O. V. Kuz'min, O. V. Leonova, Touchard polynomials and their applications,
*Diskr. Mat.*, 2000, Volume 12, Issue 3, 60–71

Дискретная математика

том 12 выпуск 3 * 2000

УДК 519.1

# Полиномы Тушара и их приложения

© 2000 г. О. В. Кузьмин, О. В. Леонова

Рассматриваемые в статье полиномы являются одним из обобщений полиномов Белла и введены Тушаром в связи с изучением некоторых циклических подстановок. Для полиномов Тушара получены дифференциально-разностные уравнения и рекуррентные соотношения, а также обобщения некоторых известных ранее свойств полиномов, их перечислительные интерпретации и вероятностные приложения, в частности, при описании одноканальной системы массового обслуживания.

## 1. Введение

Понятие полинома разбиений, полинома от нескольких переменных, определяемого с помощью суммы по различным разбиениям значений его индекса, введено Беллом в [1]. Один из таких полиномов, связанный с производными от композиции функций, в книге [2] назван полиномом Белла. Ряд свойств коэффициентов $n$-го полинома Белла, так называемых частичных полиномов Белла $A_{n,k}$, и сопряженных с ними полиномов Платонова $B_{n,k}$ приведен в статье [3].

Тушар (см. [4]) в связи с изучением некоторых циклических подстановок ввел ряд обобщений полиномов Белла. Для одного из таких обобщений $T_{n,k}$, названного полиномами Тушара, в [5] получены экспоненциальные производящие функции и рекуррентные соотношения. В [6] рассматриваются свойства некоторых частных случаев полиномов $T_{n,k}$ и вновь введенных полиномов Тушара $C_{n,k}$. Полученные формулы использованы при нахождении некоторых вероятностей в задаче о случайных блужданиях.

В данной статье продолжается начатое авторами в [7] изучение полиномов Тушара, при этом получены обобщения некоторых из приведенных в [3] свойств полиномов $A_{n,k}$, перечислительные интерпретации и вероятностные приложения. Во втором разделе приводятся необходимые определения и свойства. В третьем разделе для полиномов $T_{n,k}$ получены дифференциально-разностные уравнения и рекуррентные соотношения, которые позволяют по фиксированной $i$-й строке матрицы, составленной из этих полиномов, восстановить все ее начальные строки. Рассматривается ряд частных случаев. В четвертом разделе статьи получено новое соотношение для полиномов $C_{n,k}$. Известные и новые перечислительные интерпретации изучаемых полиномов Тушара обсуждаются в пятой части. В последней части приводится пример приложения полиномов Тушара при описании одноканальной системы массового обслуживания.

## 2. Основные понятия и вспомогательные результаты

Полиномы Тушара $T_{n,k} = T_{n,k}(x,y)$ для $n,k \geqslant 1$, $k \leqslant n$, имеют вид

$$T_{n,k}(x,y) = \sum \frac{n!}{k_1!\ldots k_n! r_1!\ldots r_n!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{x_n}{n!}\right)^{k_n}\left(\frac{y_1}{1!}\right)^{r_1}\cdots\left(\frac{y_n}{n!}\right)^{r_n} \qquad (1)$$

(см. [5]), где $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем таким наборам $(k_1, \ldots, k_n; r_1, \ldots, r_n)$ целых неотрицательных чисел, что

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = k, \qquad \sum_{i=1}^{n} i(k_i + r_i) = n.$$

Дополнительно полагают $T_{0,0}(x,y) = 1$.

Из (1) следует, что

$$T_{n,0}(x,y) = Y_n(y),$$

где $Y_n(y) = Y_n(y_1, \ldots, y_n)$ — хорошо известные полиномы Белла (см., например, [2]) и

$$T_{n,n}(x,y) = x_1^n = A_{n,n}(x),$$

здесь $A_{n,k}(x) = A(n,k;x_1,\ldots,x_{n-k+1})$ — частичные полиномы Белла (см., например, [8]). Известна производящая функция

$$T_k(x,y;t) = \sum_{n=k}^{\infty} T_{nk}(x,y)\frac{t^n}{n!} = (x(t))^k \frac{e^{y(t)}}{k!},$$

где

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{t^i}{i!}, \qquad y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{t^i}{i!}.$$

Полиномы Тушара и Белла связаны соотношением

$$\sum_{k=0}^{n} T_{n,k}(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} Y_j(x) Y_{n-j}(y). \qquad (2)$$

## 3. Рекуррентные соотношения для полиномов Тушара

Выведем несколько рекуррентных соотношений для полиномов Тушара $T_{nk}(x,y)$.

Пусть, по-прежнему, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — формальные переменные. Введем обозначение

$$\mathscr{D} = x_2 \partial/\partial x_1 + x_3 \partial/\partial x_2 + \ldots + y_2 \partial/\partial y_1 + y_3 \partial/\partial y_2 + \ldots$$

Для композиции операторов $\mathscr{D}$ и $\partial/\partial x_i$, а также $\mathscr{D}$ и $\partial/\partial y_i$ имеют место следующие утверждения.

**Лемма 1.** *Для каждого $i \geqslant 2$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{D} = \mathscr{D}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} \tag{3}$$

*и, кроме того,*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\mathscr{D} = \mathscr{D}\frac{\partial}{\partial x_1}. \tag{4}$$

*Доказательство.* Несложными преобразованиями левой части равенства (3) получаем его правую часть:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathscr{D} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(x_{j+1}\frac{\partial}{\partial x_j} + y_{j+1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\right)$$
$$= \sum_{j\neq i-1}\left(x_{j+1}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + y_{j+1}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_i\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{i-1}} + y_i\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_{i-1}}$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty}\left(x_{j+1}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + y_{j+1}\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} = \mathscr{D}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}.$$

Подобным же образом можно убедиться и в справедливости соотношения (4). Лемма доказана.

Отметим, что в частном случае $y_i = 0$ соотношения (3) и (4) получены в [3]. Аналогично может быть доказана следующая лемма.

**Лемма 2.** *Для каждого $i \geqslant 2$ справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\mathscr{D} = \mathscr{D}\frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_{i-1}} \tag{5}$$

*и, кроме того,*

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\mathscr{D} = \mathscr{D}\frac{\partial}{\partial y_1}. \tag{6}$$

**Теорема 1.** *Полиномы Тушара удовлетворяют системе дифференциально-разностных уравнений*

$$T_{nk}(x,y) = x_1 T_{n-1,k-1}(x,y) + y_1 T_{n-1,k}(x,y) + \mathscr{D}T_{n-1,k}(x,y), \tag{7}$$

*где $n, k \geqslant 1, n \geqslant k-1$.*

*Доказательство.* Известно (см. [5]), что

$$T_{n,k}(x,y) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-j}(y). \tag{8}$$

Используя известное соотношение для биномиальных коэффициентов, последнее равенство перепишем в виде

$$T_{n,k}(x,y) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}A_{j,k}(x)Y_{n-j}(y) + \sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-j}(y). \tag{9}$$

Рассмотрим первую сумму в правой части (9). Учитывая соотношение

$$A_{n+1,k}(x) = x_1 A_{n,k-1}(x) + \mathscr{D} A_{n,k}(x)$$

(см. [2]), где

$$\mathscr{D} = x_2\partial/\partial x_1 + x_3\partial/\partial x_2 + \dots ,$$

находим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}A_{j,k}(x)Y_{n-j}(y) &= \sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}(x_1A_{j-1,k-1}(x) + \mathscr{D}A_{j-1,k}(x))Y_{n-j}(y)\\
&= x_1\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}A_{j-1,k-1}(x)Y_{n-j}(y)\\
&\quad + \mathscr{D}\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}A_{j-1,k}(x)Y_{n-j}(y)\\
&= x_1\sum_{j=k-1}^{n-1}\binom{n-1}{j}A_{j,k-1}(x)Y_{n-1-j}(y)\\
&\quad + \mathscr{D}\sum_{j=k}^{n-1}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-1-j}(y).
\end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношения (8) получаем, что

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j-1}A_{j,k}(x)Y_{n-j}(y) = x_1T_{n-1,k-1}(x,y) + \mathscr{D}T_{n-1,k}(x,y). \tag{10}$$

Рассмотрим вторую сумму в правой части (9). Учитывая соотношение

$$Y_{n+1}(y) = (y_1 + \mathscr{P})Y_n(y)$$

(см. [2]), где

$$\mathscr{P} = y_2\partial/\partial y_1 + y_3\partial/\partial y_2 + \dots ,$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)(y_1+\mathscr{P})Y_{n-j-1}(y) &= y_1\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-1-j}(y)\\
&\quad + \mathscr{P}\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-1-j}(y)\\
&= y_1\sum_{j=k}^{n-1}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-1-j}(y)\\
&\quad + \mathscr{P}\sum_{j=k}^{n-1}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-1-j}(y).
\end{aligned}$$

Из последнего равенства и соотношения (8) находим, что

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n-1}{j}A_{j,k}(x)Y_{n-j}(y)=y_1T_{n-1,k}(x,y)+\mathscr{P}T_{n-1,k}(x,y). \tag{11}$$

Подставив соотношения (10) и (11) в (9) и учитывая, что $\mathscr{Q}=\mathscr{D}+\mathscr{P}$, получим соотношение (7). Теорема доказана.

Отметим, что в частном случае $y_i=0$, $\mathscr{Q}=\mathscr{D}$ соотношение (7) для частичных полиномов Белла приводится в [2].

Для полиномов $T_{nk}(x,y)$ имеют место следующие утверждения.

**Теорема 2.** *Для $n\geqslant 1$ справедливы соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}T_{nk}(x,y)=\binom{n}{i}T_{n-i,k-1}(x,y), \tag{12}$$

*где $k,i\geqslant 1, k+i\leqslant n+1$.*

*Доказательство.* Доказательство проведем индукцией по $n$ отдельно для $i=1$ и $i\geqslant 2$.

Докажем соотношение (12) при $i=1$. Для всех $n=k\geqslant 1$ и $n=2,k=1$ оно справедливо, поскольку

$$T_{nn}(x,y)=x_1^n,\quad T_{21}(x,y)=2x_1y_1+x_2,\quad T_{10}(x,y)=y_1.$$

Пусть равенство (12) при $i=1$ выполняется для всех $n<m$, где $m$ — целое число, $m\geqslant 3$. От обеих частей соотношения (7), полагая в нем $n=m$, берем частные производные по $x_1$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}T_{mk}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1T_{m-1,k-1})(x,y)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial x_1}(y_1T_{m-1,k})(x,y)+\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathscr{Q}T_{m-1,k}(x,y)).\end{aligned}$$

Согласно формуле (4) и предположению индукции из последнего соотношения получим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}T_{mk}(x,y)&=T_{m-1,k-1}(x,y)+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}T_{m-1,k-1}(x,y)\\&\quad+y_1\frac{\partial}{\partial x_1}T_{m-1,k}(x,y)+\mathscr{Q}\frac{\partial}{\partial x_1}T_{m-1,k}(x,y)\\&=T_{m-1,k-1}(x,y)+x_1(m-1)T_{m-2,k-2}(x,y)\\&\quad+y_1(m-1)T_{m-2,k-1}(x,y)+\mathscr{Q}((m-1)T_{m-2,k-1}(x,y)\\&=T_{m-1,k-1}(x,y)+(m-1)(x_1T_{m-2,k-2}(x,y)\\&\quad+y_1T_{m-2,k-1}(x,y)+\mathscr{Q}T_{m-2,k-1}(x,y))\\&=T_{m-1,k-1}(x,y)+(m-1)T_{m-1,k-1}(x,y)\\&=mT_{m-1,k-1}(x,y),\end{aligned}$$

что и дает соотношение (12) при $i-1, n=m$.

Докажем соотношение (12) при $2 \leqslant i \leqslant n-k+1$. Для $i=2$, $n=2$, $k=1$ оно проверяется непосредственно, поскольку

$$T_{21}(x,y) = 2x_1y_1 + x_2, T_{00}(x,y) = 1.$$

Пусть равенство (12) при $2 \leqslant i \leqslant n-k+1$ справедливо для всех $n<m$ (а, следовательно, и для $i<m$), $m>3$. Взяв от обеих частей соотношения (7) при $n=m$ частные производные по $x_i, 2 \leqslant i \leqslant m-1$, получим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}T_{mk}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_1T_{m-1,k-1}(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x_i}(y_1T_{m-1,k}(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathscr{Q}T_{m-1,k}(x,y)).$$

Из последнего соотношения согласно равенствам (3), (7) (при $i=2$) и формуле (12) уже доказанной для $i=1$ по предположению индукции

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}T_{mk}(x,y) &= x_1\frac{\partial}{\partial x_i}T_{m-1,k-1}(x,y) + y_1\frac{\partial}{\partial x_i}T_{m-1,k}\\ &\quad + \mathscr{Q}\frac{\partial}{\partial x_i}T_{m-1,k}(x,y) + \frac{\partial}{\partial x_{i-1}}T_{mk}(x,y)\\ &= x_1\binom{m-1}{i}T_{m-i-1,k-2}(x,y) + y_1\binom{m-1}{i}T_{m-i-1,k-1}(x,y)\\ &\quad + \mathscr{Q}\binom{m-1}{i}T_{m-i-1,k-1}(x,y) + \binom{m-1}{i}T_{m-i,k-1}(x,y)\\ &= \binom{m-1}{i}(x_1T_{m-i-1,k-2}(x,y) + y_1T_{m-i-1,k-1}(x,y)\\ &\quad + \mathscr{Q}T_{m-i-1,k-1}(x,y)) + \binom{m-1}{i-1}T_{m-i,k-1}(x,y)\\ &= \binom{m-1}{i}T_{m-i,k-1}(x,y) + \binom{m-1}{i-1}T_{m-i,k-1}(x,y)\\ &= \binom{m}{i}T_{m-i,k-1}(x,y).\end{aligned}$$

Сопоставление первого и последнего звеньев полученной цепочки равенств дает соотношение (12) для $2 \leqslant i \leqslant n-k$, $n=m$.

Убедимся в справедливости равенства (12) при $i=m$. Пусть равенство (12) справедливо при $i=n=m-1$. Взяв от обеих частей соотношения (7) при $n=m$ частные производные по $x_m$, получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_m}T_{mk}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_m}(x_1T_{m-1,k-1}(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x_m}(y_1T_{m-1,k}(x,y)) + \frac{\partial}{\partial x_m}(\mathscr{Q}T_{m-1,k}(x,y)).$$

Поскольку, согласно формуле (1), $\partial/\partial x_mT_{mk}(x,y) \neq 0$ лишь при $k=1$ и, кроме того, $\partial/\partial x_mT_{m-1,k}(x,y)=0$, предыдущее соотношение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_m}T_{m1}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x_m}(\mathscr{Q}T_{m-1,1}(x,y)).$$

Отсюда, согласно равенству (3) и предположению индукции, находим, что

$$\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m1}(x,y) = \mathscr{Q}\left(\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m-1,1}(x,y)\right) + \frac{\partial}{\partial x_{m-1}} T_{m-1,1}(x,y)$$
$$= \binom{m-1}{m-1} T_{0,0}(x,y),$$

что приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x_m} T_{m1}(x,y) = T_{0,0}(x,y),$$

то есть соотношению (12) при $i = n = m$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $y_i = 0$ из формулы (12) получаем соотношение для частичных полиномов Белла, приведенное, например, в [9].

Также методом математической индукции с использованием формулы (7) и соотношений (5) и (6) может быть доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** *Для $n \geqslant 1$ справедливы соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial y_i} T_{nk}(x,y) = \binom{n}{i} T_{n-i,k}(x,y),$$

*где $k \geqslant 0, i \geqslant 1, k+i \leqslant n$.*

В [6] рассматривается следующий частный случай полиномов Тушара:

$$T^*_{n,k}(x,y) = T_{n,k}(x^*_1,\dots,x^*_n;y^*_1,\dots,y^*_n),$$

где $x^*_k = (k-1)!x_k, y^*_k = (k-1)!y_k$, $k = 1,\dots,n$. Очевидно, что для полиномов $T^*_{n,k}(x,y)$ справедливы все утверждения теорем 1–3.

## 4. Рекуррентные соотношения для полиномов

Широко известные цикловые индикаторы симметрической группы имеют следующий вид

$$C_n(t) = C_n(t_1,\dots,t_n) = \sum \frac{n!}{k_1!\dots k_n!}\left(\frac{t_1}{1}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{t_n}{n}\right)^{k_n},$$

(см., например, [2]), где $t = (t_1,\dots,t_n)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем таким наборам $(k_1,\dots k_n)$ целых неотрицательных чисел, что

$$k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n.$$

Дополнительно полагают, что $C_0 = 1$.

Цикловые индикаторы связаны с полиномами Белла соотношениями

$$C_n(t) = Y_n(t_1,t_2,2!t_3,\dots,(n-1)!t_n) \tag{13}$$

(см., например, [2]).

В [6] при помощи соотношения

$$C_{n,k}(x,y) = C_{n,k}(x_1,\dots;y_1,\dots) = \binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y), \tag{14}$$

где $0 \leqslant k \leqslant n$, $n \geqslant 1$, введены полиномы Тушара $C_{n,k}(x,y)$. Просуммируем по $k$ обе части равенства (14):

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_k(x) C_{n-k}(y).$$

Далее, перейдя по формуле (13) к полиномам Белла, получим, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(x,y)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Y_k(x_1, x_2, 2!x_3, \dots, (k-1)!x_k) Y_{n-k}(y_1, y_2, 2!y_3, \dots, (n-k-1)!y_{n-k}).$$

Сопоставляя полученное выражение с формулой (2), находим, что полиномы Тушара $T^*_{n,k}(x,y)$ и $C_{n,k}(x,y)$ связаны соотношением

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} T_{n,k}(x^*, y^*),$$

где $x^*_i = (i-1)!x_i$, $y^*_i = (i-1)!y_i$, $i = 1, \dots, n$.

**Теорема 4.** *Полиномы $C_{n,k}(x,y)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$C_{n+1,k}(x,y) = \sum_{i=0}^{k-1} (n)_i x_{i+1} C_{n-i,k-i-1}(x,y) + \sum_{i=0}^{n-k} (n)_i y_{i+1} C_{n-i,k}(x,y). \tag{15}$$

*Доказательство.* В книге [2] приводится рекуррентная формула для цикловых индикаторов симметрических групп

$$C_{n+1}(t) = \sum_{i=0}^{n} (n)_i t_{i+1} C_{n-i}(t). \tag{16}$$

Полагая в формуле (16) $t_i = x_i$, $n = k-1$, получаем, что

$$C_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} (k-1)_i x_{i+1} C_{k-i-1}(x).$$

Подставляя последнее соотношение в (14), находим, что

$$C_{n+1,k}(x,y) = \binom{n+1}{n} C_{n-k-1}(y) \sum_{i=0}^{k-1} (k-1)_i x_{i+1} C_{k-i+1}(x)$$
$$= \frac{n+1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (n)_i x_{i+1} C_{n-i,k-i-1}(x,y)$$

или

$$\frac{k}{n+1}C_{n+1,k}(x,y) = \sum_{i=0}^{k-1}(n)_i x_{i+1} C_{n-i,k-i-1}(x,y). \tag{17}$$

Аналогично из формулы (16) при $t_i = y_i$, $n = n - k$ получаем равенство

$$C_{n-k+1}(y) = \sum_{i=0}^{n-k}(n-k)_i y_{i+1} C_{n-k-i}(y).$$

Подставляя данное соотношение в (14), находим, что

$$\begin{aligned} C_{n+1,k}(x,y) &= \binom{n+1}{k} C_k(x) \sum_{i=0}^{n-k}(n-k)_i y_{i+1} C_{n-k-i}(y) \\ &= \frac{n+1}{n+1-k} \sum_{i=0}^{n-k}(n)_i y_{i+1} C_{n-i,k}(x,y). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{n+1-k}{n+1}C_{n+1,k}(x,y) = \sum_{i=0}^{n-k}(n)_i y_{i+1} C_{n-i,k}(x,y). \tag{18}$$

Суммируя соответственно правые и левые части равенств (17) и (18), получим соотношение (15). Теорема доказана.

## 5. Перечислительные интерпретации

Обсудим некоторые перечислительные интерпретации изучаемых комбинаторных объектов.

Для полиномов Тушара $T_{n,k}(x,y)$ известна следующая перечислительная интерпретация (см. [5]). Число $T_{nk}(x,y)$ равно числу перестановок $n$ элементов, скажем, $u_1, \ldots, u_n$, в которых точно $k$ циклов обладают свойством $A$, а все остальные — свойством $B$, где $x_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, есть число циклических перестановок с циклом длины $j$, которые обладают свойством $A$, а $y_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, есть число циклических перестановок с циклом длины $j$, которые обладают свойством $B$, при условии, что каждый цикл длины $j$ определяет одно из чисел $x_j$ или $y_j$.

В [6] приводится один специальный случай указанной комбинаторной интерпретации.

Пусть свойство $A$ задано следующим образом: элементы $u_{i_1}, \ldots, u_{i_j}$ цикла длины $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, появляются так, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_j$, а свойство $B$ состоит в том, что элементы $u_{i_1}, \ldots, u_{i_j}$ цикла длины $j$, $1 \leqslant j \leqslant n$, появляются на любых местах, исключая те, которые соответствуют свойству $A$. Тогда $x_j = 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и $y_j = (j-1)! - 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и число перестановок из $n$ элементов, в которых точно $k$ циклов, обладающих свойством $A$, равно

$$T_{nk}(1,1,\ldots;0,0,1,\ldots,(j-1)!-1,\ldots) = \sum_{i=0}^{n}(n)_i \sum_{j=0}^{n-k-i}(-1)^j \binom{k+j}{k} S(n-i,k+j),$$

где $S(n,k)$ — числа Стирлинга второго рода.

Можно предложить следующую перечислительную интерпретацию полиномов Тушара $T_{n,k}(x,y)$. Рассмотрим все разбиения $n$-множества $N_n$ на непустые блоки, среди которых $k$ блоков обладают свойством $A$, а остальные — свойством $B$. Вес блока, состоящего из $j$ элементов, обладающих свойством $A$, считаем равным $x_j$, вес элемента со свойством $B$ — равным $y_j$, а вес всего разбиения — равным произведению весов его блоков. Тогда $T_{n,k}(x,y)$ есть сумма весов всех разбиений $N_n$ на непустые блоки, среди которых $k$ блоков обладают свойством $A$, а остальные — свойством $B$.

Из приведенных интерпретаций при $y_j = 0$ получаем известные интерпретации частичных полиномов Белла $A_{n,k}(x)$ (см., например, [10, 11] и [3]).

Полиномам $T^*_{n,k}(x,y)$ можно дать следующую перечислительную интерпретацию. Число $T^*_{n,k}(x,y)$ равно сумме весов всех подстановок степени $n$, где $k$ циклов обладают свойством $A$, а все остальные — свойством $B$, при условии, что вес цикла длины $j$, который обладает свойством $A$ равен $x^*_j = (j-1)!x_j$, вес цикла со свойством $B$ равен $y^*_j = (j-1)!y_j$, а вес подстановки равен произведению весов составляющих ее циклов.

Из полученной интерпретации при $y^*_j = 0$ получаем перечислительную интерпретацию полиномов $C_n(x)$, а при $x^*_j = 1$ и $y^*_j = 0$ — интерпретацию чисел Стирлинга 1 рода $s(n,k)$ (см., например, [2]).

## 6. Применения

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием (см., например, [12]). Пусть $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots$ — моменты поступлений требований и $v_1, v_2, \ldots$ — времена их обслуживания. Тогда $u_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geqslant 1$, представляют собой интервалы между поступлениями требований в систему. Положим

$$\zeta_k = v_{k-1} - u_k, \qquad k \geqslant 1,$$

и

$$S_0 \equiv 0, \qquad S_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n, \quad n \geqslant 1.$$

Будем считать, что $\zeta_k$, $k \geqslant 1$, — взаимно независимые одинаково распределенные случайные величины и

$$F(x) = \mathsf{P}\{\zeta_i \leqslant x\}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Последовательность $\{S_n, n \geqslant 0\}$ представляет собой случайное блуждание, соответствующее функции распределения $F(x)$. Для него определим две последовательности случайных величин $\{N_k, k \geqslant 0\}$ и $\{\bar{N}_k, k \geqslant 0\}$, полагая

$$\bar{N}_0 \equiv 0, \quad \bar{N}_1 = \min\{n > 0 \colon S_n \leqslant 0\}, \quad \bar{N}_k = \min\{n > \bar{N}_{k-1} \colon S_n \leqslant S_{\bar{N}_{k-1}}\}, \quad k \geqslant 2;$$
$$N_0 \equiv 0, \quad N_1 = \min\{n \colon S_n > 0\}, \quad N_k = \min\{n \colon S_n > S_{N_k - 1}\}, \quad k \geqslant 2.$$

Случайная величина $N_k$ называется $k$-м верхним лестничным моментом, а $S_{N_k}$ — соответственно $k$-й лестничной высотой. Аналогично, $\bar{N}_k$ и $S_{\bar{N}_k}$ — нижние $k$-е лестничные момент и высота. Пары случайных величин $(N_k, S_{N_k})$ и $(\bar{N}_k, S_{\bar{N}_k})$ назовем соответственно $k$-й верхней и $k$-й нижней лестничной точкой случайного блуждания $S_n$. Для удобства положим $N_1 = N$, $\bar{N}_1 = \bar{N}$. Совместное распределение первой верхней лестничной точки $(N, S_N)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \mathsf{P}\{N = n, S_N \leqslant x\} \\ &= \mathsf{P}\{S_1 \leqslant 0, S_2 \leqslant 0, \dots, S_{n-1} \leqslant 0, 0 < S_n \leqslant x\}. \end{aligned}$$

Аналогично совместное распределение первой нижней лестничной точки может быть записано в виде

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \mathsf{P}\{\bar{N} = n, S_{\bar{N}} \leqslant x\} \\ &= \mathsf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_N \leqslant x < 0\}. \end{aligned}$$

Найдем данные вероятности, используя полиномы Тушара. Пусть $N_n$ — число первых положительных частичных сумм $S_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Известно, (см., например, [13]), что

$$\mathsf{P}\{N_n = n\} = \mathsf{P}\{\nu_1\delta(S_{\nu_1}) + \ldots + \nu_r\delta(S_{\nu_r}) = n\},$$

где $\nu_1, \dots, \nu_r$ — случайные величины, характеризующие длину непересекающихся циклов перестановки, выбранной случайным образом среди перестановок $n$ объектов, причем $\nu_1 + \ldots + \nu_r = n$, $S_{\nu_r} = \zeta_{k_{\nu_1}} + \ldots + \zeta_{k_{\nu_r}}$ и

$$\delta(S_{\nu_r}) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_{\nu_r} > 0, \\ 0, & \text{если } S_{\nu_r} \leqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что мы ищем число перестановок, в которых все циклы обладают свойством $A$, состоящим в том, что сумма случайных величин, которые составляют цикл, положительна. Тушар [4] доказал, что число перестановок $n$ элементов, в которых все циклы обладают свойством $A$ выражается через

$$A_n = Y_n(a_1^*, \dots, a_n^*),$$

где $a_k^* = (k-1)!\,a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, так что

$$g_k(x) = \frac{1}{k!}Y_n(a_1^*, \dots, a_n^*) = \frac{1}{k!}C_k(a_1, \dots, a_k).$$

Аналогично показывается, что

$$f_{n-k}(x) = \frac{1}{(n-k)!}C_{n-k}(1 - a_1, \dots, 1 - a_{n-k}),$$

где $a_k = \mathsf{P}\{S_k > 0\}$. Теперь можно найти вероятность того, что в очереди будет находиться $k-1$ требование:

$$P_k(n) = \mathsf{P}\{N_n = k\} = \mathsf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_k > 0, S_{k+1} \leqslant 0, S_{k+2} \leqslant 0, \dots, S_n \leqslant 0\}.$$

С учетом формулы (14) получаем искомую вероятность

$$P_k(n) = \frac{1}{n!}C_{n,k}(a_1, \dots, a_n, 1 - a_1, \dots, 1 - a_n).$$

Из последнего соотношения с учетом (15) находим, что

$$P_k(n+1) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1}P_{k-i-1}(n-i) + \sum_{i=0}^{n-k}(1 - a_{i+1})P_k(n-i)\right),$$

где $a_k = \mathsf{P}\{S_k > 0\}$.

# Список литературы


1. Bell E. T., Partition polynomials. *Ann. Math.* (1927) **29**, 38–46.
2. Риордан Дж., *Введение в комбинаторный анализ.* ИЛ, Москва, 1963.
3. Кузьмин О. В., Рекуррентные соотношения и перечислительные интерпретации некоторых комбинаторных чисел и полиномов. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 39–49.
4. Touchard J., Sur les cycles des substitutions. *Acta Math.* (1939) **70**, №3-4, 243–297.
5. Chrysaphinou O., On Touchard polynomials. *Discrete Math.* (1985) **54**, 143–152.
6. Charalambides Ch. A., Chrysaphinou O., Partition polynomials in fluctuation theory. *Math. Nachr.* (1982) **106**, 89–100.
7. Кузьмин О. В., Леонова О. В., О полиномах Тушара. *Асимптотические и перечислительные задачи комбинаторного анализа.* Иркут. ун-т, Иркутск, 1997, 101–109.
8. Comtet L., *Advanced Combinatorics.* Reidel, Dordrecht, 1974.
9. Селиванов Б. И., Комбинаторный подход к формуле обращения Бюрмана–Лагранжа. *Комбинаторный и асимптотический анализ.* Красноярский ун-т, Красноярск, 1977, 153–169.
10. Howard F. T., Bell polynomials and degenerate Stirling numbers. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* (1980) **61**, 203–219.
11. Frucht R. W., Rota G. C., Polynomios de Bell y partitiones de conjuntos finitos. *Scientia* (1965) **32**, №126, 5–10.
12. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., *Введение в теорию массового обслуживания.* Наука, Москва, 1987.
13. Spitzer F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1956) **82**, 323–339.


Статья поступила 15.12.1998.