N. Ya. Kruglyak, Smooth analogues of the Calderón–Zygmund decomposition, quantitative covering theorems and the K-functional for the couple (L_q, W_p^k),
Algebra i Analiz, 1996, Volume 8, Issue 4, 110–160

Алгебра и анализ
Том 8 (1996), вып. 4

ГЛАДКИЕ АНАЛОГИ РАЗЛОЖЕНИЯ КАЛЬДЕРОНА-ЗИГМУНДА, КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОКРЫТИЯХ И K-ФУНКЦИОНАЛ ДЛЯ ПАРЫ $(L_q, \dot{W}_p^k)$

© Н. Я. Кругляк

В предположении компактности вложения пространства W_p^k в пространство L_q на основе локальных приближений функции $f \in L_q$ конструируется семейство разложений $f = g_t + b_t$ $(t > 0)$, почти оптимальных для пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$, т.е. таких, что имеет место эквивалентность

$$K(t, f; L_q, \dot{W}_p^k) \approx \|b_t\|_{L_q} + t\|g_t\|_{\dot{W}_p^k}.$$

Эти разложения представляют собой аналоги классических разложений Кальдерона–Зигмунда и использованы для доказательства формулы для K-функционала пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$. В основе построения и доказательств лежит новая теорема о покрытии[1]

Введение

Всюду ниже $L_q = L_q(Q_0)$, где $Q_0 \subset R^n$ — единичный n-мерный куб. Нам будет удобно при $q = \infty$ через L_∞ обозначать пространство непрерывных функций C. Через $\dot{W}_p^k$ будет обозначаться однородное пространство Соболева, полунорма в котором определяется формулой

$$\|f\|_{\dot{W}_p^k} = \sup_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L_p}. \tag{0.1}$$

Напомним что, в силу теоремы вложения Соболева, компактность вложения пространства W_p^k в пространство L_q эквивалентна неравенству

$$\lambda = \frac{k}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0. \tag{0.2}$$

1. Теорема о покрытии получена в июне 1993 г. во время пребывания в Технионе г. Хайфы (Израиль) по приглашению фонда Леди Девис.

Исследование кусочно-полиномиальной аппроксимации функций $f \in \dot{W}_p^k$ в метрике L_q было начато в ставшей уже классической работе Бирмана–Соломяка [5], в которой было показано, что если $\lambda > 0$, то для любого натурального N единичный куб Q_0 можно разбить на не более чем N диадических кубов D_i так, что существует семейство многочленов P_i степени $\leqslant k-1$, для которых справедливо неравенство

$$\Big\| f - \sum_i P_i \chi_{D_i} \Big\|_{L_q} \leqslant c N^{-\frac{k}{n}} \|f\|_{\dot{W}_p^k}. \tag{0.3}$$

Здесь $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от размерности n, при фиксированных k, p и q.

Естественно в (0.3) в качестве многочленов P_i выбирать многочлены, дающие „почти“ наименьшее уклонение от f на кубах D_i в метрике L_q, т.е. чтобы для некоторого $c > 0$, зависящего только от размерности n, выполнялись неравенства

$$\|f - P_i\|_{L_q(D_i)} \leqslant c E_k(f, D_i)_q, \tag{0.4}$$

где

$$E_k(f, Q)_q = \inf_{\deg P \leqslant k-1} \|f - P\|_{L_q(Q \cap Q_0)} \tag{0.5}$$

— так называемое локальное наилучшее приближение f в метрике L_q на кубе Q.

В дальнейшем в ряде работ было показано (см. [7, 20]), а также более ранние работы [14, 26, 29]), что в терминах локальных наилучших приближений (т.е. величин $E_k(f, Q)_q$) может быть описано при некоторых естественных ограничениях большое количество важных в анализе пространств таких, как L_p, BMO, $\mathrm{Lip}\,\alpha$, пространств Бесова, Соболева, Лизоркина–Трибеля и др.

Особенно большой вклад в развитие этой теории внес Ю. А. Брудный (см. [6–8]), из результатов которого, в частности, следует, что если $\dot{W}_p^k \subset L_q$, $(1 < p \leqslant tx)$ то

$$\|f\|_{\dot{W}_p^k} \approx \sup_{\pi = \{Q_i\}} \left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{|Q|^\lambda} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{0.6}$$

где sup берется по всевозможным укладкам $\pi = \{Q_i\}$ $(i = 1, \dots, |\pi|)$, т.е. конечным семействам попарно не пересекающихся кубов с центрами в Q_0; $|Q|$ — объем куба Q и λ из (0.2).

Интересно отметить, что при $p = q$ в (0.6) достаточно брать укладки π, состоящие из равных по объему кубов Q_i.

Все кубы здесь и далее предполагаются замкнутыми с гранями, параллельными координатным плоскостям.

Настоящая работа примыкает к этому циклу работ. Для формулировки результата напомним (см. [2]), что K-функционал Питре для элемента $x \in X_0+X_1$ пары $\vec{X} = (X_0, X_1)$ определяется формулой

$$K(t, x; \vec{X}) = \inf_{x=x_0+x_1} (\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}) \quad (t > 0). \tag{0.7}$$

В работе в предположении, что $\lambda > 0$ (см. (0.2)) для произвольных $f \in L_q$ и $t > 0$ на основе локальных приближений конструируется разложение $f = g_t + b_t$ такое, что имеет место эквивалентность

$$K(t, f; L_q, \dot{W}_p^k) \approx \|b_t\|_{L_q} + t\|g_t\|_{\dot{W}_p^k}$$

с постоянными, не зависящими от $f \in L_q$ и t.

Это разложение представляет собой аналог классического разложения Кальдерона-Зигмунда, причем „хорошая" функция g_t является ∞-дифференцируемой и имеет вид

$$g_t = \sum_{i \in I} P_{K_i} \cdot \psi_{K_i}, \tag{0.8}$$

а „плохая" b_t равна

$$b_t = f - g_t = \sum_{i \in I} (f - P_{K_i}) \psi_{K_i}. \tag{0.9}$$

Здесь $\{K_i\}_{i \in I}$ — некоторое семейство кубов, являющееся покрытием куба Q_0; P_{K_i} — многочлены степени $\leqslant k-1$, удовлетворяющие на кубах K_i $(i \in I)$ неравенству (0.4); ψ_{K_i} $(i \in I)$ – ∞-дифференцируемое разбиение единицы $\left(\sum_i \psi_{k_i} \equiv 1 \text{ на } Q_0\right)$, подчиненное семейству кубов $\{K_i\}_{i \in I}$, т.е. $\operatorname{supp} \psi_{K_i} \subset K_i$.

Разбиение единицы строится стандартно (см., например, [32]) и основная трудность — построение подходящего семейства кубов $\{K_i\}_{i \in I}$. Для этого используется новая теорема о покрытии, в которой контролируется количественный параметр α (т. н. α-емкость).

Отсутствие этой теоремы для $\alpha = 0$ (см. контрпример 1.13) является единственным препятствием для случая предельного показателя, т.е. когда λ из (0.2) равно 0.

На основе разложений (0.8)–(0.9) доказана формула для K-функционала пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$, анонсированная в [12]. Другим следствием этого результата является приведенное выше описание Брудного пространства $\dot{W}_p^k$.

Настоящая работа представляет собой первую из цикла работ. В следующей работе (см. [13]) будет показано, что аналогичные построения приводят к оптимальным разложениям и формулам для K-функционала для таких важных пар как $(L_q, \mathrm{Lip}\,\alpha)$, $(\mathrm{BMO}, \dot{W}_p^k)$.

Отметим также работы [16, 21], в которых близкие построения проводились для пар (H^1, L_∞), (H^1, BMO).

Автор искренне благодарен Ю. А. Брудному, без плодотворного влияния которого эта работа была бы невозможна.

§1. Количественная теорема о покрытии и ∞-дифференцируемые разбиения единицы

В этом параграфе, чтобы не прерывать дальнейшее изложение, будет дана только формулировка теоремы о покрытии. Доказательства (они независимы от остального текста) будут приведены в §5–6.

Всюду далее мы будем рассматривать пространство R^n с нормой

$$\|x\| = \max_{i=1-n} |x_i| \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_n)). \tag{1.1}$$

Через $Q = Q(x, r)$ будем обозначать замкнутый куб с центром в точке x и радиуса $r \geqslant 0$, т.е.

$$Q(x, r) = \{y \in R^n : \|y - x\| \leqslant r\}. \tag{1.2}$$

Таким образом, все рассматриваемые кубы *замкнуты* и гомотетичны единичному кубу $Q_0 = [0, 1]^n$.

Объем куба Q будем обозначать через $|Q|$, а через λQ ($\lambda \geqslant 0$) будем обозначать куб с тем же центром, что и куб Q и радиуса

$$r(\lambda Q) = \lambda \cdot r(Q). \tag{1.3}$$

Под *укладкой* $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$ мы будем понимать семейство попарно непересекающихся кубов $Q_i (i = 1, \dots, |\pi|)$, где через $|\pi|$ обозначено число кубов в укладке π.

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченное множество. И пусть в каждой точке $x \in \Omega$ задан куб $Q_x = Q(x, r(x))$ с центром в x и радиусом $r(x)$, который может равняться и нулю. В этом случае куб Q_x будем называть вырожденным. Отметим, что укладки состоят из *невырожденных* кубов.

Определение 1.1. Будем говорить, что семейство кубов $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ имеет ограниченную α-емкость ($\alpha \in R$), если конечна величина

$$|\{Q_x\}|_\alpha = \sup_\pi \left(\sum_{Q\in\pi} |\,Q\,|^\alpha \right), \tag{1.4}$$

где sup взят по всем укладкам π, состоящим из кубов семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$.

Таким образом, если $\alpha < 0$, то из конечности α-емкости следует, что семейство $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ не содержит вырожденных кубов.

Можно также определить α-емкость и при $\alpha = \pm\infty$, полагая

$$|\{Q_x\}|_{+\infty} = \sup_{x\in\Omega} |\,Q_x\,| \tag{1.5}$$

и

$$|\{Q_x\}|_{-\infty} = \sup_{x\in\Omega} |\,Q_x\,|^{-1}. \tag{1.6}$$

В следующей далее теореме о покрытии конструируется семейство кубов $\{K_{x_i}\}$, удовлетворяющее двум группам свойств. Свойства первой группы обеспечивают хорошее согласование кубов K_{x_i} между собой и с множеством Ω, свойства второй группы обеспечивают своего рода подчиненность семейства $\{K_{x_i}\}$ исходному семейству $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$.

Приведем необходимые определения.

Определение 1.2. Семейство невырожденных кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ называется конечнократным, если

$$\sum_{i\in I} \chi_{K_i} \leqslant M < +\infty, \tag{1.7}$$

где χ_{K_i} — характеристическая функция куба K_i, а $M > 0$ некоторая постоянная, которую будем называть кратностью семейства $\{K_i\}_{i\in I}$.

Замечание 1.3. В [10] показано, что если семейство кубов конечнократно, то его можно разбить на конечное и зависящее только от кратности M и размерности n число укладок.

Отсюда в частности следует, что конечнократное семейство кубов не более чем счетно.

Определение 1.4. Семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ будем называть сильнозацепленным, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что из $K_i \cap K_j \neq \varnothing$ $(i, j \in I)$ следует неравенство

$$|K_i \cap K_j| \geqslant \varepsilon \max(|K_i|, |K_j|). \tag{1.8}$$

Постоянную ε будем называть константой зацепления семейства $\{K_i\}_{i\in I}$.

Определение 1.5. Семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ назовем семейством кубов Уитни для множества Ω, если оно конечнократно, сильнозацеплено и справедливо равенство

$$\Omega \cap \left(\bigcup_{i\in I} \frac{1}{2}K_i\right) = \Omega \cap \left(\bigcup_{i\in I} K_i\right). \tag{1.9}$$

Важность несколько необычного условия (1.9) можно пояснить следующей леммой (см. ниже утверждение c)).

Лемма 1.6 (О ∞-дифференцируемом разбиении единицы). *Пусть $\{K_i\}_{i\in I}$ конечнократное, сильнозацепленное семейство кубов. Тогда существует такое семейство неотрицательных, ∞-дифференцируемых функций $\{\psi_i\}_{i\in I}$, что*

a) $\operatorname{supp}\psi_i \subset K_i$ $(i \in I)$,

b) $\sum_{i\in I} \psi_i \equiv 1$ *на множестве* $\bigcup_{i\in I} \frac{1}{2}K_i$,

c) *если* $x \in \bigcup_{i\in I} \frac{1}{2}K_i$, *то*

$$|\partial^a \psi_i(x)| \leqslant \gamma \frac{1}{r(K_i)^{|a|}} \quad (i \in I),$$

где $\gamma > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от размерности n, кратности M и коэффициента зацепления ε семейства $\{K_i\}_{i\in I}$. Здесь $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — целые неотрицательные и

$$\partial^a = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}, \qquad |a| = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Доказательство. Доказательство леммы достаточно стандартно (см. [32]). Приведем здесь основные его моменты.

Сначала фиксируется некоторая ∞-дифференцируемая функция φ одного переменного, которая равна нулю вне отрезка $[-1, 1]$, равна единице на отрезке $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и принимает значения между нулем и единицей.

Затем для $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ положим $\tilde{\varphi}(y) = \varphi(y_1) \cdot \varphi(y_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(y_n)$ и определим функции φ_i $(i \in I)$ формулами $\varphi_i(x) = \tilde{\varphi}(\frac{x - x_i}{r_i})$, где x_i, r_i соответственно центр и радиус куба K_i.

Искомые функции определяются формулами

$$\psi_i = \frac{\varphi_i}{\sum_{j \in I} \varphi_j} \quad (i \in I).$$

Из этого определения легко следуют утверждения a)-b). Утверждение c) доказывается индукцией по $|a|$. При этом используется формула Лейбница в сочетании с легко доказываемыми геометрическими свойствами семейства кубов $\{K_i\}_{i \in I}$:

i) из того, что $K_i \bigcap K_j \neq \varnothing$, следует оценка $r(K_j) \leqslant \varepsilon^{-\frac{1}{n}} \cdot r(K_i)$;

ii) количество кубов K_j, пересекающихся с фиксированным кубом K_i, конечно и зависит только от n, M и ε. •

Замечание 1.7. Лемма 1.6 остается справедливой при замене (1.8) на более слабое условие „соизмеримости": существует такое число $\varepsilon > 0$, что из $K_i \bigcap K_j \neq \varnothing$ $(i, j \in I)$ следует неравенство

$$\min(|K_i|, |K_j|) \geqslant \varepsilon \max(|K_i|, |K_j|). \tag{1.10}$$

Вторая группа условий связывает конструируемое семейство кубов $\{K_{x_i}\}$ с исходным семейством $\{Q_x\}_{x \in \Omega}$.

Нам понадобится следующее определение.

Определение 1.8. Будем говорить, что семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i \in I}$ является расширением (сужением) семейства $\{Q_x\}_{x \in \Omega}$, если все кубы K_{x_i} $(i \in I)$ невырождены, их центры x_i $(i \in I)$ содержатся в Ω и выполнены условия:

a) для всех $i \in I$ справедливы вложения

$$Q_{x_i} \subset K_{x_i} \quad (\text{соответственно } K_{x_i} \subset Q_{x_i});$$

b) если $|\, Q_x \,| > 0$, то найдется $i = i(x)$ такой, что

$$x \in Q_x \subset K_{x_i} \quad (\text{соответственно } x \in K_{x_i} \subset Q_x).$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.9. *Предположим, что семейство кубов* $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ *имеет ограниченную* α*-емкость, причем* $\alpha \notin [0, 1-\frac{1}{n}]$.

Тогда существует семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$, *являющееся*

a) *семейством кубов Уитни для множества* Ω;

b) *таким расширением при* $\alpha > 1-\frac{1}{n}$ (*сужением при* $\alpha < 0$) *исходного семейства* $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$, *что имеет место оценка*

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha \leqslant c|\{Q_x\}|_\alpha. \tag{1.11}$$

При этом коэффициенты кратности M, *зацепления* ε *и изменения емкости* c (*из* (1.11)) *зависят только от размерности* n.

Алгоритм построения семейства кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ состоит из двух этапов. На первом обеспечиваются все свойства, кроме сильной зацепленности (см. §5, 6, п. 1). На втором (см. §5, п. 4) обеспечивается и свойство сильной зацепленности. Построения на первом этапе представляют собой сочетание пошагового расширения (или сужения для $\alpha < 0$) кубов с известным алгоритмом Безиковича (см. [4, 23]).

Замечание 1.10. Утверждение теоремы остается верным и при $\alpha = \pm\infty$.

Замечание 1.11. Пусть выполнено одно из условий

a) все кубы семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ невырождены;

b) $\alpha \notin [0,1]$;

Тогда справедливо более сильное, чем (1.9), вложение

$$\Omega \subset \bigcup_{i\in I} \frac{1}{2} K_{x_i}. \tag{1.12}$$

Доказательство. a) В силу теоремы 1.9 семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ является расширением (или сужением) исходного семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$. Поэтому из условия b) определения 1.8 имеем $\Omega \subset \bigcup_{i\in I} K_{x_i}$. Отсюда и из (1.9) следует (1.12).

В случае b) достаточно рассмотреть только случай $\alpha > 1$, ибо при $\alpha < 0$ все кубы семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ невырождены, т.е. имеет место уже рассмотренный случай a).

Если $\alpha > 1$, то можно подобрать такое число $\varepsilon > 0$, что семейство $\{\widetilde{Q}_x\}_{x\in\Omega}$, получаемое из $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ заменой всех вырожденных кубов на кубы радиуса ε, будет иметь α-емкость не более $2|\{Q_x\}|_\alpha$. Применяя теорему 1.9 к семейству $\{\widetilde{Q}_x\}_{x\in\Omega}$, получим семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$, для которого в силу рассмотренного выше случая a) имеет место (1.12). •

Замечание 1.12. В дальнейшем теорема 1.9 будет применяться при $\alpha \notin [0,1]$. Анализ доказательств показывает, что для $\alpha \in [0,1]$ теорема 1.9 нужна не с расширением исходного семейства кубов, а с его сужением. Однако, как показывает следующий пример, уже для $\alpha = 0$ теорема 1.9 с сужением исходного семейства кубов неверна.

1.13. Контрпример для случая $\alpha = 0$. Пусть $\Omega = [0,1]$ и в каждой точке $x \in \Omega$ задан куб Q_x с центром в x и радиуса $r(x) = x$. Очевидно, что для этого семейства будет $|\{Q_x\}|_0 = 1$, ибо любые два куба из этого семейства пересекаются.

Если бы теорема 1.9 была верна, то, как нетрудно видеть, существовало бы не более чем счетное семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ такое, что

a) $K_{x_i} \subset Q_{x_i} \quad (i \in I)$;

b) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} \frac{1}{2} K_{x_i} \supset (0,1]$;

c) $\displaystyle\sum_{i\in I} \chi_{K_{x_i}} \leqslant M < +\infty$;

d) $|\{K_{x_i}\}|_0 \leqslant c < +\infty$,

где M и c некоторые постоянные.

Так как $r(K_{x_i}) \leqslant r(Q_{x_i}) = x_i$, то из b) следует, что в любой окрестности точки 0 найдется бесконечное количество точек x_i $(i \in I)$. Поэтому (в силу c)) в любой окрестности точки 0 существует бесконечное количество кубов K_{x_i} $(i \in I)$ не содержащих точку 0. Отсюда легко следует, что найдется бесконечное число непересекающихся интервалов K_{x_i}, что противоречит d).

В рассмотренном выше примере исходное семейство кубов содержало один вырожденный куб. Можно, несколько изменяя конструкцию, построить контрпример и без вырожденных кубов.

§2. Разложения типа Кальдерона—Зигмунда

2.1. Классические разложения Кальдерона-Зигмунда по диадическим кубам и K-функционал для пары (L_1, L_∞). В настоящем пункте мы приведем модельный результат, относящийся к случаю классических разложений Кальдерона-Зигмунда ([15]).

Прежде всего приведем классическую конструкцию Кальдерона-Зигмунда в удобной для нас форме.

Пусть $Q_0 \subset R^n$ — единичный куб и $f \in L_1 = L_1(Q_0)$. Разложение Кальдерона-Зигмунда основывается на построении специального семейства кубов $\{K_i\}_{i\in I}$, зависящего от f и параметра $\lambda > 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$\frac{1}{|Q_0|}\int\limits_{Q_0}|f| \leqslant \lambda. \tag{2.1}$$

В этом случае построение следующее. Разобьем куб Q_0 на 2^n равных кубов Q_i. В семейство $\{K_i\}_{i\in I}$ возьмем только те кубы Q_i, для которых справедливо неравенство

$$\frac{1}{|Q_i|}\int\limits_{Q_i}|f| > \lambda. \tag{2.2}$$

Для каждого из оставшихся кубов Q_i повторим описанную выше процедуру отбора кубов в семейство $\{K_i\}_{i\in I}$. Продолжая рекуррентно эту процедуру, получаем требуемое семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$.

Определим разложение Кальдерона-Зигмунда

$$f = g_\lambda + b_\lambda, \tag{2.3}$$

для λ, удовлетворяющего (2.1), формулами

$$g_\lambda = \sum_{i\in I}\left(\frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} f\right)\chi_{K_i} + f\chi_{Q_0\setminus\bigcup_i K_i}, \tag{2.4}$$

$$b_\lambda = \sum_{i\in I}\left(f - \frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} f\right)\chi_{K_i}. \tag{2.5}$$

В случае, когда $\lambda < \frac{1}{|Q_0|}\int_{Q_0}|f|$, удобно положить

$$g_\lambda = 0, \qquad b_\lambda = f. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь множество G, элементами которого являются всевозможные кубы $Q = Q(x, r)$ с центрами $x \in Q_0$ и радиусами $r > 0$ (напомним, что радиус равен половине длины ребра и все кубы являются замкнутыми с гранями, параллельными координатным плоскостям).

Всюду ниже через $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$ будем обозначать укладки, т.е. конечные семейства кубов Q_i из G, для которых $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ $(i \neq j)$.

Введем на множестве укладок „меру"

$$|\pi| = \sum_{Q_i \in \pi} |Q_i|. \tag{2.7}$$

Определение 2.1. F-характеристикой функции f будем называть функцию $F(f) : G \to R$, определенную формулой

$$F(f)(Q) = \frac{\int_{Q \cap Q_0} |f|}{|Q|}. \tag{2.8}$$

Под перестановкой функции $F(f)$ будем понимать функцию

$$F(f)^*(t) = \sup_{|\pi|>t} \big(\inf_{Q_i \in \pi} F(f)(Q_i) \big) \quad (t > 0). \tag{2.9}$$

Нетрудно видеть, что $F(f)^*$ — невозрастающая непрерывная справа функция от t.

Замечание 2.2. Формула (2.9) является аналогом следующей малоизвестной формулы для невозрастающей перестановки функции f:

$$f^*(t) = \sup_{|\Omega|>t} \big(\inf_{x \in \Omega} |f(x)| \big).$$

Теорема 2.3 ([28]). *Имеет место эквивалентность*

$$K(t, f; L_1, L_\infty) \approx t F(f)^*(t) \quad (t > 0), \tag{2.10}$$

с постоянными, не зависящими от f и t.

Кроме того, если параметр λ в разложении Кальдерона-Зигмунда взять равным $F(f)^*$, то

$$\|b_\lambda\|_{L_1} + t\|g_\lambda\|_{L_\infty} \approx K(t, f; L_1, L_\infty), \tag{2.11}$$

с постоянными эквивалентности не зависящими от f и t.

Обобщению теоремы 2.3 на другие пары посвящены эта и последующая [13] работы.

2.2. Разложения типа Кальдерона-Зигмунда. В п. 2.1 при построении разложения Кальдерона-Зигмунда использовалось семейство диадических кубов $\{K_i\}_{i\in I}$. Однако при этом „хорошая" функция

$$g_\lambda = \sum_{i\in I}\left(\frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} f\right)\chi_{K_i} + f\chi_{Q_0\setminus\bigcup_i K_i} \tag{2.12}$$

оказывалась не гладкой. Поэтому, если мы хотим, чтобы функция g_λ была достаточно гладкой, нам следует несколько изменить правую часть в (2.12).

Пусть $\Omega \subset R^n$ — некоторое ограниченное множество и $\{K_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство кубов с центрами в Ω.

Пусть $\{\psi_{K_i}\}_{i\in I}$ разбиение единицы, согласованное с семейством кубов $\{K_i\}_{i\in I}$, т.е.

$$\sum_{i\in I}\psi_{K_i} \equiv 1 \quad \left(\text{п.в. на } \bigcup_i K_i \cap \Omega\right) \tag{2.13}$$

и

$$\operatorname{supp}\psi_{K_i} \subset K_i \quad (i \in I). \tag{2.14}$$

Напомним теперь (см.(0.5)), что локальным наилучшим приближение функции $f \in L_q(\Omega)$ в метрике L_q на кубе Q называется величина

$$E_k(f,Q)_q = \inf_{\deg P\leqslant k-1}\|f-P\|_{L_q(Q\cap\Omega)}, \tag{2.15}$$

причем считается, что при $k=0$ пространство многочленов степени $\leqslant k-1$ состоит из одного нуля.

Пусть многочлены P_{K_i} $(i\in I)$ степени $\leqslant k-1$ дают почти наилучшее приближение f на кубе K_i в метрике L_q многочленами степени $\leqslant k-1$, т.е.

$$\|f-P_{K_i}\|_{Lq(K_i\cap\Omega)} \leqslant CE_k(f,K_i)_q, \tag{2.16}$$

где $C>0$ некоторая постоянная, зависящая только от размерности.

Определение 2.4. Пусть семейства $\{K_i\}_{i\in I}$, $\{\psi_{K_i}\}_{i\in I}$ и $\{P_{K_i}\}_{i\in I}$ такие, как указано выше.

Тогда разложением функции $f \in L_q(\Omega)$ типа Кальдерона–Зигмунда мы будем называть разложение $f = g + b$, где

$$g = \sum_{i\in I} P_{K_i} \cdot \psi_{K_i} + f\chi_{\Omega\setminus\bigcup_i K_i} \tag{2.17}$$

и

$$b = f - g = \sum_{i\in I} (f - P_{K_i})\psi_{K_i}. \tag{2.18}$$

Замечание 2.5. Нетрудно видеть, что классическое разложение Кальдерона–Зигмунда является частным случаем предложенного выше для построенного в пункте 2.1 семейства кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ при

$$P_{K_i} = \frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} f \text{ и } \psi_{K_i} = \chi_{K_i} \quad (i \in I). \tag{2.19}$$

В заключение отметим, что оценки производных „хорошей“ функции g, даже в случае отсутствия члена $f\chi_{\Omega\setminus\bigcup_i K_i}$, требуют умения оценивать производные разложения единицы, т.е. производные функций ψ_{K_i} $(i \in I)$. Это налагает определенные требования на семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$.

Лемма 1.6 как раз и утверждает, что подходящими свойствами обладает семейство кубов Уитни для множества Ω (см. определение 1.8).

§3. Построение и свойства гладкого аналога разложения Кальдерона—Зигмунда для $\alpha \notin [0,1)$

3.1. F_α-характеристики и их перестановки. Всюду ниже $f \in L_q = L_q(Q_0)$ $(q \in (0,+\infty])$.

Для $\alpha \in R$ обобщим понятия F-характеристики функции f и ее перестановки (см.(2.8) и (2.9)), полагая (см. [12])

$$F_\alpha(f)(Q) = \frac{E_k(f,Q)_q}{|Q|^{\alpha/q}} \quad (Q \in G) \tag{3.1}$$

и

$$F_\alpha(f)^*(t) = \sup_{|\pi|_\alpha > t} \big(\inf_{Q\in\pi} F_\alpha(f)(Q)\big). \tag{3.2}$$

Здесь:

G — совокупность кубов Q с центрами в Q_0;

$E_k(f,Q)_q$ — локальное наилучшее приближение f алгебраическими многочленами степени $\leqslant k-1$ (см. (2.15));

а $\sup$ в (3.2) берется по всем укладкам $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$, состоящим из кубов множества G, для которых α-емкость $|\pi|_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{|\pi|} |Q_i|^\alpha$ строго больше t $(t > 0)$.

В случае $q = +\infty$ будем считать $F_\alpha(f) = E_k(f,Q)_q$ и рассматривать только отрицательные α.

Замечание 3.1. В действительности F_α-характеристика зависит еще от параметров k и q, однако всюду далее эти параметры считаются фиксированными, поэтому мы их в записи F_α и F_α^* будем опускать.

Отметим также, что при $\alpha = 1$, $k = 0$ и $q = 1$ формулы (3.1) и (3.2) дают F-характеристику и ее перестановку.

Замечание 3.2. Если $\alpha \neq 0$, то из равенства $F_\alpha(f)^*(t_0) = 0$ следует, что f — многочлен степени $\leqslant k-1$.

Действительно, для любого куба Q с $|Q|^\alpha > t_0$ будет $E_k(f,Q)_q = 0$. Поэтому f является многочленом степени $\leqslant k-1$ на $Q \cap Q_0$. Для доказательства того, что этот многочлен не зависит от куба Q, достаточно куб Q_0 представить в виде объединения кубов Q_i (с $|Q_i|^\alpha > t_0$) так, чтобы соседние кубы имели пересечение с положительной мерой.

3.2. Построение гладких аналогов разложения Кальдерона–Зигмунда. Построение гладких аналогов разложения Кальдерона–Зигмунда, как и в классическом случае, основывается на построении некоторого семейства кубов $\{K_i\}_{i\in I}$. Построение этого семейства кубов состоит из двух шагов. Сначала, с помощью техники момента остановки строится специальное семейство кубов $\{Q_x\}_{x\in Q_0}$ с ограниченной α-емкостью, к которому затем применяется теорема о покрытии 1.9.

Построение в случае $\alpha < 0$ несколько отличается от случая $\alpha \geqslant 1$. Поэтому рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

Случай $\alpha \geqslant 1$.

Зафиксируем число $t > 0$. Пусть $x \in Q_0$. Рассмотрим функцию φ_x от переменного $r > 0$, определенную формулой

$$\varphi_x(r) = \frac{E_k(f, Q(x,r))_q}{|Q(x,r)|^{\alpha/q}}. \tag{3.3}$$

Нетрудно видеть, что:

i) функция $\varphi_x(r)$ непрерывно зависит от r;

ii) $\varphi_x(r) \to 0$ при $r \to +\infty$.

Определим $r(x)$ так, чтобы

$$\varphi_x(r(x)) = 2F_\alpha(f)^*(t) \tag{3.4}$$

и для всех $r > r(x)$ выполнялось неравенство

$$\varphi_x(r) < 2F_\alpha(f)^*(t). \tag{3.5}$$

Если такого $r(x)$ не существует, то тогда для всех $r > 0$ будет

$$\varphi_x(r) < 2F_\alpha(f)^*(t). \tag{3.6}$$

В этом случае положим

$$r(x) = 0. \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь семейство кубов $\{Q_x\}_{x \in Q_0}$, где

$$Q_x = Q(x, r(x)). \tag{3.8}$$

Тогда имеет место

Предложение 3.3. *Для α-емкости семейства $\{Q_x\}_{x\in Q_0}$ справедлива оценка:*

$$|\{Q_x\}|_\alpha \leqslant t. \tag{3.9}$$

Доказательство. Пусть $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$ — произвольная укладка, состоящая из кубов семейства $\{Q_x\}_{x\in Q_0}$ (напомним, что все кубы в укладке по определению невырождены). Так как из (3.4) следует, что для всех кубов $Q_i \in \pi$ будет

$$\frac{E_k(f, Q_i)_q}{|\,Q_i\,|^{\alpha/q}} > F_\alpha(f)^*(t), \tag{3.10}$$

то из определения F_α^* (см. (3.2)) следует, что α-емкость укладки π должна быть $\leqslant t$. Это и доказывает (3.9). •

Случай $\alpha < 0$.

В случае $\alpha < 0$ функция $\varphi_x(r)$ также непрерывно зависит от r (при $q = +\infty$ это обеспечивается тем, что L_∞ заменено на пространство непрерывных функций C).

Однако в случае $\alpha < 0$ уже нельзя утверждать, что $\varphi_x(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Тем не менее из теоремы Лебега следует, что $\varphi_x(r) \to 0$ при $r \to 0$. Поэтому следует $r(x)$ определить так, чтобы

$$\varphi_x(r(x)) = 2F_\alpha(f)^*(t) \tag{3.11}$$

и для всех $r < r(x)$ выполнялось неравенство

$$\varphi_x(r) < 2F_\alpha(f)^*(t). \tag{3.12}$$

Если такого $r(x)$ не существует, то тогда для всех $r > 0$ будет

$$\varphi_x(r) < 2F_\alpha(f)^*(t). \tag{3.13}$$

Выберем в этом случае $r(x)$ так, чтобы

$$Q_0 \subset Q(x, r(x)) \quad \text{и} \quad |\, Q(x, r(x))|^\alpha \leqslant t. \tag{3.14}$$

Это возможно ибо $\alpha < 0$.

Полагая как и выше $Q_x = Q(x, r(x))$, нетрудно видеть, что и в этом случае имеет место предложение 3.3.

Так как в обоих рассмотренных случаях $\alpha \notin [0, 1)$, то применима теорема о покрытии 1.9. Применяя эту теорему, получаем

Лемма 3.4. *Пусть* $\alpha \notin [0, 1)$. *Тогда существует не более чем счетное семейство кубов* $\{K_{x_i}\}_{i \in I}$ *с центрами* x_i, *лежащими в* Q_0, *обладающее свойствами*:

a) $\frac{E_k(f, K_{x_i})_q}{|K_{x_i}|^{\alpha/q}} \leqslant 2F_\alpha(f)^*(t)$;

b) *если* $\alpha \geqslant 1$ *и* $|\, Q_x\,| \neq 0$, *то существует* $i = i(x)$ *такое, что* $Q_x \subset K_{x_i}$; *если* $\alpha < 0$, *то для любого* $x \in Q_0$ *существует* $i = i(x)$ *такое, что* $x \in K_{x_i} \subset Q_x$;

c) $\sum\limits_{i \in I} \chi_{K_{x_i}} \leqslant M(n) < +\infty$;

d) $\left(\bigcup_{i \in I} \frac{1}{2} K_{x_i}\right) \cap Q_0 \doteq \left(\bigcup_{i \in I} K_{x_i}\right) \cap Q_0$;

e) *если* $K_{x_i} \cap K_{x_j} \neq \varnothing$ $(i, j \in I)$, *то* $|K_{x_i} \cap K_{x_j}\,| \geqslant \varepsilon(n) \max(|K_{x_i}|, K_{x_j}|)$;

f) $\sum_{i\in I}|K_{x_i}|^\alpha \leqslant C(n)t$.

Доказательство. Свойство a) при $\alpha \geqslant 1$ следует из вложения $Q_{x_i} \subset K_{x_i}$ и (3.4)–(3.6), а при $\alpha < 0$ из вложения $K_{x_i} \subset Q_{x_i}$ и (3.11)–(3.13).

Свойства b)–e) следуют непосредственно из теоремы 1.9. Свойство f) доказывается следующим образом. Из теоремы 1.9 и предложения 3.3 следует, что

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha \leqslant c|\{Q_x\}|_\alpha \leqslant ct, \tag{3.15}$$

где $c > 0$ зависит только от размерности n. Кроме того, из утверждения c) следует (см. замечание 1.3), что семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ представимо в виде объединения конечного числа укладок π. Причем их число зависит только от размерности n, ибо в силу c) кратность зависит только от n. Поэтому из (3.15) и определения α-емкости следует требуемое свойство f). •

Замечание 3.5. Если хотя бы один из кубов семейства $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ содержит куб Q_0, то мы семейство кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ заменим на этот куб. При этом, как нетрудно видеть, все свойства кроме свойства b) сохранятся.

Пусть теперь $\{\psi_{K_{x_i}}\}_{i\in I}$ — ∞-дифференцируемое разбиение единицы, согласованное с семейством кубов $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ (существование такого семейства следует из леммы 1.6). И пусть $\{P_{K_{x_i}}\}_{i\in I}$ — семейство многочленов степени $\leqslant k-1$, дающих почти наилучшие локальные приближения функции f на кубах K_{x_i}, т.е. (см. (2.16))

$$\|f - P_{K_{x_i}}\|_{L_q(K_{x_i}\cap Q_0)} \leqslant CE_k(f, K_{x_i})_q, \tag{3.16}$$

где $C > 0$ зависит только от размерности n.

Определим теперь для $\alpha \notin [0,1)$ разложение типа Кальдерона–Зигмунда формулами

$$g_t^\alpha = \sum_{i\in I} P_{K_{x_i}}\psi_{K_{x_j}} + f\chi_{Q_0\setminus\bigcup_i K_{x_i}}, \tag{3.17}$$

$$b_t^\alpha = f - g_t^\alpha = \sum_{i\in I}(f - P_{K_{x_i}})\psi_{K_{x_i}}. \tag{3.18}$$

В силу замечания 1.11 при $\alpha \notin [0,1]$ будет справедливо вложение $Q_0 \subset \bigcup_{i\in I} K_{x_i}$. Поэтому второе слагаемое в (3.17) отсутствует и, следовательно, „хорошая“ функция g_t^α является ∞-дифференцируемой.

В этом случае разложение (3.17)–(3.18) естественно называть гладким аналогом разложения Кальдерона–Зигмунда.

3.3. Оценки функций b_t^α и g_t^α. В дальнейшем нам понадобится ряд вспомогательных оценок функций g_t^α и b_t^α, построенных выше (см. (3.17)-(3.18)).

Всюду ниже через $\{K_i\}_{i\in I}$ обозначается семейство кубов, построенных в п. 3.2, при этом для сокращения записи мы полагаем $K_i = K_{x_i}$.

Пусть K_i — фиксированный куб семейства $\{K_i\}_{i\in I}$. Мы будем использовать обозначение

$$N_i = \{j \in I \mid K_j \cap K_i \neq \varnothing\}. \tag{3.19}$$

Так как семейство $\{K_i\}_{i\in I}$ конечнократно, то оно представимо (см. замечание 1.3) в виде объединения конечного и зависящего только от n числа укладок. Поэтому из сильной зацепленности семейства $\{K_i\}_{i\in I}$ (лемма 3.4 свойство e)) следует оценка

$$N_i \leqslant c(n) \quad (i \in I), \tag{3.20}$$

где $c(n) > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от n.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.6. *Пусть $\alpha \notin [0,1)$. Тогда имеет место неравенство*

$$\|b_t^\alpha\|_{L_q} \leqslant ct^{\frac{1}{q}} F_\alpha(f)^*(t), \tag{3.21}$$

где $c > 0$ зависит только от размерности n.

Доказательство. Так как $\operatorname{supp} b_t^\alpha \subset \bigcup_{i\in I} K_i$ (см. (3.18)), а семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ представимо в виде конечного, зависящего только от n, числа укладок, то достаточно доказать, что для произвольной укладки π, состоящей из кубов семейства $\{K_i\}_{i\in I}$, справедливо неравенство

$$\left(\sum_{K_j\in\pi} \int_{K_j} |b_t^\alpha|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant ct^{\frac{1}{q}} F_\alpha(f)^*(t) \tag{3.22}$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от размерности n.

Из конечнократности семейства $\{K_i\}_{i\in I}$ (см. лемма 3.4 свойство c)) и того, что $\operatorname{supp}\psi_i \subset K_i$ $(i \in I)$ (см.(2.14), имеем

$$\begin{aligned}\int_{K_j\cap Q_0} |b_t^\alpha|^q &\leqslant \int_{K_j\cap Q_0} \Big(\sum_{i\in N_j} |f-P_i|\psi_i\Big)^q \\ &\leqslant c_1\Big(\sum_{i\in N_j}\int_{K_i\cap Q_0} |f-P_i|^q\Big) \\ &\leqslant c_2\Big(\sum_{i\in N_j} E_k(f,K_i)_q^q\Big),\end{aligned} \tag{3.23}$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные, зависящие только от n.

Поэтому из свойства а) леммы 3.4 получаем

$$\int_{K_j\cap Q_0} |b_t^\alpha|^q \leqslant c_2[2F_\alpha(f)^*(t)]^q\Big(\sum_{i\in N_j}|K_i|^\alpha\Big). \tag{3.24}$$

Следовательно, для доказательства (3.21) достаточно показать, что

$$\sum_{Kj\in\pi}\sum_{i\in N_j}|K_i|^\alpha \leqslant ct \tag{3.25}$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от n.

Из (3.20) следует, что одно и то же K_i встречается в левой части (3.25) конечное (зависящее только от n) число раз. Поэтому (3.25) следует из свойства f) леммы 3.4. •

Для оценки функции g_t^α заметим, что из (3.17) следует, что функция g_t^α — ∞-дифференцируема на $\bigcup_i K_i$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.7. *Пусть $\alpha \notin [0,1)$. Тогда, если $|a| = k$, то справедлива оценка*

$$\|D^a g_t^\alpha\|_{L_\infty(K_i)} \leqslant c\sum_{j\in N_i}\frac{E_k(f,K_j)_q}{|K_j|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}}}, \tag{3.26}$$

где $c > 0$ зависит только от размерности n.

Доказательство. Прежде всего отметим, что без ограничения общности можно считать, что для всех $i \in I$ справедливо неравенство $r(K_i) < 2$.

Действительно, в противном случае для некоторого $i_0 \in I$ было бы $Q_0 \subset K_{i_0}$ и семейство кубов $\{K_i\}_{i \in I}$ состояло бы из одного куба K_{i_0} (см. замечание 3.5). Так как в этом случае g_i^α многочлен степени $\leqslant k-1$, то (3.26) очевидным образом выполняется.

Так как P_{K_i} $(i \in I)$ — многочлены степени $\leqslant k-1$, то на кубе K_i по формуле Лейбница имеем

$$D^a g_i^\alpha = \sum_{|b|<k} \gamma_b \Big(\sum_{j \in N_i} D^b P_{K_j} \cdot D^{a-b} \psi_{K_j} \Big), \tag{3.27}$$

где $\gamma_b > 0$ — некоторые числа.

Поэтому для доказательства (3.26) достаточно оценить функции

$$h_b = \sum_{j \in N_i} D^b P_{K_j} \cdot D^{a-b} \psi_{K_j} \quad (|b| < k). \tag{3.28}$$

Так как $\sum\limits_{i \in I} \psi_{K_i} \equiv 1$ на множестве $Q_0 \cap \big(\bigcup_i K_i \big) = Q_0 \cap \big(\bigcup_i \frac{1}{2} K_i \big)$ (см. лемму 1.6 и лемму 3.4 d)), то из $|a-b| > 0$ следует, что на $Q_0 \cap K_i$ будет

$$\sum_{j \in N_i} D^{a-b} \psi_{K_j} \equiv 0. \tag{3.29}$$

Следовательно, функция h_b на множестве $Q_0 \cap K_i$ представима в виде

$$h_b = \sum_{j \in N_i} D^b (P_{K_j} - P_{K_i}) \cdot D^{a-b} \psi_{K_j}. \tag{3.30}$$

В силу (3.20) количество слагаемых в (3.30) оценивается через n. Поэтому достаточно уметь оценивать одно из слагаемых в (3.30).

Из неравенства Маркова и оценки норм производных функций ψ_{K_i} (см. лемму 1.6) имеем

$$\begin{aligned} &\|D^b (P_{K_j} - P_{K_i}) \cdot D^{a-b} \psi_{K_j} \|_{L_\infty(K_i)} \\ &\qquad \leqslant c_1 \frac{1}{r(K_i)^{|b|}} \cdot \|P_{K_j} - P_{K_i}\|_{L_\infty(K_i)} \cdot \frac{1}{r(K_j)^{|a-b|}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Поэтому из сильной зацепленности семейства кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ (см. лемма 3.4 свойство е)) и эквивалентности произвольных норм на конечномерном пространстве (в нашем случае на пространстве многочленов степени $\leqslant k-1$ на единичном n-мерном кубе) следует

$$\|D^b(P_{K_j}-P_{K_i})\cdot D^{a-b}\psi_{K_j}\|_{L_\infty(K_i)} \\ \leqslant c_2\frac{1}{|K_i|^{\frac{k}{n}}}\|P_{K_j}-P_{K_i}\|_{L_\infty(K_i)} \leqslant c_3\frac{1}{|K_i|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}}}\|P_{K_j}-P_{K_i}\|_{L_q(K_i)}. \tag{3.32}$$

Причем в (3.31)–(3.32) постоянные c_1, c_2, c_3 зависят только от n.

Докажем теперь, что

$$|K_i| \leqslant c|K_i\cap K_j\cap Q_0| \quad (j\in N_i), \tag{3.33}$$

где $c>0$ зависит только от размерности n.

Действительно, из сильной зацепленности семейства кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ (см. лемма 3.4 е)) и того, что $r(K_i)\leqslant \operatorname{diam} Q_0$ следует, что проекции кубов K_i, K_j и Q_0 на любую из координатных осей имеют общий интервал объема $\geqslant \gamma r(K_i)$, где $\gamma>0$ зависит только от n. Отсюда легко следует (3.33).

Поэтому для $j\in N_i$ имеем (см.[6]):

$$\|P_{K_j}-P_{K_i}\|_{L_q(K_i)} \leqslant c_4\|P_{K_j}-P_{K_i}\|_{L_q(K_i\cap K_j\cap Q_0)} \\ \leqslant c_5(\|P_{K_j}-f\|_{L_q(K_i\cap K_j\cap Q_0)}+\|f-P_{K_i}\|_{l_q(K_i\cap K_j\cap Q_0)}), \tag{3.34}$$

где c_4, c_5 некоторые постоянные, зависящие только от n. Следовательно, если $j\in N_i$, то

$$\|P_{K_j}-P_{K_i}\|_{L_q(K_i)} \leqslant c_6(E_k(f,K_i)_q+E_k(f,K_j)_q), \tag{3.35}$$

где $c_6>0$ зависит только от n.

Подставляя оценку (3.35) в (3.32) и пользуясь еще раз свойством сильной зацепленности семейства $\{K_i\}_{i\in I}$, окончательно получаем для $j\in N_i$:

$$\|D^b(P_{K_j}-P_{K_i})\cdot D^{a-b}\psi_{K_j}\|_{L_\infty(K_i)} \\ \leqslant c\biggl(\frac{E_k(f,K_i)_q}{|K_i|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}}}+\frac{E_k(f,K_j)_q}{|K_j|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}}}\biggr), \tag{3.36}$$

где $c > 0$ зависит только от размерности n.

Ясно, что правая часть в (3.36) не превышает правой части в (3.26), что и требовалось доказать. •

Следствие 3.8. *Пусть $\alpha \notin [0,1]$ и $p \in (0,+\infty]$ таково, что*

$$\alpha\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)=\frac{k}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}. \tag{3.37}$$

Тогда, если $|a| = k$, то

$$\left(\int_{\mathcal{Q}_0}|D^a g_t^\alpha|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant ct^{\frac{1}{p}}F_\alpha(f)^*(t), \tag{3.38}$$

где $c > 0$ зависит только от размерности n.

Доказательство. В силу замечания 1.11 при $\alpha \notin [0,1]$ будет $\mathcal{Q}_0 \subset \bigcup_i K_i$. Следовательно, функция g_t^α будет ∞-дифференцируемой на всем $\mathcal{Q}_0$.

Из леммы 3.7 имеем

$$\int_{\mathcal{Q}_0}|D^a g_t^\alpha|^p \leqslant c\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in N_i}\frac{E_k(f,K_j)_q}{|K_j|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}}}\right)^p|K_i|, \tag{3.39}$$

где $c > 0$ зависит только от размерности n.

В силу (3.20) количество элементов в N_i зависит только от n. Поэтому, учитывая сильную зацепленность семейства $\{K_i\}_{i\in I}$, получаем

$$\int_{\mathcal{Q}_0}|D^a g_t^\alpha|^p \leqslant c\sum_{i\in I}\sum_{j\in N_i}\left(\frac{E_k(f,K_j)_q}{|K_j|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}\right)^p, \tag{3.40}$$

где $c > 0$ — некоторая, возможно другая, постоянная, зависящая только от размерности n.

Осталось заметить, что из (3.20) также следует, что каждое слагаемое в (3.40) встречается конечное и зависящее только от размерности n число раз. Поэтому, применяя оценку а) из леммы 3.4, получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Q}_0}|D^a g_t^\alpha|^p &\leqslant c(F_\alpha(f)^*(t))^p\left(\sum_{i\in I}\left(\frac{|K_i|^{\frac{\alpha}{q}}}{|K_i|^{\frac{k}{n}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}\right)^p\right)\\ &= c(F_\alpha(f)^*(t))^p\sum_{i\in I}|K_i|^\alpha.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Применяя оценку f) из леммы 3.4, получаем (3.38). •

§4. Оптимальность гладких аналогов разложения Кальдерона—Зигмунда для пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$ и K-функционал

Всюду ниже через $\dot{W}_p^k$ обозначается однородное пространство Соболева на кубе Q_0, причем $p \in [1, +\infty]$.

Напомним, что полунорма в пространстве $\dot{W}_p^k$ определяется формулой

$$\|g\|_{\dot{W}_p^k} = \sup_{|\alpha|=k} \|D^\alpha g\|_{L_p(Q_0)}. \tag{4.1}$$

Напомним также, что компактность вложения пространства $\dot{W}_p^k$ в пространство L_q (профакторизованное по многочленам степени $\leqslant k-1$) эквивалентна неравенству

$$\lambda = \frac{k}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0. \tag{4.2}$$

Отметим также, что если $\dot{W}_p^k$ вложено в L_q, то $\lambda \geqslant 0$ и справедливо неравенство

$$E_k(g, Q_0)_q \leqslant c\|g\|_{\dot{W}_p^k}. \tag{4.3}$$

Здесь и далее через c, c_1, c_2 обозначаются (если не оговорено противное) некоторые положительные постоянные, зависящие только от k, n, p и q.

Основная цель настоящего параграфа — доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено* (4.2) *и* $p \neq q$. *Положим*

$$\alpha = \frac{\lambda}{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \tag{4.4}$$

Тогда $\alpha \notin [0,1]$ *и имеют место эквивалентности*

$$\|b_t^\alpha\|_{L_q} + t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|g_t^\alpha\|_{\dot{W}_p^k} \approx K\big(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, f; L_q, \dot{W}_p^k\big) \tag{4.5}$$

и

$$K\big(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, f; L_q, \dot{W}_p^k\big) \approx t^{\frac{1}{q}} F_\alpha(f)^*(t). \tag{4.6}$$

В (4.5)-(4.6) *константы эквивалентности зависят только от* k, n, p *и* q. *А функции* b_t^α, g_t^α *— построенные в* §3 (*см.* (3.17)-(3.18)) *гладкие разложения Кальдерона-Зигмунда функции* f *для* α, *определенного формулой* (4.4).

Замечание. Утверждение (4.6) получено совместно с Ю. А. Брудным и анонсировано в [12].

Доказательство. То, что $\alpha \notin [0,1]$, легко следует из (4.2). Отметим теперь, что из леммы 3.6 и следствия 3.8 вытекает неравенство

$$\|b_t^\alpha\|_{L_q} + t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|g_t^\alpha\|_{\dot W_p^k} \leqslant ct^{\frac{1}{q}} F_\alpha(f)^*(t), \tag{4.7}$$

где $c > 0$ зависит только от n.

И так как очевидно, что

$$K(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, f; L_q, \dot W_p^k) \geqslant \|b_t^a\|_{L_q} + t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|g_t^a\|\dot W_p^k, \tag{4.8}$$

то для доказательства теоремы достаточно установить неравенство

$$K(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, f; L_q, \dot W_p^k) \geqslant ct^{\frac{1}{q}} F_a(f)^*(t) \tag{4.9}$$

Для доказательства (4.9) рассмотрим произвольную укладку $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$, для которой

$$|\pi|_\alpha = \sum_{Q_i \in \pi} |\, Q_i\,|^\alpha > t. \tag{4.10}$$

Рассмотрим также пространства $l_q(\pi)$, $l_p(\pi)$, состоящие из функций $h : \{Q_i\}_{Q_i\in\pi} \to R$, с нормой

$$\|h\|_{l_r(\pi)} = \left(\sum_{Q_i\in\pi} |h(Q_i)|^r |\, Q_i\,|^\alpha\right)^{\frac{1}{r}} \quad (r = p, q). \tag{4.11}$$

И пусть $F : (L_q, \dot W_p^k) \to (l_q(\pi), l_p(\pi))$ — сублинейное отображение, определенное формулой

$$F(f) = \left\{\frac{E_k(f, Q_i)_q}{|\, Q_i\,|^{\alpha/q}}\right\}_{Q_i\in\pi}. \tag{4.12}$$

Оценим норму этого отображения. Так как

$$\|f\|_{L_q} \geqslant \left(\sum_{Q_i \in \pi} E_k(f, Q_i)_q^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{| Q_i |^{\alpha/q}} \right)^q | Q_i |^{\alpha} \right)^{\frac{1}{q}},$$

то

$$\|F(f)\|_{l_q(\pi)} \leqslant \|f\|_{L_q}. \tag{4.13}$$

Кроме того, из неравенства (3.5) заменой переменных получаем, что

$$\frac{E_k(g, Q_i)_q}{| Q_i |^{\lambda}} \leqslant c \|g\|_{\dot{W}_p^k(Q_i)}, \tag{4.14}$$

где $c > 0$ некоторая постоянная, зависящая только от k, n, p и q, а λ определено формулой (4.2).

Поэтому из (4.4) имеем

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\dot{W}_p^k} &\geqslant c_1 \left(\sum_{Q_i \in \pi} (\|f\|_{\dot{W}_p^k(Q_i)})^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geqslant c_2 \left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{| Q_i |^{\lambda}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= c_2 \left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{| Q_i |^{\alpha/q}} \right)^p | Q_i |^{\alpha} \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|F(f)\|_{l_p(\pi)} \leqslant c \|f\|_{\dot{W}_p^k}. \tag{4.15}$$

Так как отображение F сублинейно, то из (4.14) и (4.15) следует неравенство

$$K(t, f; L_q, \dot{W}_p^k) \geqslant c K(t, F(f); l_q(\pi), l_p(\pi)). \tag{4.16}$$

Из определения (4.12) имеем

$$\begin{aligned}
&K(t, F(f); l_q(\pi), l_p(\pi)) \\
&\qquad \geqslant \inf_{Q_i \in \pi} \frac{E_k(f, Q_i)_q}{| Q_i |^{\alpha/q}} K(t, \chi_{\pi}; l_q(\pi), l_p(\pi)),
\end{aligned} \tag{4.17}$$

где $\chi_\pi : \{Q_i\}_{Q_i\in\pi} \to R$ функция тождественно равная 1.

Из (4.10) легко следует, что

$$K(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \chi_\pi; l_q(\pi), l_p(\pi)) \geqslant ct^{\frac{1}{q}}, \tag{4.18}$$

где $c > 0$ некоторая абсолютная постоянная.

Поэтому из (4.16), (4.17) и (4.18) получаем

$$K(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, f; L_q, \dot{W}_p^k) \geqslant ct^{\frac{1}{q}} \inf_{Q_i\in\pi} \frac{E_k(f, Q_i)_q}{|Q_i|^{\alpha/q}}. \tag{4.19}$$

Так как $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$ — произвольная укладка, удовлетворяющая (4.10), то, беря в (4.19) супремум по всем таким π и вспоминая определение $F_\alpha(f)^*(t)$ (см. (3.2)), получаем (4.9). •

Замечание 4.2. В силу теоремы Герца (см.[25,1])

$$K(t, f; L_1, L_\infty) \approx tM(f)^*(t), \tag{4.20}$$

где $M(f)^*$ — невозрастающая перестановка максимальной функции Харди-Литтльвуда $M(f)(x) = \sup_{\{Q:x\in Q\}} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f|$. Сравнивая этот результат с теоремой 2.3, получаем, что

$$F(f)^* \approx M(f)^*$$

(это нетрудно доказать и непосредственно, используя теорему о покрытии Безиковича).

Можно показать также, что при $\alpha = 1$, $k = 1$, $q = 1$ функция $F_\alpha(f)^*$ эквивалентна перестановке максимальной функции Феффермана-Стейна (см. [22]).

Эти результаты свидетельствуют о том, что величина $F_\alpha(f)^*$ является аналогом перестановки максимальной функции для пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$ при $\alpha = \frac{\lambda}{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$. При этом в качестве максимальной функции для этой пары выступает функция $F_\alpha(f)$, определенная не на исходном множестве Q_0, а на множестве кубов с центрами в Q_0.

Отметим, что множество таких кубов естественно параметризуется множеством пар вида $(x, r)(x \in Q_0, r > 0)$.

Следствие 4.3. *Пусть выполнено* (4.2) *и* $q \in [1, +\infty]$, $p \in (1, +\infty) \setminus \{q\}$. *Тогда при* α *из* (4.4) *имеет место эквивалентность*

$$\|f\|_{\dot{W}_p^k} \approx \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} F_\alpha(f)^*(t) \tag{4.21}$$

с постоянными эквивалентности, не зависящими от $t > 0$ *и* $f \in \dot{W}_p^k$.

Доказательство. Так как при $p \in (1, +\infty)$ пространство $\dot{W}_p^k$ рефлексивно, то оно относительно полно в L_q. Поэтому (см. [11]) из теоремы 4.1 имеем

$$\|f\|_{\dot{W}_p^k} = \sup_{t>0} \frac{K(t, f; L_q, \dot{W}_p^k)}{t} \approx \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} F_\alpha(f)^*(t). \quad \bullet$$

Хорошо известно (см.[31, 3]), что при p, $q \in (1, +\infty)$ справедливо равенство

$$(L_q, \dot{W}_p^k)_{\theta, p_\theta} = \dot{B}_{p_\theta}^{\theta k} \quad \left(\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}\right). \tag{4.23}$$

где через $\dot{B}_{p_\theta}^{\theta k}$ обозначено однородное пространство Бесова. Поэтому из теоремы 4.1 имеем

Следствие 4.4. *В условиях теоремы* 4.1 *при* p, $q \in (1, +\infty)$ *имеет место эквивалентность*

$$\|f\|_{\dot{B}_{p_\theta}^{\theta k}} \approx \left(\int_0^{+\infty} (F_\alpha(f)^*(t))^{p_\theta} \, dt\right)^{\frac{1}{p_\theta}} \quad \left(\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{p}\right) \tag{4.24}$$

с постоянными, не зависящими от $f \in \dot{B}_{p_\theta}^{\theta k}$.

Замечание 4.5. Из (4.20) и того, что $(L_1, L_\infty)_{\theta, p_\theta} = L_{p_\theta}$, следует максимальная теорема Харди–Литтльвуда (см. [24, 32]):

$$\|f\|_{L_{p_\theta}} \approx \left[\int_0^{+\infty} (M(f)^*(t))^{p_\theta} \, dt\right]^{\frac{1}{p_\theta}} = \left[\int_0^{+\infty} (M(f)(t))^{p_\theta} \, dt\right]^{\frac{1}{p_\theta}}. \tag{4.25}$$

Сравнивая эти формулы с (4.24) и учитывая замечание 4.2, видим, что (4.24) представляет собой аналог максимальной теоремы Харди–Литтльвуда для пары $(L_q, \dot{W}_p^k)$.

Покажем теперь, как из доказанного получается теорема Ю. А. Брудного, сформулированная во Введении.

Следствие 4.6. *Если* $p \in (1, +\infty)$, $\lambda = \frac{k}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *и* $\dot{W}_p^k$ *вложено в* L_q, *то*

$$\|f\|_{\dot{W}_p^k} \approx \sup_{\pi=\{Q_i\}} \left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{F_k(f, Q_i)_q}{|Q_i|^\lambda} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.26}$$

Доказательство. Начало доказательства теоремы 4.1 показывает, что правая часть в (4.26) не превышает левой части (4.26). Доказательства противоположного неравенства сначала проводится в предположении $q \neq p$ и $\lambda > 0$. В этом случае из определения $F_\alpha(f)^*(t)$ (см.(3.2)) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая укладка $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$, что $|\pi|_\alpha = \sum\limits_{Q_i \in \pi} |Q_i|^\alpha > t$ и

$$\inf_{Q_i \in \pi} \frac{E_k(f, Q)_q}{|Q|^{\alpha/q}} \geqslant F_\alpha(f)^*(t) - \varepsilon.$$

Поэтому

$$\left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{|Q_i|^\lambda} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{Q_i \in \pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{|Q_i|^{\alpha/q}} \right)^p |Q_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geqslant (F_\alpha(f)^*(t) - \varepsilon) \left(\sum_{Q_i \in \pi} |Q_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant t^{\frac{1}{p}} (F_\alpha(f)^*(t) - \varepsilon).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда, учитывая (4.21), получаем требуемое неравенство.

Заметим теперь, что в оставшихся случаях можно выбрать такое число $r < q$, для которого в силу доказанного имеет место (4.26). Поэтому нужная оценка будет следовать из неравенства Гёльдера: $E_k(f, Q)_r \leqslant |Q|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} E_k(f, Q)_q$. •

В заключение объясним, как с помощью изложенной техники доказываются известные результаты для случая $p = q$.

Теорема 4.7. *С постоянными, не зависящими от* $f \in L_q$, $t > 0$, *имеет место эквивалентность*

$$K(t, f; L_q, \dot{W}_q^k) \approx \sup_\pi \left(\sum_{Q_i \in \pi} E_k(f, Q_i)_q^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.27}$$

где $\sup$ *берется по всем укладкам* $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$, *состоящим из кубов* Q_i *объема* $t^{\frac{n}{k}}$ *с центрами в* Q_0.

Доказательство. То, что правая часть в (4.27) не превышает левой доказывается по той же схеме, что и в теореме 4.1. Доказательства противоположного неравенства такое же, как в теореме 4.1, за исключением построения семейства кубов $\{K_i\}_{i\in I}$. В рассматриваемом случае $p = q$ построение этого семейства несложно. Прежде всего отметим, что достаточно ограничиться случаем, когда $\left(\frac{2}{5}\right)^n t^{\frac{n}{k}} = m^{-n}$ и m — натуральное.

В этом случае можно разбить Q_0 на кубы Q_i объема $\left(\frac{2}{5}\right)^n t^{\frac{n}{k}}$. Положим $K_i = \frac{5}{2} Q_i$. Тогда, как нетрудно видеть, семейство кубов $\{K_i\}_{i\in I}$ (оно состоит из кубов объема $t^{\frac{n}{k}}$) конечнократно с кратностью, зависящей только от n, сильнозацеплено с коэффициентом зацепления зависящим только от n и, кроме того, $Q_0 \subset \bigcup_i \frac{1}{2} K_i$. Эти свойства позволяют провести оценки §3 для разложения типа Кальдерона–Зигмунда по построенному таким образом семейству кубов $\{K_i\}_{i\in I}$. •

Покажем теперь, как из доказанного получается сформулированная во введении теорема Ю. А. Брудного для случая $p = q$.

Следствие 4.8. *Если* $q \in (1, +\infty)$, *то*

$$\|f\|_{\dot W_q^k} \approx \sup_{\pi=\{Q_i\}} \left(\sum_{Q_i\in\pi} \left(\frac{E_k(f, Q_i)_q}{|Q_i|^{\frac{k}{n}}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.28}$$

где $\sup$ *берется по всем укладкам* $\pi = \{Q_i\}_{i=1}^{|\pi|}$, *состоящим из кубов* Q_i *равного объема с центрами в* Q_0.

Доказательство. Так как при $q \in (1, +\infty)$ пространство $\dot W_q^k$ относительно полно в L_q, то

$$\|f\|_{\dot W_q^k} \approx \sup_{t>0} \frac{K(t, f; L_q, \dot W_q^k)}{t}. \tag{4.29}$$

Осталось воспользоваться теоремой 4.7. •

Хорошо известно (см.[30]), что

$$K(t, f; L_q, \dot W_q^k) \approx \omega_k(f, t^{\frac{1}{k}})_q, \tag{4.30}$$

где $\omega_k(f, t)_q$ — k-й модуль непрерывности в L_q. Поэтому из теоремы 4.7 получается следующий (он принадлежит Ю. А. Брудному) важный результат.

Следствие 4.9 (атомное разложение модуля непрерывности). *Имеет место эквивалентность*

$$\omega_k(f,t)_q \approx \sup_{\pi}\left(\sum_{Q_i\in\pi} E_k(f,Q_i)_q^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.31}$$

где верхняя грань берется по всем укладкам, состоящим из кубов объема t^n с центрами в Q_0.

§5. Доказательство теоремы 1.9 о покрытии для $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$.

1. Построение липшицевой мажоранты. Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченное множество, $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ — семейство кубов Q_x (x — центр куба Q_x) с гранями, параллельными координатным плоскостям, среди которых могут быть и вырожденные, т.е. с объемом $|Q_x|$ равным нулю.

Будем предполагать, что конечна величина

$$\delta = \sup_{x\in\Omega} r(Q_x) < +\infty. \tag{5.1}$$

Зафиксируем число $q < 1$ и построим конечное или счетное семейство кубов $\{Q^i_{x_i}\}$, которые в дальнейшем будем называть липшицевой мажорантой семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$.

Для этого обозначим

$$\Omega_1 = \Omega \tag{5.2}$$

и для всех $x \in \Omega_1$ положим

$$Q^1_x = Q_x\,. \tag{5.3}$$

Возьмем в качестве x_1 элемент из Ω_1 такой, что

$$r(Q^1_{x_1}) \geqslant \frac{1}{1+q}\cdot\delta_1, \tag{5.4}$$

где

$$\delta_1 = \sup_{x\in\Omega_1} r(Q^1_x). \tag{5.5}$$

Этим x_1, а значит и куб $Q^1_{x_1}$, построены.

Если множество Ω_i, семейство кубов $\{Q^i_x\}_{x\in\Omega_i}$ и элемент $x_i \in \Omega_i$ построены, то положим

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i \setminus Q^i_{x_i}\,. \tag{5.6}$$

Для $x \in \Omega_{i+1}$ куб Q_x^{i+1} определим, задав его радиус формулой

$$r(Q_x^{i+1}) = \max(r(Q_x^i), r(Q_{x_i}^i) - q\|x - x_i\|). \tag{5.7}$$

Формула (5.7) обеспечивает липшицевость (см. ниже предложение 5.1) конструируемого семейства кубов. Из этой формулы, в частности, следует, что

$$Q_x^i \subset Q_x^{i+1} \quad (x \in \Omega_{i+1}), \tag{5.8}$$

т.е. на каждом шаге кубы не уменьшаются.

Приведем алгоритм построения точки $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$. Пусть

$$\delta_{i+1} = \sup_{x \in \Omega_{i+1}} r(Q_x^{i+1}). \tag{5.9}$$

Если $\delta_{i+1} = 0$, то все кубы Q_x^{i+1} с центрами в Ω_{i+1} вырождены и процесс построения точек x_j прекращается на i-м шаге. Если же $\delta_{i+1} > 0$, то элемент $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$ выбирается так, чтобы

$$r(Q_{x_{i+1}}^{i+1}) \geqslant \frac{1}{1+q} \cdot \delta_{i+1}. \tag{5.10}$$

Этим процесс построения множества Ω_{i+1}, семейства кубов $\{Q_x^{i+1}\}_{x \in \Omega_{i+1}}$ и элементов $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$ полностью описан.

В результате этого рекуррентного процесса получим некоторое конечное или счетное семейство кубов $\{Q_{x_i}^i\}$, которое в дальнейшем будем называть липшицевой мажорантой исходного семейства кубов $\{Q_x\}_{x \in \Omega}$.

Прежде чем приступить к подробному исследованию свойств семейства $\{Q_{x_i}^i\}$, отметим, что, несмотря на пошаговое неуменьшение кубов в рекуррентном процессе, справедливо неравенство

$$\delta_j \leqslant \delta_i \quad (j > i). \tag{5.11}$$

Действительно, из (5.7) следует, что

$$r(Q_x^{i+1}) \leqslant \max(r(Q_x^i), r(Q_{x_i}^i)) \leqslant \delta_i.$$

Поэтому

$$\delta_{i+1} = \sup_{x \in \Omega_{i+1}} r(Q_x^{i+1}) \leqslant \delta_i,$$

откуда и следует (5.11).

Поэтому при $j \geqslant i$ из (5.10) имеем

$$r(Q_{x_j}^j) \leqslant \delta_j \leqslant \delta_i \leqslant (1+q) r(Q_{x_i}^i) \quad (j \geqslant i). \tag{5.12}$$

В частности,

$$\sup_j r(Q_{x_j}^j) \leqslant \delta_1 = \delta = \sup_{x \in \Omega} r(Q_x). \tag{5.13}$$

2. Простейшие свойства липшицевой мажоранты. Семейство кубов $\{K_x\}$ (x — центр куба K_x) называется *липшицевым с показателем* c, если $|r(K_x) - r(K_{x'})| \leqslant c\|x - x'\|$ для любых двух кубов семейства.

Предложение 5.1. *Семейство $\{Q_{x_i}^i\}$ липшицево с показателем $q < 1$.*

Доказательство. Пусть $j > i$. Если $r(Q_{x_j}^j) \geqslant r(Q_{x_i}^i)$, то из (5.12) имеем

$$|r(Q_{x_j}^j) - r(Q_{x_i}^i)| \leqslant q r(Q_{x_i}^i)$$

и так как $x_j \notin Q_{x_i}^i$, то $r(Q_{x_i}^i) < \|x_j - x_i\|$. Поэтому

$$|r(Q_{x_j}^j) - r(Q_{x_i}^i)| \leqslant q \cdot \|x_j - x_i\|.$$

Если же $r(Q_{x_j}^j) < r(Q_{x_i}^i)$, то из (5.8) и (5.7) имеем

$$\begin{aligned} |r(Q_{x_j}^j) - r(Q_{x_i}^i)| &\leqslant r(Q_{x_i}^i) - r(Q_{x_j}^{i+1}) \\ &\leqslant r(Q_{x_i}^i) - (r(Q_{x_i}^i) - q\|x_j - x_i\|) = q\|x_j - x_i\|. \quad \bullet \end{aligned}$$

Для доказательства следующего свойства нам понадобится

Лемма 5.2. *Пусть K_u, K_ν — кубы с центрами в точках u и ν. Предположим, что $\nu \notin K_u$ и*

$$|r(K_u) - r(K_\nu)| \leqslant q\|u - \nu\|. \tag{5.14}$$

Тогда

$$\frac{1}{2+q}K_u \cap \frac{1}{2+q}K_\nu = \varnothing.$$

Доказательство. Предположим противное, и пусть $z \in \frac{1}{2+q}K_u \cap \frac{1}{2+q}K_\nu$. Тогда

$$\|u - \nu\| \leqslant \|u - z\| + \|z - \nu\| \leqslant \frac{1}{2+q}r(K_u) + \frac{1}{2+q}r(K_\nu).$$

Но из (5.14) следует, что

$$r(K_\nu) \leqslant r(K_u) + q\|u - \nu\|.$$

Поэтому

$$\|u - \nu\| \leqslant \frac{2}{2+q}r(K_u) + \frac{q}{2+q}\|u - \nu\|$$

и, следовательно, $\|u - \nu\| \leqslant r(K_u)$, но это противоречит тому, что $\nu \notin K_u$. •

Следствие 5.3. *Семейство* $\{\frac{1}{2+q}\, Q^i_{x_i}\}$ *является укладкой.*

Доказательство. Из построения семейства $\{Q^i_{x_i}\}$ следует, что если $j > i$, то $x_j \notin Q^i_{x_i}$. Поэтому из предложения 5.1 имеем, что для любых двух кубов из семейства $\{Q^i_{x_i}\}$ выполнены условия леммы 5.2. Применяя эту лемму, получаем требуемое утверждение. •

Третьим свойством построенного семейства кубов $\{Q^i_{x_i}\}$ является то, что объединение этих кубов содержит центры всех невырожденных кубов исходного семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$.

Действительно, обозначим

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : |Q_x| \neq 0\}. \tag{5.15}$$

Предложение 5.4. *Справедливо вложение*

$$\Omega_0 \subset \bigcup_{i\in I} Q^i_{x_i}; \tag{5.16}$$

более того, если $|\,Q_x\,| \neq 0$, *то найдется номер* $i \in I$ *такой, что*

$$Q_x \subset (2+q)\, Q^i_{x_i}\,.$$

Доказательство. Предположим противное. Если $x_0 \in \Omega_0 \setminus (\bigcup_{i\in I} Q^i_{x_i})$, то из алгоритма построения семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ следует, что процесс построения кубов $Q^i_{x_i}$ не обрывается ни на каком конечном шаге, ибо

$$\delta_{i+1} = \sup_{x\in\Omega_{i+1}} r(Q^{i+1}_x) \geqslant r(Q^{i+1}_{x_0}) \geqslant r(Q_{x_0}) > 0. \tag{5.17}$$

Следовательно, семейство $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ бесконечно, причем радиусы $r(Q^i_{x_i})$ в силу (5.10) и (5.17) не менее, чем $\frac{1}{1+q} r(Q_{x_0})$. Но это противоречит тому, что в силу следствия 5.3 кубы $\{\frac{1}{2+q}\, Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ образуют укладку, а их центры лежат в ограниченном множестве Ω. Полученное противоречие доказывает (5.16).

Пусть теперь элемент $x \in \Omega$ такой, что куб Q_x невырожден. В силу (5.16) найдется наименьший номер $i = i(x)$ такой, что $x \in Q^i_{x_i}$. Тогда $x \in \Omega_i$ и $r(Q_x) \leqslant \delta_i \leqslant (1+q) r(Q^i_{x_i})$. Поэтому

$$Q_x \subset (2+q)\, Q^i_{x_i}\,. \quad \bullet$$

В случае, когда все кубы Q_x исходного семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ невырождены, из предложения 5.4 следует, что

$$\Omega \subset \bigcup_{i\in I} Q^i_{x_i}, \tag{5.18}$$

т.е. семейство кубов $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ образует покрытие всего Ω.

В случае, когда среди кубов Q_x имеются вырожденные, справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.5. *Пусть* $\varepsilon_0 > 0$ *таково, что*

$$1 + \varepsilon_0 < \frac{1}{q}. \tag{5.19}$$

Тогда

$$\Omega \cap \left(\bigcup_{i \in I} Q^i_{x_i} \right) = \Omega \cap \left(\bigcup_{i \in I} (1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i} \right).$$

Доказательство. Так как правая часть содержит левую, то достаточно доказать, что имеет место включение

$$\Omega \cap (1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i} \subset \bigcup_{i \in I} Q^i_{x_i}. \tag{5.20}$$

Для этого отметим, что из (5.19) следует, что если $x \in (1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}$, то $\|x - x_i\| < \frac{1}{q} r(Q^i_{x_i})$. Поэтому, если $x \in \Omega_{i+1} \cap (1+\varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}$, то из формулы (5.7) имеем

$$r(Q^{i+1}_x) \geqslant r(Q^i_{x_i}) - q\|x - x_i\| > 0.$$

Поэтому из предложения 5.4, примененного к семейству $\{Q^{i+1}_x\}_{x \in \Omega_{i+1}}$, получаем

$$\Omega_{i+1} \cap (1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i} \subset \bigcup_{j \geqslant i+1} Q^j_{x_j}.$$

Поэтому для доказательства (5.20) осталось заметить, что $\Omega_{i+1} = \Omega \backslash \bigcup_{j<i} Q^j_{x_j}$, и, значит,

$$\begin{aligned} &\Omega \cap (1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i} \\ &\quad \subset [\Omega_{i+1} \cap (1 + \varepsilon_0)\, Q_{x_i}] \cup \bigcup_{j \leqslant i} Q_{x_i} \subset \bigcup_{j} Q_{x_j}. \quad \bullet \end{aligned}$$

3. Доказательство конечнократности. Цель настоящего пункта — доказательство того, что семейство $\{Q^i_{x_i}\}_{i \in I}$ не только является конечнократным, но и имеет некоторый „запас кратности“ $\varepsilon_0 > 0$, т.е. конечнократно и семейство $\{(1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}\}_{i \in I}$.

Определение 5.6. Будем говорить, что семейство кубов $U = \{U_x\}$ соизмеримо с коэффициентом $\lambda > 0$, если из $U_x \cap U_y \neq \varnothing$ следует, что

$$\max(r(U_x), r(U_y)) \leqslant \lambda \min(r(U_x), r(U_y)). \tag{5.21}$$

Предложение 5.7. *Пусть $U = \{U_x\}$ — липшицево семейство кубов с показателем $q < 1$. Тогда оно является соизмеримым с коэффициентом*

$$\lambda = \frac{1+q}{1-q}. \tag{5.22}$$

Доказательство. Если $z \in U_x \cap U_y$ и $r(U_x) \geqslant r(U_y)$, то из липшицевости имеем

$$\begin{aligned} r(U_x) - r(U_y) &\leqslant q\|x-y\| \leqslant q\|x-z\| + q\|z-y\| \\ &\leqslant qr(U_x) + qr(U_y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$r(U_x) \leqslant \frac{1+q}{1-q} r(U_y). \quad \bullet$$

Следствие 5.8. *Если $\varepsilon_0 > 0$ таково, что*

$$1 + \varepsilon_0 < \frac{1}{q}, \tag{5.23}$$

то семейство $\{(1+\varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ соизмеримо с коэффициентом

$$\lambda = \frac{1+(1+\varepsilon_0)q}{1-(1+\varepsilon_0)q}. \tag{5.24}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что семейство кубов $\{(1+\varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ является липшицевым с показателем $(1+\varepsilon_0)q$, который в силу (5.23) меньше 1. $\bullet$

Определение 5.9. Будем говорить, что семейство кубов $U = \{U_x\}$ является β-укладкой ($\beta > 0$), если семейство $\{\beta U_x\}$ является укладкой.

Таким образом, предложение 5.3 показывает, что семейство $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ является β-укладкой при $\beta = \frac{1}{2+q}$.

Предложение 5.10. *Если семейство кубов $U = \{U_x\}$ соизмеримо с коэффициентом λ и является β-укладкой с $\beta \leqslant 1$, то оно конечнократно и для коэффициента кратности M справедливо неравенство*

$$M \leqslant 2^n \lambda^{2n} \beta^{-n}. \tag{5.25}$$

Доказательство. Пусть $x \in R^n$ и $x \in U_{x_{i_0}}$. Если $x \in U_{x_i}$, то из соизмеримости следует, что

$$r(U_{x_i}) \leqslant \lambda r(U_{x_{i_0}}) \quad \text{и} \quad r(U_{x_{i_0}}) \leqslant \lambda r(U_{x_i}). \tag{5.26}$$

Поэтому

$$\|x - x_i\| \leqslant r(U_{x_i}) \leqslant \lambda r(U_{x_{i_0}}),$$

т.е. все точки x_i лежат в кубе Q с центром в точке x и радиуса $\lambda r(U_{x_{i_0}})$. Так как кубы βU_{x_i} не пересекаются и имеют в силу (5.26) радиусы не менее $\beta\lambda^{-1} r(U_{x_{i_0}})$, то каждый из них высекает из куба Q объем не менее $[\beta\lambda^{-1} r(U_{x_{i_0}})]^n$. Поэтому количество различных точек x_i легко оценить из объемных соображений:

$$M \leqslant \frac{|Q|}{[\beta\lambda^{-1} r(U_{x_{i_0}})]^n} = 2^n \lambda^{2n} \beta^{-n}. \quad \bullet$$

Следствие 5.11. *Если $\varepsilon_0 > 0$ таково, что*

$$1 + \varepsilon_0 < \frac{1}{q}, \tag{5.27}$$

то семейство $\{(1+\varepsilon_0) Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ конечнократно, причем при фиксированных q и ε_0 кратность его оценивается сверху через n (n — размерность пространства R^n).

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу следствия 5.8 семейство $\{(1+\varepsilon_0) Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ соизмеримо с коэффициентом

$$\lambda = \frac{1 + (1+\varepsilon_0) q}{1 - (1+\varepsilon_0) q},$$

а в силу следствия 5.3 является *β-укладкой с*

$$\beta = \frac{1}{(1+\varepsilon_0)(2+q)}.$$

Поэтому из предложения 5.10 следует, что его кратность оценивается сверху величиной

$$M \leqslant 2^n \cdot \left[\frac{1+(1+\varepsilon_0)q}{1-(1+\varepsilon_0)q}\right]^{2n} \cdot [(1+\varepsilon_0)(2+q)]^n,$$

которая при фиксированных ε_0 и q зависит только от n. •

4. Построение покрытия со свойством сильной зацепленности. Наличие „запаса кратности" у семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ позволяет при $q < \frac{1}{5}$ сконструировать семейство $K_i = \lambda_i Q^i_{x_i}$ ($\lambda_i \in [3,5]$, $i \in I$), являющееся как конечнократным, так и сильнозацепленным.

Доказательство этого факта основывается на оценках объемов пересечений кубов.

Приведем необходимые определения и утверждения.

Определение 5.12. Пусть K_u, K_ν — кубы с центрами в точках u и ν соответственно. Коэффициентом проникновения куба K_u в куб K_ν назовем наименьшее число $\gamma \geqslant 0$ такое, что

$$K_u \cap \gamma K_\nu \neq \varnothing. \tag{5.28}$$

Таким образом, коэффициент проникновения равен нулю тогда и только тогда, когда $\nu \in K_u$ и больше 1, если кубы K_u и K_ν не пересекаются.

Предложение 5.13. *Пусть K_u, K_ν — кубы с центрами в точках u и ν соответственно. Тогда*

a) *если $u \notin K_\nu$ и коэффициент проникновения куба K_u в куб K_ν не превышает $\gamma_0 < 1$, то*

$$|K_u \cap K_\nu| \geqslant \left(\frac{1-\gamma_0}{2}\right)^n |K_\nu|; \tag{5.29}$$

b) *если $u \in K_\nu$, то*

$$|K_u \cap K_\nu| \geqslant \frac{1}{2^n}\min(|K_u|, |K_\nu|). \tag{5.30}$$

Доказательство. a) Возьмем точку $z \in K_u \cap \gamma_0 K_\nu$. Тогда куб Q_z с центром в точке z и радиуса $(1-\gamma_0)r(K_\nu)$ содержится в K_ν. Рассмотрим квадрант с началом в точке z, который содержит точку u. Из того, что $u \notin K_\nu$, следует, что

$$\|u - z\| \geqslant (1-\gamma_0)r(K_\nu).$$

Поэтому пересечение этого квадранта с кубом Q_z содержится в K_u. Объем этого пересечения и равен правой части (5.29).

b) Если $r(K_u) \geqslant r(K_\nu)$, то квадрант куба K_ν, содержащий u, содержится в K_u и объем этого квадранта равен $2^{-n}|K_\nu|$ и, следовательно, справедливо (5.30).

Если же $r(K_u) \leqslant r(K_\nu)$, то рассмотрим квадрант с началом в точке u, который содержит точку ν. Пересечение этого квадранта с кубом K_u содержится в K_ν. Его объем равен $2^{-n}|K_u|$ и, следовательно, имеем (5.30). •

Следствие 5.14. *Если коэффициент проникновения куба K_u в куб K_ν не превышает $\gamma_0 < 1$, то*

$$|K_u \cap K_\nu| \geqslant \left(\frac{1-\gamma_0}{2}\right)^n \min(|K_u|, |K_\nu|). \tag{5.31}$$

Доказательство. Неравенство (5.31) следует из того, что выражения, стоящие в правых частях (5.29) и (5.30), не менее правой части (5.31). •

Теперь все готово для доказательства следующей леммы.

Лемма 5.15. *Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — конечнократное, соизмеримое семейство кубов с коэффициентами M и λ соответственно.*

Зафиксируем число $a \in (0,1)$. Тогда существуют такие числа $\varepsilon_i \in [a,1]$, что семейство кубов $\{\varepsilon_i U_i\}_{i\in I}$ будет сильнозацепленным с коэффициентом зацепления ε, зависящим только от a, M, λ и размерности n.

Доказательство. Из конечнократности следует (см. замечание 1.3), что семейство $\{U_i\}_{i\in I}$ не более чем счетно. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что i — порядковый номер куба U_i.

Укажем алгоритм последовательного определения чисел ε_i. Положим $\varepsilon_1 = 1$. Пусть числа $\varepsilon_i \in [a,1]$ $(i = 1,\dots,N)$ уже определены. Так как $\varepsilon_i \leqslant 1$, то куб U_{N+1} пересекается не более чем с M уже построенных кубов $\varepsilon_i U_i$ $(i = 1,\dots,N)$. Обозначим эти кубы через $K_1, K_2,\dots,K_m$ $(m \leqslant M)$ и определим число $q_0 < 1$ так, чтобы

$$q_0^{M+1} = a. \tag{5.32}$$

Разобъем интервал $(a, 1]$ на $M+1$ интервалов

$$\Delta_k = (q_0^{k+1}, q_0^k] \quad (k = 0, 1, \dots, M).$$

Сопоставим каждому кубу K_i $(i = 1, \dots, m)$ число γ_i — коэффициент проникновения куба K_i в куб U_{N+1}, т.е. γ_i — наименьшее число $\gamma \geqslant 0$, для которого

$$K_i \cap \gamma U_{N+1} \neq \varnothing. \tag{5.33}$$

Так как $m \leqslant M$, то этих коэффициентов не более чем M и среди интервалов Δ_k найдется интервал $\Delta_{k_0} = (q_0^{k_0+1}, q_0^{k_0}]$, не содержащий ни одно из чисел γ_i $(i = 1, \dots, m)$.

Положим

$$\varepsilon_{N+1} = q_0^{k_0} \quad \text{и} \quad K_{N+1} = \varepsilon_{N+1} U_{N+1}. \tag{5.34}$$

Тогда из (5.32) следует, что $\varepsilon_{N+1} \in [a, 1]$.

Докажем свойство сильной зацепленности для так построенного семейства $\{K_i\}_{i \in I}$.

Из правила выбора интервала Δ_{k_0} следует, что если

$$K_i \cap K_{N+1} \neq \varnothing \quad (i \leqslant N), \tag{5.35}$$

то $\gamma_i \leqslant q_0^{k+1}$ и, следовательно,

$$K_i \cap q_0 K_{N+1} \neq \varnothing \quad (i \leqslant N). \tag{5.36}$$

Поэтому коэффициент проникновения куба K_i в куб K_{N+1} не превосходит $q_0 < 1$. Поэтому из следствия 5.14 имеем

$$\begin{aligned} |K_i \cap K_{N+1}| &\geqslant \left(\frac{1-q_0}{2}\right)^n \min(|K_i|, |K_{N+1}|) \\ &\geqslant \left(\frac{1-q_0}{2}\right)^n a^n \min(|U_i|, |U_{N+1}|). \end{aligned} \tag{5.37}$$

Так как $\varepsilon_i \leqslant 1$, то из $K_i \cap K_{N+1} \neq \varnothing$ следует, что $U_i \cap U_{N+1} \neq \varnothing$. Поэтому из условия соизмеримости получаем

$$\begin{aligned} \min(|U_i, |U_{N+1}|) &\geqslant \lambda^n \max(|U_i|, |U_{N+1}|) \\ &\geqslant \lambda^n \max(|K_i|, |K_{N+1}|). \end{aligned} \tag{5.38}$$

Таким образом, если $K_i \cap K_{N+1} \neq \varnothing$, то

$$|K_i \cap K_{N+1}| \geqslant \left(\frac{1-q_0}{2}\right)^n a^n \lambda^n \max(|K_i|, |K_{N+1}|). \tag{5.39}$$

Выражая q_0 из (5.32), окончательно имеем

$$|K_i \cap K_{N+1}| \geqslant \left(\frac{1-a^{\frac{1}{M+1}}}{2}\right)^n a^n \lambda^n \max(|K_i|, |K_{N+1}|). \quad \bullet \tag{5.40}$$

Следствие 5.16. *Пусть* $\varepsilon_0 > 0$ *выбрано так, что*

$$1 + \varepsilon_0 < \frac{1}{q}. \tag{5.41}$$

Тогда существуют такие числа $\lambda_i \in [1 + \frac{\varepsilon_0}{2}, 1 + \varepsilon_0]$, *что семейство кубов* $\{\lambda_i Q^i_{x_i}\}_{i \in I}$ *является конечнократным и сильнозацепленным с коэффициентами кратности* M *и зацепления* ε, *зависящими только от размерности* n.

Доказательство. Применим лемму 5.15 к семейству кубов $U_i = (1+\varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}$, которое в силу следствий 5.8 и 5.11 конечнократно и соизмеримо с коэффициентами M и λ, зависящими только от размерности n. В качестве a возьмем число

$$a = \frac{1 + \frac{\varepsilon_0}{2}}{1 + \varepsilon_0}. \tag{5.42}$$

Тогда из леммы 5.15 следует, что существуют такие числа $\varepsilon_i \in [a, 1]$, что семейство кубов

$$K_i = \varepsilon_i(1 + \varepsilon_0)\, Q^i_{x_i} \quad (i \in I) \tag{5.43}$$

сильнозацеплено с коэффициентом зацепления ε, зависящим только от n.

Так как $\varepsilon_i \leqslant 1$, то семейство $\{K_i\}_{i\in I}$ будет конечнократным с кратностью, зависящей только от n.

Осталось заметить, что из (5.42) следует, что числа

$$\lambda_i = \varepsilon_i(1+\varepsilon_0) \tag{5.44}$$

лежат в интервале $[1+\frac{\varepsilon_0}{2}, 1+\varepsilon_0]$. •

5. Оценка α-емкости при $\alpha > 1-\frac{1}{n}$. В этом пункте будет доказано, что α-емкость семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ не превосходит α-емкости исходного семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ с константой, зависящей только от размерности n, если $\alpha > 1-\frac{1}{n}$.

Для доказательства разобьем кубы семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ на две группы. В первую группу отнесем те кубы, для которых имеет место равенство

$$Q^i_{x_i} = Q^1_{x_i}, \tag{5.45}$$

т.е. кубы, которые не увеличивались в процессе построения семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$. Эти кубы будем называть первичными, остальные кубы будем называть вторичными. Из формулы (5.7) следует, что для каждого вторичного куба $Q^j_{x_j}$ найдется куб $Q^i_{x_i}$ с номером $i<j$ такой, что

$$r(Q^j_{x_j}) = r(Q^i_{x_i}) - q\|x_j - x_i\|. \tag{5.46}$$

Куб $Q^i_{x_i}$ с наименьшим номером i, для которого выполнено (5.46), назовем образующим для вторичного куба $Q^j_{x_j}$.

Предложение 5.17. *Образующий куб является первичным.*

Доказательство. Если образующий куб $Q^i_{x_i}$ для вторичного куба $Q^j_{x_j}$ сам является вторичным, то найдется номер $i_0 < i$ такой, что

$$r(Q^i_{x_i}) = r(Q^{i_0}_{x_{i_0}}) - q\|x_i - x_{i_0}\|.$$

Поэтому из (5.46) имеем

$$\begin{aligned} r(Q^j_{x_j}) &= r(Q^{i_0}_{x_{i_0}}) - q\|x_j - x_i\| - q\|x_i - x_{i_0}\| \\ &\leqslant r(Q^{i_0}_{x_{i_0}}) - q\|x_j - x_{i_0}\|. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (5.8) и (5.7) следует, что

$$r(Q^j_{x_j}) \geqslant r(Q^{i_0+1}_{x_j}) \geqslant r(Q^{i_0}_{x_{i_0}}) - q\|x_j - x_{i_0}\|.$$

Поэтому

$$r(Q^j_{x_j}) = r(Q^{i_0}_{x_{i_0}}) - q\|x_j - x_{i_0}\|,$$

но это противоречит выбору i как наименьшего номера, для которого справедливо (5.46). •

Обозначим через F_i семейство вторичных кубов $Q^j_{x_j}$, для которых образующим является куб $Q^i_{x_i}$.

Предложение 5.18. *Если* $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$, *то*

$$\sum_{Q^j_{x_j} \in F_i} |\, Q^j_{x_j} \,|^\alpha \leqslant C |\, Q^i_{x_i} \,|^\alpha, \tag{5.47}$$

где $C > 0$ *— некоторая постоянная, зависящая только от* n.

Доказательство. В силу равенства (5.46) для любого $Q^j_{x_j} \in F_i$ будет

$$r(Q^j_{x_j}) = r(Q^i_{x_i}) - q\|x_j - x_i\|. \tag{5.48}$$

Поэтому найдется такое целое $m = m(j) \geqslant 0$, что

$$\frac{1}{2^{m+1}} r(Q^i_{x_i}) \leqslant r(Q^j_{x_j}) < \frac{1}{2^m} r(Q^i_{x_i}). \tag{5.49}$$

Обозначим через C_m количество кубов $Q^j_{x_j} \in F_i$, удовлетворяющих (5.49). Тогда

$$\sum_{Q^j_{x_j} \in F_i} |\, Q^j_{x_j} \,|^\alpha \leqslant \Big(\sum_{m=0}^{\infty} C_m \frac{1}{2^{mn\alpha}} \Big) |\, Q^i_{x_i} \,|^\alpha.$$

Так как $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$, то для доказательства (5.47) достаточно доказать, что

$$C_m \leqslant \gamma 2^{m(n-1)}, \tag{5.50}$$

где $\gamma > 0$ зависит только от размерности n.

Обозначим через Z_m множество, состоящее из точек z, для которых справедливы неравенства

$$\frac{1}{2^{m+1}} r(Q^i_{x_i}) \leqslant r(Q^i_{x_i}) - q\|z - x_i\| < \frac{1}{2^m} r(Q^i_{x_i}). \tag{5.51}$$

Поэтому

$$Z_m = Q(x, r_{m+1}) \setminus Q(x, r_m),$$

где

$$r_m = \frac{1}{q} r(Q^i_{x_i}) \Big(1 - \frac{1}{2^m}\Big).$$

Следовательно,

$$|Z_m| = |\, Q(x, r_{m+1})| - |\, Q(x, r_m)| \approx |\, Q^i_{x_i}\,| \cdot 2^{-m}.$$

Так как кубы $\frac{1}{2+q} Q^j_{x_j}$ не пересекаются (см. предложение 5.3), то если $x_j \in Z_m$, то куб $\frac{1}{2+q} Q^j_{x_j}$, имеющий в силу (5.49) объем, пропорциональный величине $|\, Q^i_{x_i}\,| \cdot 2^{-mn}$, высекает из Z_m объем, пропорциональный $|\, Q^i_{x_i}\,| \cdot 2^{-mn}$. Поэтому из объемных соображений следует, что количество различных кубов $Q^j_{x_j}$, удовлетворяющих (5.49), т.е. число C_m, не более

$$C_m \leqslant \gamma \frac{|Q^i_{x_i}| \cdot 2^{-m}}{|\, Q^i_{x_i}\,| \cdot 2^{-mn}} = \gamma \cdot 2^{m(n-1)},$$

где $\gamma > 0$ зависит только от n. •

Предложение 5.19. *Если* $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$, *то*

$$\sum_{i\in I} |\, Q^i_{x_i}\,|^\alpha \leqslant C|\{Q_x\}|_\alpha, \tag{5.52}$$

где $|\{Q_x\}|_\alpha$ — α*-емкость исходного семейства* $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$ *и* $C > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* n.

Доказательство. Из предложения 5.18 следует, что достаточно доказать неравенство

$$\sum_{Q^j_{x_j}\in F} |\, Q^j_{x_j}\,|^\alpha \leqslant \{|\, Q_x\}|_\alpha,$$

где F — совокупность первичных кубов. Однако для первичных кубов $Q^j_{x_j}$ в силу (5.45) и (5.3) будет

$$Q^j_{x_j} = Q_{x_j}\,.$$

Поэтому достаточно показать, что F можно представить в виде конечного и зависящего только от n числа укладок. Но это следует из [10] (см. замечание 1.3), так как в силу следствия 5.11 семейство $\{(1+\varepsilon_0)\, Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$, а значит, и семейство $\{Q^j_{x_j}\}_{Q^j_{x_j}\in F}$, конечнократно и кратность оценивается сверху числом, зависящим только от n. •

Следствие 5.20. *Если* $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$, *то*

$$|\{Q^j_{x_j}\}|_\alpha \leqslant C|\{Q_x\}|_\alpha, \tag{5.53}$$

где $C > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая только от* n.

Доказательство. Неравенство (5.53) следует из (5.52) и определения α-емкости. •

6. Завершение доказательства теоремы 1.9 для случая $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$.

6.1. Случай $\alpha \neq +\infty$. Возьмем $q < \frac{1}{5}$ и $\varepsilon_0 = 4$. Тогда, в силу следствия 5.16, существуют такие числа $\lambda_i = [3,5]$, что кубы $K_{x_i} = \lambda_i\, Q^i_{x_i}$ $(i \in I)$ образуют конечнократное и сильно зацепленное семейство с коэффициентами кратности и зацепления, зависящими только от n.

Кроме того, из предложения 5.5 и того, что $\varepsilon_0 = 4$ и $\lambda_i \in [3,5]$, следует, что

$$\Omega \cap \left(\bigcup_{i\in I} K_{x_i}\right) = \Omega \cap \left(\bigcup_{i\in I} \frac{1}{2} K_{x_i}\right).$$

Таким образом, семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ образует семейство кубов Уитни для множества Ω (см. определение 1.5).

Докажем теперь, что семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ является расширением исходного семейства кубов $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$.

Так как из (5.3) и (5.8) следует, что

$$Q_{x_i} = Q^1_{x_i} \subset Q^i_{x_i} \subset K_{x_i} \quad (i \in I),$$

то выполнено свойство a) из определения 1.8.

Для доказательства свойства b) этого определения воспользуемся предложением 5.4, в силу которого, если $|\, Q_x \,| > 0$, то найдется номер i такой, что

$$Q_x \subset (2+q)\, Q^i_{x_i}.$$

И осталось воспользоваться тем, что $2 + q < 3$ и, следовательно,

$$Q_x \subset \lambda_i\, Q^i_{x_i} = K_{x_i}.$$

Осталось оценить α-емкость семейства $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$. Из следствия 5.20 и того, что $\lambda_i \in [3,5]$, имеем

$$|\{K_{x_i}\}|_\alpha \leqslant C |\{Q_x\}|_\alpha,$$

где $C > 0$ зависит только от n. •

6.2. Случай $\alpha = +\infty$. Разобьем R^n на равные кубы V_i с непересекающимися внутренностями и объемами, равными величине

$$|V_i| = |\{Q_x\}|_{+\infty} = \sup_{x\in\Omega} |\, Q_x \,|. \tag{5.54}$$

Если $\Omega \cap V_i \neq \varnothing$, то возьмем произвольную точку $x_i \in \Omega \cap V_i$ и куб U_{x_i} с центром в точке x_i радиуса

$$r(U_{x_i}) = 8 r(V_i). \tag{5.55}$$

Тогда $V_i \subset \frac{1}{4}U_{x_i}$.

Нетрудно видеть, что семейство $\{U_{x_i}\}_{i\in I}$ конечнократно (с кратностью, зависящей только от n) и соизмеримо с коэффициентом $\lambda = 1$. Поэтому из леммы 5.15 при $a = \frac{1}{2}$ следует, что существует семейство кубов $K_{x_i} = \varepsilon_i U_{x_i}$ с $\varepsilon_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ $(i \in I)$, которое является конечнократным и сильнозацепленным с коэффициентами кратности M и зацепления ε, зависящими только от n.

Так как $V_i \subset \frac{1}{4}U_{x_i} \subset \frac{1}{2}K_{x_i}$, то

$$\Omega \subset \bigcup_{i\in I} V_i \subset \bigcup_{i\in I} \frac{1}{2}K_{x_i} \tag{5.56}$$

и, следовательно, семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ является семейством кубов Уитни для Ω.

Пусть $x \in \Omega$. Тогда из (5.56) следует, что найдется номер $i = i(x)$ такой, что $x \in \frac{1}{2}K_{x_i}$. Так как

$$|\,Q_x\,| \leqslant |\{Q_x\}|_\alpha = |V_i| \leqslant \frac{1}{2^n}|K_{x_i}|,$$

то $r(Q_x) \leqslant \frac{1}{2}r(K_{x_i})$, поэтому $Q_x \subset K_{x_i}$. Следовательно, семейство $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$ является расширением семейства $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$.

Это рассуждение показывает также, что $Q_{x_i} \subset K_{x_i}$.

Осталось оценить α-емкость семейства $\{K_{x_i}\}_{i\in I}$. Требуемая оценка следует из неравенства

$$|\{K_{x_i}\}|_{+\infty} = \sup_{i\in I}|K_{x_i}| \leqslant \sup_{i\in I}|U_{x_i}| \leqslant 8^n \sup_{i\in I}|V_i| = 8^n|\{Q_x\}|_{+\infty}.$$

§6. Доказательство теоремы 1.9 о покрытии для $\alpha < 0$

Доказательство теоремы 1.9 для случая $\alpha < 0$ во многом схоже с доказательством для случая $\alpha > 0$, однако оно обладает рядом особенностей.

1. Построение липшицевой миноранты. Пусть $\Omega_1 \subset R^n$ ограниченное множество, $\{Q_x^1\}_{x\in\Omega_1}$ семейство кубов такое, что

$$\sigma_1 = \inf_{x\in\Omega} r(Q_x^1) > 0. \tag{6.1}$$

Зафиксируем положительное число $q < 1$ и проведем следующее итерационное построение семейства кубов $\{Q_{x_i}^i\}_{i\in I}$, которое будем называть липшицевой минорантой семейства $\{Q_x^1\}_{x\in\Omega_1}$.

В качестве x_1 возьмем элемент из Ω_1 такой, что

$$r(Q^1_{x_1}) \leqslant (1+q)\sigma_1.$$

Если множество Ω_i, семейство кубов $\{Q^i_x\}_{x\in\Omega_i}$ и элемент $x_i \in \Omega_i$ построены, то в качестве Ω_{i+1} возьмем множество

$$\Omega_{i+1} = \Omega_i \setminus Q^i_{x_i}.$$

Кубы Q^{i+1}_x с центрами $x \in \Omega_{i+1}$ определяются формулами

$$r(Q^{i+1}_x) = \min(r(Q^i_x), r(Q^i_{x_i}) + q\|x - x_i\|). \tag{6.2}$$

Таким образом,

$$Q^{i+1}_x \subset Q^i_x \quad (x \in \Omega_{i+1}),$$

т.е. кубы на каждом шаге не увеличиваются.

Для выбора точки $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$ положим

$$\sigma_{i+1} = \inf_{x\in\Omega_{i+1}} r(Q^{i+1}_x).$$

Элемент $x_{i+1} \in \Omega_{i+1}$ выбирается так, чтобы

$$r(Q^{i+1}_{x_{i+1}}) \leqslant (1+q)\sigma_{i+1}.$$

Получаемое в итоге этого итерационного процесса семейство кубов $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ и будем называть липшицевой минорантой семейства $\{Q^1_x\}_{x\in\Omega_1}$.

Отметим, что из формулы (6.2) следует, что

$$r(Q^{i+1}_x) \geqslant \min(r(Q^i_x), r(Q^i_{x_i})) \geqslant \sigma_1 \quad (x \in \Omega_{i+1}).$$

Поэтому $\sigma_{i+1} \geqslant \sigma_i$ и, следовательно,

$$\sigma_j \geqslant \sigma_i \quad (j \geqslant i).$$

В частности,

$$\inf_{i\in I} r(Q^i_{x_i}) \geqslant \sigma_1 > 0.$$

2. Особенности остальных этапов доказательства. Далее схема доказательства аналогична случаю $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$.

В частности, число $\varepsilon_0 > 0$ выбирается так, чтобы $1 + \varepsilon_0 < \frac{1}{q}$. Как и при $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$, первичными кубами называются те кубы $Q^i_{x_i}$, для которых $Q^i_{x_i} = Q^1_{x_i}$, т.е. те кубы, которые не изменялись в процессе построения семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$. Остальные кубы называются вторичными. Из формулы (6.2) следует, что для каждого вторичного куба $Q^j_{x_j}$ найдется куб $Q^i_{x_i}$ с номером $i < j$ такой, что

$$r(Q^j_{x_j}) = r(Q^i_{x_i}) + q\|x_j - x_i\|.$$

Куб $Q^i_{x_i}$ с наименьшим номером i, для которого выполнено это неравенство, будет образующим для вторичного куба $Q^j_{x_j}$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю $\alpha > 1 - \frac{1}{n}$ и даже несколько проще.

Важной особенностью случая $\alpha < 0$ является то, что в качестве семейства кубов $\{Q^1_x\}_{x\in\Omega_1}$ следует брать не исходное семейство $\{Q_x\}_{x\in\Omega}$, а семейство $\{\frac{1}{1+\varepsilon_0} Q_x\}_{x\in\Omega}$. Это изменение позволяет оценить α-емкость семейства $\{Q^i_{x_i}\}_{i\in I}$ через α — емкость исходного семейства кубов. $\{Q^1_s\}_{x\in\Omega_1}$.

В заключение отметим, что в качестве q и ε_0 достаточно взять числа $q < \frac{1}{20}$, $\varepsilon_0 = 19$.

§7. Открытая проблема: случай предельного показателя

Пусть пара $(L_q, \dot{W}^k_p)$ такова, что $\dot{W}^k_p \subset L_q$ и $\lambda = \frac{k}{n} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 0$, т.е. имеет место так называемый случай предельного показателя. Из теоремы Брудного (см. введение) следует, что и в этом случае пространство $\dot{W}^k_p$ описывается с помощью локальных приближений. Однако, как уже отмечалось, изложенная в работе техника не применима, ибо при $\alpha = 0$ теорема 1.9 о покрытии не верна.

В связи с этим встает вопрос: можно ли и для этой пары K-функционал выразить через локальные приближения?

Эта проблема представляется очень интересной, так как тесно связана с интенсивно изучаемыми задачами нелинейной аппроксимации (см. [9, 17, 18]).

В настоящее время известно только (см. [3, 19]), что ответ положителен в одномерном случае, т.е. когда $Q_0 = [0, 1]$.

В двумерном случае автору удалось получить следующий результат.

Теорема 7.1. *Пусть $Q_0 = [0,1]^2$. Тогда с константами, не зависящими от $f \in L_2$ и t, имеет место эквивалентность*

$$K(t^{\frac{1}{2}}, f; \dot{W}_1^1, L_2) \approx \sup_{|\pi|_0 \leqslant t} \left(\sum_{Q \in \pi} E_k(f,Q)_2 \right) \quad (t > 1).$$

Напомним, что в случае $\alpha = 0$ α-емкость укладки π равна количеству кубов в π. Здесь через $\dot{W}_1^1$ обозначено пространство, норма (точнее полунорма) в котором определена формулой (0.6). В рассматриваемом случае эта формула имеет вид:

$$\|f\|_{\dot{W}_1^1} = \sup_{\pi\{\theta_i\}} \left(\sum_{\theta_i \in \pi} E_1(f,\theta_i)_2 \right).$$

Таким образом, в общем случае даже при $n = 2$ ответ не ясен.

Список литературы

[1] Bennet C., Sharpley R., *Interpolation of operators*, Pure Appl. Math., **129**, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[2] Bergh J., Löfström J., *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976; Русск. пер., Мир, М., 1980.

[3] Bergh J., Peetre J., *On the spaces V_p $(0 < p \leqslant \infty)$*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 632–648.

[4] Besicovitch A. S., *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions*. II, Proc. Cambridge Philos. Soc. **42** (1946), 1–10.

[5] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Кусочно-полиномиальные приближения функций классов W_p^α*, Мат. сб. **73** (1967), № 3, 331–355.

[6] Брудный Ю. А., *Исследования по теории локального наилучшего приближения функций алгебраическими многочленами*, Дисс., Днепропетровск, 1965.

[7] Брудный Ю. А., *Пространства, определяемые с помощью локальных приближений*, Тр. Моск. мат. о-ва **24** (1971), 69–132.

[8] Брудный Ю. А., *Исследование функций многих переменных методами теории локальных приближений*, Дисс., Ярославль, 1974.

[9] Брудный Ю. А., Иродова И. П., *Нелинейная сплайн-аппроксимация функций многих переменных и B-пространства*, Алгебра и анализ **4** (1992), № 4, 45–79.

[10] Брудный Ю. А., Котляр Б. Д., *Одна задача комбинаторной геометрии*, Сиб. мат. ж. **11** (1970), № 5, 1171–1173.

[11] Brudnyĭ Yu. A., Krugljak N. Ya., *Interpolation functors and interpolation spaces*, I, North-Holland Math. Library, **47**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.

[12] Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я., *Вещественная интерполяция одного семейства пространств гладких функций*, Докл. РАН (в печати).

[13] Брудный Ю. А., Кругляк Н. Я., *Вещественная интерполяция одного семейства пространств гладких функций* (готовится к печати).

[14] Campanato S., *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **17** (1963), 175–188.
[15] Calderon A. P., Zygmund A., *On the existence of certain singular integrals*, Acta Math. **88** (1952), 85–139.
[16] DeVore R., *The K functional for* (H_1, BMO), Interpolation Spaces and Allied Topics in Analysis (Lund, 1983), Lecture Notes in Math., **1070**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1984, pp. 66–79.
[17] DeVore R., Popov V., *Free multivariate splines*, Constr. Approx. 3 (1987), 239–248.
[18] DeVore R., Jawerth B., Popov V., *Compression of wavelet decompositions*, Amer. J. Math. **114** (1992), 737–785.
[19] DeVore R., Yu X. M., *K-functionals for Besov spaces*, J. Approx. Theory **67** (1991), 38–50.
[20] Dorronsoro J. R., *A characterization of potential spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 21–31.
[21] Fefferman C., Rivier N., Sagher Y., *Interpolation between H^p spaces: the real method*, Trans. Amer. Math. Soc. **191** (1974), 75–81.
[22] Fefferman C., Stein E., *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), no. 3–4, 137–193.
[23] Гусман М., *Дифференцирование интегралов в R^n*, Мир, М., 1978.
[24] Hardy G. H., Littlewood J. E., *A maximal theorem with function-theoretic applications*, Acta Math. **54** (1930), 81–116.
[25] Herz C. S., *The Hardy-Littlewood maximal theorem*, Symposium on Harmonic Analysis Univ. of Warwick, 1968.
[26] John F., Nirenberg L., *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426.
[27] Кругляк Н. Я., *Количественые теоремы о покрытии типа Уитни*, Докл. РАН (в печати).
[28] Krugljak N., *Smooth analogs of Calderon–Zygmund decompositions, Peetre's K-functional and quantitative covering theorems*, Proccedings of International Workshop on Function Spaces, Interpolation Spaces and Related Topics (Haifa, 1995) (в печати).
[29] Meyers N. G., *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 717–721.
[30] Peetre J., *Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **16** (1966), no. 1, 279–317.
[31] Peetre J., *Sur les espaces de Besov*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **264** (1967), A281–A283.
[32] Стейн И., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
[33] Whitney H., *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

Поступило 11 марта 1996 г.