равна 1/4.

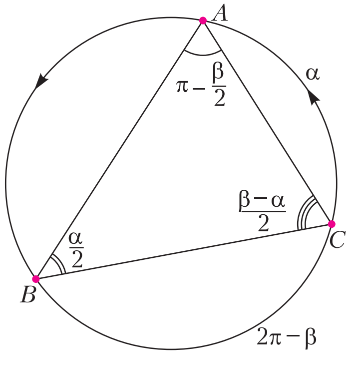

Рис. 9

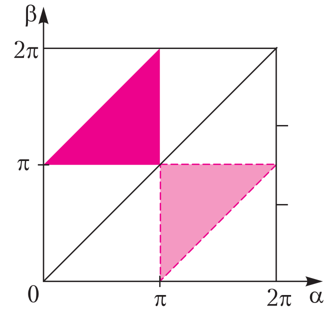

Рис. 10

У этой задачи есть и другое удивительно красивое решение, которое позволяет решить аналогичную задачу для n точек (см. упражнение 9 в конце статьи); мы узнали его от физика В.В.Фока и математика Ю.В.Чеканова.

Будем искать дополнительную вероятность того, что три точки A, B, C являются вершинами *тупоугольного* треугольника.

Рассмотрим для каждой точки M окружности диаметрально противоположную ей точку M' и полукруг, для которого M' служит серединой дуги. Тройка A, B, C «тупоугольная», если и только если полукруги, соответствующие точкам A, B и C, пересекаются по некоторому сектору (рис.11). (Для каждого радиуса OD в выделенном секторе все углы DOA, DOB, DOC – тупые; такой радиус OD существует, если A, B, C лежат на одной полуокружности или, что эквивалентно, образуют «тупоугольную» тройку.)

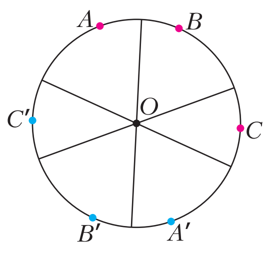

Рис. 11

Выбор случайных точек проведем в два этапа. Сначала отметим произвольно три пары диаметрально противоположных точек и проведем для каждой пары диаметр, относительно которого она симметрична.

А затем в каждой паре независимо выберем (с вероятностью 1/2) одну из точек. Докажем, что из 8 вариантов выбора точек ровно в 6 получится «тупоугольная» тройка A, B, C. В самом деле, три диаметра делят круг на 6 секторов, причем каждый сектор можно получить как пересечение трех определенных полукругов, соответствующих некоторому выбору точек A, B, C. Итак, вероятность получить «тупоугольную» тройку равна $6/8 = 3/4$, а значит, дополнительная вероятность равна $1/4$.

Задача Бюффона

Мы привыкли, что вероятность – это всегда дробь с небольшими целыми числителем и знаменателем. Но в заключение приведем две задачи, где в ответе встречается число π. Первая почти очевидна.

Задача 6. *На большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки 1 случайно бросают точку. Какова вероятность, что она будет находиться на расстоянии меньше $1/2$ от центра некоторой клетки?*

Достаточно рассмотреть одну клетку. Точки, находящиеся на расстоянии не более $1/2$ от ее центра, заполняют круг площади $\pi/4$. Это и есть ответ: искомая вероятность (отношение площади круга к площади клетки) равна $\pi/4$.

Задача 7 (задача Бюффона об игле). *Плоскость разлинована на полосы шириной 1. На нее бросают иглу (отрезок) длиной 1. Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий?*

У этой задачи удивительный ответ: $2/\pi$. Откуда же берется π, если в условии нет речи ни об окружностях, ни о расстояниях?

Наметим коротко одно из решений. Положение иглы (если не говорить о смещении ее вдоль линий, очевидно, не играющем роли) определяется двумя параметрами: расстоянием y конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал, $0 < y < 1$, и углом α иглы с прямой, перпендикулярной линиям (рис.12,*а*). Можно считать, по соображениям симметрии, что $\alpha < \pi/2$. Условие, при котором игла пересекает

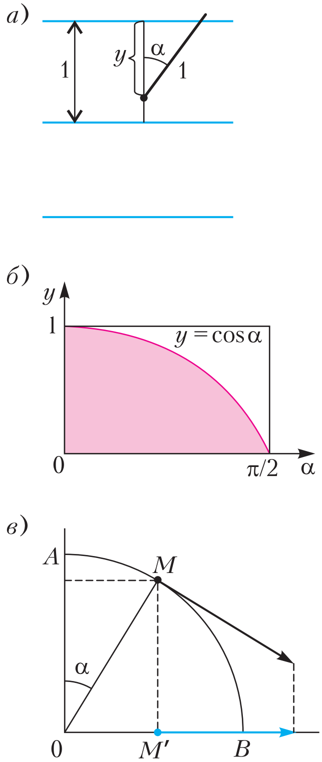

Рис. 12

край полосы: $y < \cos\alpha$. Итак, среди точек (α, y) в прямоугольнике $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < y < 1$ мы должны выбрать лежащие ниже линии $y = \cos\alpha$ (рис.12,*б*) и найти отношение площади S полученной фигуры к площади прямоугольника (равной $\pi/2$). Для тех, кто знаком с понятием интеграла, эта задача нетрудная: $\int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = 1$. Но можно получить ответ, опираясь на аналогию из механики. Представим себе точку, равномерно с единичной скоростью проходящую дугу AB в 1/4 круга радиуса 1 (рис.12,*в*). Когда точка M находится в положении α на дуге $(0 < \alpha < \pi/2)$, скорость ее проекции M' на радиус OB равна как раз $\cos\alpha$. Так что рисунок 12,*б* – это график скорости точки M', а площадь S под графиком равна пройденному этой проекцией пути, т.е. $S = OB = 1$.

В заключение предлагаем несколько задач, похожих на те, с которыми мы познакомились.

Упражнения

1. Какова вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут

а) два числа с суммой не меньше 10;

б) два числа, из которых первое делится на второе?

2. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени и дожидается автобуса одного из двух маршрутов, идущих с интервалами 10 и 15 минут. Найдите вероятность $p = p(t)$ того, что ему придется ждать не менее t минут.

3. Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность, что три точки, случайно брошенные на отрезок, попадут в три разных кусочка?

4. На окружности случайно выбраны четыре точки A, B, C, D. Какова вероятность того, что отрезки AC и BD пересекаются?

5. а) В окружности проведен диаметр. На нем случайно выбирается точка и через нее проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Какова вероятность, что длина хорды больше радиуса окружности?

б) На окружности случайно выбираются две точки. Какова вероятность, что длина соединяющей их хорды больше радиуса?

в) В круге случайно выбрана точка. Какова вероятность, что хорды с серединой в этой точке больше радиуса?

г) Решите аналогичные задачи про хорду длины $r\sqrt{3}$, где r – радиус.

Замечание. Задачи а), б), в) как бы три варианта одной и той же: проведем случайную прямую, пересекающую данную окружность; какова вероятность, что длина высекаемой хорды больше радиуса? Но ответ в них разный (парадокс Бертрана)!

6. На окружности случайно выбраны три точки. Какова вероятность, что у треугольника с вершинами в этих точках а) есть угол больше 30°; б) все углы больше 30°; в) все углы меньше 120°?

7. На отрезке случайно выбраны две точки. Какова вероятность, что из отрезков, на которые он разбит, можно составить треугольник?

8. Плоскость разбита сеткой прямых на а) квадраты; б) правильные треугольники со стороной 1. Какова вероятность, что монета диаметра 1, случайно брошенная на плоскость, закроет одну из вершин сетки?

9. а) Найдите вероятность того, что выпуклый n-угольник с вершинами в случайных точках окружности содержит ее центр?

б) Докажите, что вероятность того, что n случайно выбранных точек на сфере лежат на одной полусфере (по одну сторону от некоторого большого круга), равна $\left(n^2 - n + 2\right)/2^n$.