ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 342, № 1, с. 29 - 31

## ИНФОРМАТИКА

УДК 621.391.837

# СИНТЕЗ ВЕСОВЫХ ОКОН НА ОСНОВЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

© 1995 г. Академик Ю. В. Гуляев, В. Ф. Кравченко, В. А. Рвачев

Поступило 29.12.94 г.

1. Используя идеи работ [1 - 4], изложим новые удобные для численной реализации и физического анализа алгоритмы весовых окон, построенные на теории атомарных функций.

Пусть сигнал $x(t)$ задан при $-1 \le t \le 1$, а его преобразование Фурье

$$X_0(\lambda) = \int_{-1}^{1} x(t)\exp(i\lambda t)dt. \quad (1)$$

Тогда вместо определения $X_0(\lambda)$ целесообразно вычислить

$$X_\omega(\lambda) = \int_{-1}^{1} \omega(t)x(t)\exp(i\lambda t)dt, \quad (2)$$

где $\omega(t)$ – временное окно, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered} \omega(t) = 0 \quad \text{при} \quad |t| > 1, \\ \omega(0) = 1, \quad \omega(-t) = \omega(t). \end{gathered} \quad (3)$$

Пусть

$$W(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda t)\omega(t)dt = \int_{-1}^{1} \omega(t)\cos(\lambda t)dt. \quad (4)$$

Тогда

$$X_\omega(\lambda) = X(\lambda) * W(\lambda), \quad (5)$$

где

$$X(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(i\lambda t)dt$$

и звездочка – знак свертки. $X_0(\lambda)$ соответствует использованию естественного (или прямоугольного) окна $\omega(t) = 1$, $|t| \le 1$.

2. Согласно [3 - 5], представляют интерес следующие параметры окон:

Институт радиотехники и электроники Российской Академии наук, Москва

1°) Эквивалентная шумовая полоса (ЭШП):

$$\text{ЭШП} = b_1 = 2\int_{-1}^{1} \omega^2(t)dt \Big/ \left[\int_{-1}^{1} \omega(t)dt\right]^2; \quad (6)$$

для $\omega_0(t)$ $b_1(\omega_0) = 1$.

2°) Корреляция перекрывающихся участков (в %) (КПУ): для 50%-го перекрытия

$$\text{КПУ}(50\%) = b_2 = \left(\int_{0}^{1} \omega(t)\omega(t-1)dt \Big/ \int_{-1}^{1} \omega^2(t)dt\right) \cdot 100; \quad (7)$$

для прямоугольного окна $b_2(\omega_0) = 50\%$.

$$\text{КПУ}(75\%) = \left(\int_{-1/2}^{1} \omega(t)\omega(t-0.5)dt \Big/ \int_{-1}^{1} \omega^2(t)dt\right) \cdot 100. \quad (8)$$

3°) Паразитная амплитудная модуляция (в децибелах) (ПАМ):

$$\text{ПАМ} = b_3 = -10\lg\left|\frac{\omega(\pi/2)}{\omega(0)}\right|^2. \quad (9)$$

4°) Максимальные потери преобразования (в децибелах) (МП):

$$\text{МП} = b_4 = 10\lg b_1 + b_3. \quad (10)$$

5°) Максимальный уровень боковых лепестков (в децибелах) (МУБЛ). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ суть точки локального максимума $\omega(\lambda)$, отличные от $\lambda = 0$. Тогда

$$\text{МУБЛ} = b_5 = 10\lg\max_k\left|\frac{\omega(\lambda_k)}{\omega(0)}\right|^2. \quad (11)$$

6°) Асимптотическая скорость спада боковых лепестков (в децибелах на октаву):

$$b_6 = 10\lg\lim_{|\lambda|\to\infty}\left|\frac{\omega(2\lambda)}{\omega(\lambda)}\right|^2. \quad (12)$$

7°) Ширина окна по уровню 3 дб, $b_7 = 2\lambda$, где $\lambda > 0$ – наибольшее, такое, что

$$10\lg\left|\frac{\omega(0)}{\omega(\lambda)}\right|^2 = 3. \quad (13)$$

8°) Ширина окна по уровню 6 дб,

$$b_8 = 2\lambda, \tag{14}$$

где $\lambda > 0$ – наибольшее, такое, что

$$10\lg\left|\frac{\omega(0)}{\omega(\lambda)}\right|^2 = 6.$$

9°) Потери информации (в децибелах):

$$b_9 = 10\lg p, \tag{15}$$

где

$$p = 1 - \int_{-\nu}^{\nu}\omega(\lambda)d\lambda,$$

где $\nu > 0$ – наименьшее число такое, что $\omega(\nu) = 0$.

10°) Ширина окна:

$$b_{10} = \nu/\pi, \tag{16}$$

где $\nu > 0$ – наименьший нуль.

11°) Положение первого выброса:

$$b_{11} = \lambda_0/\pi, \tag{17}$$

где $\lambda_0 > \nu$ – точка максимума, ближайшая к $\nu$.

12°) Когерентное усиление:

$$b_{12} = 1/\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\omega(t)dt. \tag{18}$$

Известны следующие окна (см. [5]), которые широко используются в радиофизических задачах. К числу наилучших относят окна Кайзера–Бесселя и Блэкмана–Хэрриса.

3. С помощью теории атомарных функций были впервые построены следующие окна:

а) $\omega_1(t) = up(t)$;

б) $\omega_2(t) = -\Xi_2(t)$;

в) $\omega_3(t) = Fup_1(0.75t)/Fup_1(0)$;

г) $\omega_4(t) = \alpha up(2t-1) + up(2t) + \alpha up(2t+1)$;

д) $\omega_5(t) = up_2(t)$;

е) $\omega_6(t) = up(t) + \alpha up''(t) + \beta up^{(IV)}(t) + \ldots$;

ж) $\omega_7(t) = h_\alpha(t)$.

Рассмотрим окно $\omega_1(t) = up(t)$, где

$$\omega_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda\cdot 2^{-k})}{\lambda\cdot 2^{-k}} \tag{19}$$

и определим его параметры: ЭШП этого окна составляет $b_1(\omega_1) = 1.617$; корреляция для 50%-го перекрытия $b_2(\omega_1) = 11.8\%$; поскольку $\omega_1(0) = 1$, $1/\omega_1(\pi/2) = 1.154551$, то $b_3(\omega_1) = 1.21$; максимальные потери преобразования $b_4(\omega_1) = 3.29$; максимальный уровень боковых лепестков $b_5(\omega_1) = -23.5$ дб; асимптотическая скорость спада боковых лепестков $b_6(\omega_1) = -\infty$; ширина окна на уровне 6 дб $b_8(\omega_1) = 2.1$; когерентное усиление $b_{12}(\omega_1) = 0.5$.

Такой физический набор параметров наиболее часто используется для сравнения окон между собой [5]. Окно $\omega_1$ по параметру $b_6$ превосходит все известные окна. Параметры $b_1$ - $b_4$, а также $b_8$, $b_{12}$ при этом не хуже. Однако слишком высок уровень боковых лепестков (–23.5 дб), который у лучших окон колеблется от –45 до –92 дб. Иначе говоря, боковые лепестки у $\omega_1(\lambda)$ (см. формулу (19)) очень высокие. Окно $\omega_1(t)$ можно модифицировать. Один из способов сделать это – рассмотреть $\omega_6(t)$ и выбрать коэффициенты $\alpha$, $\beta$, ... так, чтобы, не ухудшив остальных параметров, уменьшить $b_5$. Действительно, параметр $b_{12}$ при добавлении поправок вида $up^{(k)}(t)$ не изменяется, так как $\int_{-1}^{1} up^{(k)}(t)dt = 0$. Также не изменяется параметр $b_6$. Он только улучшается. При $\alpha > 0$ параметр $b_1$ также уменьшается. В зависимости от выбора коэффициентов $\alpha$, $\beta$, ... может ухудшиться параметр $b_3$. Отметим, что у лучших окон он имеет значения $b_3 = 1.27$; 1.33; 1.46; 1.7, т.е. имеется некоторый запас по сравнению со значением 1.21 дб.

4. Рассмотрим вначале окно $\omega_6(t) = up(t) + \alpha up''(t)$, для которого $W(\lambda) = F(\lambda)(1 - 2\lambda^2)$. При $\alpha = 10^{-2}$ увеличивается параметр $b_3 = 1.427$ дб и уменьшается параметр $b_1 = 1.5$, а максимальный уровень боковых лепестков снижается до $b_5 = -32.4$ дб. Следовательно, такое окно по всем параметрам (кроме $b_6$) оказывается близким к окну Хэннинга с коэффициентом $\alpha = 2$. При этом значительно лучше скорость спада боковых лепестков ($b_6 = -8$ дб). Введение нулевых коэффициентов $\beta$, $\gamma$, ... позволяет дополнительно снижать параметр $b_9$. Однако при этом будет возрастать параметр $b_3$ (в пределе до 1.7 дб). Уменьшение параметра $b_3$ позволяет применить окно $\omega_7(t) = h_\alpha(t)$, которое является другим обобщением окна $\omega_1(t) = up(t)$ (при $\alpha = 2$ они совпадают). Рассмотрим окно $\omega_7(t)$ с параметром $\alpha = 1.5$, $\lambda_0 = 3\pi$. При этом первый корень $W(\lambda)$ равен $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\alpha-1}\pi$. Тогда

$$W(\lambda) = \beta\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[\lambda(2/3)^k\cdot 0.5]}{\lambda(2/3)^k\cdot 0.5}. \tag{20}$$

Это окно имеет следующие параметры: ПАМ $b_3 = 0.66$, ЭШП $b_1 = 1.28$, максимальный уровень боковых лепестков $b_5 = -36$ дб, полоса по уровню 6 дб $b_8 = 2.86$. Введение более общего окна $b_5$ позволяет достичь дальнейшего улучшения параметра:

$$\omega_8(t) = 1.0696\left[h_{1.5}(t) + \frac{1}{121}h''_{1.5}(t)\right]. \tag{21}$$

**Таблица 1**

| Окна | $b_1$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_8$ | $b_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Атомарное $\omega_8(t)$ | 1.23 | 0.84 | 1.74 | –51 | $-\infty$ | 2.54 | 0.55 |
| Хэмминга | 1.36 | 1.78 | 3.1 | –43 | –6 | 1.81 | 0.54 |
| Дольфа–Чебышева | | | | | | | |
| $\alpha = 2.5$ | 1.33 | 1.7 | 3.12 | –50 | 0 | 1.85 | 0.53 |
| $\alpha = 3.0$ | 1.44 | 1.44 | 3.23 | –60 | 0 | 2.01 | 0.48 |
| $\alpha = 3.5$ | 1.55 | 1.25 | 3.35 | –70 | 0 | 2.17 | 0.45 |
| $\alpha = 4.0$ | 1.65 | 1.1 | 3.48 | –80 | 0 | 2.31 | 0.42 |
| Кайзера–Бесселя | | | | | | | |
| $\alpha = 2.0$ | 1.5 | 1.64 | 3.2 | –46 | –6 | 1.99 | 0.49 |
| $\alpha = 2.5$ | 1.65 | 1.2 | 3.38 | –57 | –6 | 2.2 | 0.44 |
| $\alpha = 3.0$ | 1.8 | 1.02 | 3.56 | –69 | –6 | 2.39 | 0.4 |
| $\alpha = 3.5$ | 1.93 | 0.89 | 3.74 | –82 | –6 | 2.57 | 0.37 |
| Блэкмана–Хэрриса | | | | | | | |
| (а) | 1.66 | 1.13 | 3.45 | –67 | –6 | 1.81 | 0.42 |
| (б) | 1.9 | 0.83 | 3.85 | –92 | –6 | 2.72 | 0.36 |
| (в) | 1.56 | 1.27 | 3.34 | –61 | –6 | 2.19 | 0.45 |
| (г) | 1.74 | 1.03 | 3.56 | –74 | –6 | 2.44 | 0.4 |

В этом случае достигаются параметры: ПАМ $b_3(\omega_8) = 0.84$, ЭШП $b_1(\omega_8) = 1.23$, максимальный уровень боковых лепестков $b_5(\omega_8) = -51$ дб, полоса по уровню 6 дб $b_8 = 0.84$. Как видно, построенное окно $\omega_8(t)$ по всем параметрам не уступает широко известным окнам, а по некоторым даже превосходит их. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

5. Из таблицы видно, что максимальный уровень боковых лепестков –51 дб является недостаточным, а полоса по уровню 6 дб, равная 2.54, – довольно широкой. При этом имеется запас на некоторое увеличение паразитной модуляции. Дальнейшее увеличение параметров возможно при использовании более общих окон, например, вида

$$\omega_9(t) = \delta\,[\,h_{1.5}(t) + \alpha h''_{1.5}(t) + \beta h^{(\mathrm{IV})}_{1.5}(t) + \gamma h^{(\mathrm{VI})}_{1.5}(t)\,]\,. \qquad (22)$$

Следующие приближенные формулы дают разложение функции $h_{1.5}(t)$ и соответственно окна $\omega_8(t)$ в ряд Фурье. Это упрощает их использование на практике:

$$h_{1.5}(t) \approx 0.51771 + 0.3693\cos\pi t + 0.11584\cos 2\pi t - 0.00417\cos 4\pi t + 0.0012\cos 5\pi t, \qquad (23)$$

$$\omega_8(t) = 0.5537 + 0.3628\cos\pi t + 0.0835\cos 2\pi t + 0.00135\cos 4\pi t - 0.00132\cos 5\pi t. \qquad (24)$$

Приведем в заключение выражение для окна с наилучшими достигнутыми параметрами:

$$\omega_{10}(t) = \gamma[\,\omega_8(t) + 1.790509\cdot 10^{-2}\omega''_8(t) + 9.326176\cdot 10^{-5}\omega_8^{(\mathrm{IV})}(t) + 1.190702\cdot 10^{-7}\omega_8^{(\mathrm{VI})}(t)\,]\,, \qquad (25)$$

где нормированный множитель $\gamma$ выбирается из условия $\omega_{10}(0) = 1$. Здесь паразитная амплитудная модуляция окна $\omega_{10}(t)$ равна 1.05 дб, полоса по уровню 6 дб равна 2.35, а максимальный уровень боковых лепестков –61 дб.

6. Таким образом, в данной работе предложен и обоснован новый метод синтеза весовых окон на основе теории атомарных функций, который, как показано на ряде практических примеров, может найти широкое применение при обработке сигналов различной физической природы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1979. 196 с.
2. *Рвачев В.А.* // УМН. 1990. Т. 45. В. 1(271). С. 77 - 103.
3. *Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Рвачев В.А.* // ДАН. 1989. Т. 306. № 1. С. 78 - 81.
4. *Гончаренко А.А., Кравченко В.Ф., Пономарев В.И.* Дистанционное зондирование неоднородных сред. М.: Машиностроение, 1991. 256 с.
5. *Хэррис Ф.Дж.* // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 1. С. 60 - 96.