В. О. Кузнецов, О типично вещественных функциях с особенностями на вещественной оси,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1990, том 185, 60–71

В.О.Кузнецов

О ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Функция $f(\zeta)$, регулярная в некоторой области G, содержащей отрезки вещественной оси, называется типично вещественной в G, если она вещественна на этих отрезках, а в остальных точках области G удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im} f(\zeta) \operatorname{Im} \zeta > 0. \tag{I}$$

Пусть R - вещественная ось, F - непустое замкнутое множество на $\overline{\mathbb{C}}$ такое, что $\overline{R} \setminus F \neq \emptyset$, $\mathcal{T}^F$ - класс типично вещественных функций в области $G \neq \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. В п.I^0 настоящей работы выводится интегральное представление для класса $\mathcal{T}^F$ в случае $F \subset \overline{R}$. В пп.2^0-4^0 на основе полученного интегрального представления исследуются свойства класса $\mathcal{T}^F$ и его подклассов и устанавливается ряд точных неравенств.

Всюду в дальнейшем K - непустое замкнутое множество на $\overline{R}$, $\overline{R} \setminus K \neq \emptyset$; $U = \{|z| < 1\}$. Через T обозначаем класс функций $t(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$, типично вещественных в U.

I^0. ТЕОРЕМА I. Любая функция $f(\zeta) \in \mathcal{T}^K$ представима в $\mathbb{C} \setminus K$ по формуле

$$f(\zeta) = \operatorname{Re} f(i) + \int \Phi(\zeta, \theta)\, d\mu(\theta), \tag{2}$$

где

$$\Phi(\zeta, \theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + \zeta \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} - \zeta \cos\frac{\theta}{2}}, \tag{3}$$

$\mu(\theta)$ - положительная конечная мера на K', $K' = \{\theta \in [-\pi, \pi): \operatorname{tg}(\theta/2) \in K\}$ *). Обратно, для любой положительной конечной меры $\mu(\theta)$ на K' формула (2) определяет в $\mathbb{C} \setminus K$

---

*) Под интервалом $[-\pi, \pi)$ удобно понимать интервал изменения $\arg z$ на окружности $|z| = 1$. Поэтому множеству K' соответствует компакт на единичной окружности.

функцию $f(\zeta)\in\mathcal{T}^K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, если $\mu(\theta)$ – положительная конечная мера на K', то функция $f(\zeta)$, определяемая формулой (2), регулярна в $\mathbb{C}\setminus K$. Выполнение условия (I) для функции $f(\zeta)$ вытекает из справедливости этого условия для функций $f_\theta(\zeta)=\Phi(\zeta,\theta)$ при всех θ. Обратно, если $f(\zeta)\in\mathcal{T}^K$, то функция

$$g(z)=-i\left[f\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)-\operatorname{Re} f(i)\right] \tag{4}$$

регулярна в круге U, имеет в нем положительную вещественную часть и удовлетворяет условию $g(0)>0$. Следовательно, $g(z)$ представляется в U по формуле Шварца-Стилтьеса

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,d\alpha(\theta), \tag{5}$$

где $\alpha(\theta)$ – вещественная неубывающая и ограниченная в промежутке $-\pi\leqslant\theta<\pi$ функция, которая представима всюду в этом промежутке, за исключением не более чем счетного числа точек, по формуле

$$\alpha(\theta)=\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\theta}\operatorname{Re} g(re^{i\theta})\,d\theta.$$

Покажем, что носитель меры Лебега-Стилтьеса $\mu(\theta)=\mu_\alpha(\theta)$, отвечающей функции $\alpha(\theta)$, содержится в K'. Действительно, если $x=\operatorname{tg}(\theta_0/2)\notin K$ при некотором $\theta_0\in[-\pi,\pi)$, то существует $\delta>0$ такое, что функция $g(z)$ регулярна в секторе $\{z=re^{i\theta}:\theta_0-\delta\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\delta,\ 0\leqslant r\leqslant 1\}$. Кроме того, $\operatorname{Re} g(z)=0$ на дуге $\{z=e^{i\theta};\ \theta_0-\delta\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\delta\}$. Поэтому в интервале $\theta_0-\delta<\theta<\theta_0+\delta$ функция $\alpha(\theta)$ постоянна, следовательно, точка $\theta=\theta_0$ не принадлежит носителю меры $\mu(\theta)$.

Для $\zeta\in\Pi=\{\zeta:\operatorname{Im}\zeta>0\}$ из (4) получаем

$$f(\zeta)=\operatorname{Re} f(i)+ig\left(\frac{1+i\zeta}{1-i\zeta}\right).$$

Заменяя в (5) z на $(1+i\zeta)(1-i\zeta)^{-1}$, убеждаемся в справедливости равенства (2) для $\zeta \in \Pi$. Для $\zeta \in \mathbb{C}\setminus K$, $\zeta \notin \Pi$, равенство (2) вытекает из того факта, что обе части этого равенства регулярны в $\mathbb{C}\setminus K$.

СЛЕДСТВИЕ I. Если $K = \widetilde{K} \cup \{\infty\}$, где $\widetilde{K}$ - ограниченное замкнутое множество на R, то класс $\mathcal{T}^K$ представим в $\mathbb{C}\setminus K$ формулой

$$f(\zeta) = m_0 \zeta + c_0 + \int \frac{dm(t)}{t-\zeta}, \tag{6}$$

где $m(t)$ - неотрицательная конечная мера на $\widetilde{K}$, m_0 и c_0 - вещественные числа, $m_0 \geqslant 0$, $m_0 + m(\widetilde{K}) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что

$$\Phi(\zeta,\theta) = \begin{cases} \zeta, \text{если } \theta = -\pi, \\ -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \zeta\right)}, \text{если } -\pi < \theta < \pi \end{cases}$$

и обозначая

$$m_0 = \mu\{-\pi\},\ \widetilde{K}' = K' \setminus \{-\pi\},\ c_0 = \operatorname{Re} f(i) - \int_{\widetilde{K}'} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\mu(\theta),$$

из (2) получаем

$$f(\zeta) = m_0\zeta + c_0 + \int_{\widetilde{K}'} \frac{d\mu(\theta)}{\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \zeta\right)}.$$

Производя здесь замену переменной $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$ и полагая $dm(t) = (\cos(\theta/2))^{-2} d\mu(\theta)$, приходим к формуле (6).

Функцию $f(\zeta)$, мероморфную в области G и типично вещественную в области $G\setminus P$, где P - множество всех полюсов функции $f(\zeta)$ в G, будем называть мероморфной типично вещественной функцией в области G. Нетрудно показать, что все полюсы такой функции лежат на вещественной оси. Из следствия I вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть K - ограниченное замкнутое множество на R, $f(\zeta)$ - мероморфная типично вещественная функция в области $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$, имеющая в $\mathbb{C}\setminus K$ полюсы $t_1, t_2, \ldots$ Тогда $f(\zeta)$ представима в $\mathbb{C}\setminus K$ по формуле

$$f(\zeta)=m_0\zeta+c_0+\sum\frac{m_i}{t_i-\zeta}+\int\frac{dm(t)}{t-\zeta}, \tag{7}$$

где $m(t)$ - конечная неотрицательная мера на K, c_0 - вещественное число, сумма распространяется на все полюсы функции $f(\zeta)$ в области $\mathbb{C}\setminus K$, $m_i \geqslant 0$ при $i=0,1,\ldots,$ $\sum m_i<\infty$, $m(K)+\sum m_i \neq 0$.

Обратно, для любой последовательности точек $t_1, t_2, \ldots$ на $R\setminus K$, не имеющей в $\overline{R}\setminus K$ предельных точек, формула (7) определяет мероморфную типично вещественную функцию в $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P - множество всех полюсов функции $f(\zeta)$ в области $\mathbb{C}\setminus K$. Применяя к замкнутому множеству $K\cup P$ следствие I и полагая $m_i=m(t_i)$, $i=1,2,\ldots,$ приходим к формуле (7).

2°. ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(\zeta)\in\mathcal{T}^K$. Тогда справедливы следующие утверждения.

I) Для любого $\zeta\in\mathbb{C}\setminus R$ выполняется неравенство

$$\frac{\operatorname{Im} f(\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\geqslant|f'(\zeta)|, \tag{8}$$

равенство в котором имеет место только для функций $f(\zeta)=$ $=a+mf_\theta(\zeta)$, где a, m - вещественные числа, $m>0, -\pi\leqslant\theta<\pi$.

2) При любом $-\infty<x<\infty$ функция

$$h_x(y)=\frac{\operatorname{Im} f(x+iy)}{y}$$

не возрастает в $0<y<\infty$. При $0<y_1<y_2$ равенство $h(y_1)=h(y_2)$ имеет место только в том случае, если $f(\zeta)$ - линейная функция.

3) Величина $m_0=\lim\limits_{y\to+\infty} h_x(y)$ является константой, не зависящей от x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая

$$\varphi(\zeta,\theta)=\sin\frac{\theta}{2}-\zeta\cos\frac{\theta}{2}=\begin{cases}1, \text{если } \theta=-\pi,\\ \cos\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}-\zeta\right), \text{если } -\pi<\theta<\pi,\end{cases}$$

из формулы (2) получаем

$$f'(\zeta) = \int \frac{d\mu(\theta)}{(\varphi(\zeta,\theta))^2}, \tag{9}$$

$$\frac{\operatorname{Im} f(\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta} = \int \frac{d\mu(\theta)}{|\varphi(\zeta,\theta)|^2}, \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0. \tag{10}$$

Сравнивая полученные равенства, приходим к неравенству (8). Далее, при любом фиксированном ζ с $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ величина $\arg\varphi(\zeta,\theta)$ строго монотонна в $-\pi \leq \theta < \pi$ и полное ее изменение на этом интервале равно 2π. Поэтому равенство в (8) достигается только в том случае, если мера $\mu(\theta)$ сосредоточена в одной точке, т.е., если $f(\zeta)$ имеет указанный вид. Второе утверждение теоремы вытекает из того факта, что при любых фиксированных θ и x, где $-\infty < x < \infty$, $-\pi < \theta < \pi$, функция $|\varphi(x+iy,\theta)|$ строго возрастает в интервале $0 < y < \infty$. Наконец, замечая, что

$$\lim_{y\to+\infty} |\varphi(x+iy,\theta)|^{-1} = \begin{cases} 0, \text{если } -\pi < \theta < \pi, \\ 1, \text{если } \theta = -\pi, \end{cases}$$

и переходя к пределу под знаком интеграла в (10), получаем

$$\lim_{y\to+\infty} h_x(y) = \mu\{-\pi\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $[a,b]$ - наименьший интервал, содержащий множество $K\setminus\{\infty\}$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$, $x \in R\setminus K$, $f(\zeta) \in \mathcal{T}^K$,

$$h_n(\zeta) = \frac{f(\zeta) - P_n(x)}{\zeta - x}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $P_n(x)$ - n-й отрезок ряда Тейлора функции $f(\zeta)$ в точке x, и пусть $(-\infty, x] \cap K = \emptyset$, если n - четное число. Пусть $b' = +\infty$, если $n = 0$ и $\{\infty\} \in K$, и пусть $b' = b$ в противном случае. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Выполняются неравенства

$$f^{(n)}(x) \geqslant 0, \quad n = 1,2,\dots$$

Равенства имеют место только в том случае, если $n \geqslant 2$ и $f(\zeta)$ - линейная функция.

2) Если $f(\zeta)$ не является линейной функцией, то $h_n(\zeta) \in \mathcal{T}^K$ и в $\mathbb{C} \setminus R$ выполняются неравенства

$$0 \leqslant \arg(b'-\zeta) \leqslant \arg h_n(\zeta) \leqslant \arg(a-\zeta) \leqslant \pi, \text{ если } \operatorname{Im}\zeta > 0,$$

$$0 \geqslant \arg(b'-\zeta) \geqslant \arg h_n(\zeta) \geqslant \arg(a-\zeta) \geqslant -\pi, \text{ если } \operatorname{Im}\zeta < 0;$$

(Здесь и в следующей теореме 4 считаем, что $\arg(+\infty-\zeta)=0$, $\arg(-\infty-\zeta)=\pm\pi$). Равенства имеют место соответственно только для функций $f(\zeta)=c+m(a-\zeta)^{-1}$, $f(\zeta)=c+m(b'-\zeta)^{-1}$; c, m - вещественные числа, $m>0$. Если $a=-\infty$ или $b'=+\infty$, то соответствующие знаки равенства не реализуются (кроме случая, когда $n=0$, $b'=+\infty$, $f(\zeta)$ - линейная функция).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения теоремы являются очевидными следствиями равенств

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta) = \int \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1} d\mu(\theta)}{(\varphi(\zeta,\theta))^{n}}, \qquad (11)$$

$$h_n(\zeta) = \int \frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n} d\mu(\theta)}{(\varphi(x,\theta))^{n}\varphi(\zeta,\theta)},$$

так как для x и n, указанных в формулировке теоремы, $(\varphi(x,\theta))^n > 0$ при любых $\theta \in K'$.

Следующая теорема и неравенство (13) в формулируемой ниже теореме 5 в случае $n=1$ являются частично обобщением, частично перенесением на класс $\mathcal{T}^K$ некоторых результатов, полученных Г.М.Голузиным, и могут быть получены из соответствующих утверждений в [1]. Однако интегральное представление (2) упрощает доказательство.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K \subset [a,b] \subset \overline{R}$, $a,b \in K$, $R \setminus [a,b] \neq \emptyset$, $f(\zeta) \in \mathcal{T}^K$. Пусть

$G=\{\zeta : |\zeta-(a+b)/2| > (b-a)/2$, если $a,b \neq \pm\infty$;

$$\operatorname{Re}\zeta > b, \text{ если } a=-\infty;\ \operatorname{Re}\zeta < a, \text{ если } b=+\infty\}.$$

Тогда функция $f(\zeta)$ однолистна в области G. Если $b \neq \infty$, то в области G выполняются неравенства

$$-2\pi < -2\arg(\zeta-b) \leq \arg f'(\zeta) \leq -2\arg(\zeta-a) \leq 0, \text{если } \operatorname{Im}\zeta > 0,$$

$$2\pi > -2\arg(\zeta-b) \geq \arg f'(\zeta) \geq -2\arg(\zeta-a) \geq 0, \text{если } \operatorname{Im}\zeta < 0.$$

Равенства в левых неравенствах имеют место только тогда, когда $f(\zeta)=c+m(b-\zeta)^{-1}$, в правых неравенствах - только тогда, когда $f(\zeta)=c+m(a-\zeta)^{-1}$, $a\neq-\infty$ или $f(\zeta)=c+m\zeta$, $a=-\infty$, где c, m - вещественные числа, $m>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (9) и равенства

$$\frac{f(\zeta_1)-f(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2} = \int \frac{d\mu(\theta)}{\varphi(\zeta_1,\theta)\varphi(\zeta_2,\theta)}, \tag{12}$$

$\zeta_1 \neq \zeta_2$, $\zeta_1,\zeta_2 \in \mathbb{C}\setminus K$, доказательство теоремы сводится к нахождению для фиксированного $\zeta\in\mathbb{C}\setminus K$ интервала изменения величины $\arg\varphi(\zeta,\theta)$ на K' и установлению того факта, что при $\zeta\in G$ полное изменение аргумента подынтегральных выражений в (9) и (12) на множестве K' меньше π. Последнее обстоятельство позволяет утверждать, что аргументы интегралов в (9) и (12) не выходят за пределы изменения аргументов соответствующих подынтегральных выражений.

СЛЕДСТВИЕ 3. Функция $f(\zeta)\in\mathcal{T}^K$ является однолистной во всяком круге с центром на вещественной оси, не содержащем точек множества K.

Для доказательства достаточно применить теорему 4 к функции $\tilde f(\zeta)=f((a-\zeta)^{-1})$, где a - центр рассматриваемого круга.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(\zeta)\in\mathcal{T}^K$, $K\subset[a,b]\subset\overline{\mathbb{R}}$, $a,b\in K$, $x<a$. Пусть

$$G_{x,b}=\{\zeta\in\mathbb{C}: |\zeta-b|\geq b-x, \text{ если } b<+\infty;$$
$$\operatorname{Re}\zeta\leq x, \text{ если } b=+\infty\}.$$

Тогда в области $G_{x,b}$ выполняются неравенства

$$|f^{(n)}(\zeta)| \leq |f^{(n)}(x)|,\ n=1,2,\ldots, \tag{13}$$
$$\frac{\operatorname{Im} f(\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta} \leq f'(x),\ \operatorname{Im}\zeta \neq 0.$$

При $\zeta \neq x$ равенства имеют место только тогда, когда $f(\zeta) = = c + m\zeta$, $b = \infty$, либо $f(\zeta) = c + m(b-\zeta)^{-1}$, $b \neq \infty$, $\zeta \in \partial G_{x,b}$. Здесь m, c – вещественные числа, $m > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (10) и (11), доказательство теоремы сводится к несложной проверке неравенства

$$|\varphi(\zeta,\theta)| \geq |\varphi(x,\theta)|$$

для всех $\theta \in K'$ и $\zeta \in G_{x,b}$ и выяснению случаев равенства в этом неравенстве.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $b = \infty$ – изолированная точка множества K, то при $n \geq 2$ неравенство (13) справедливо в более широкой области $G_{x,b'} \supset G_{x,\infty}$, где $b' \in K \setminus \{\infty\} \subset [a, b']$. При $n \geq 2$ равенство в (13) тогда будет иметь место только в случае, когда $f(\zeta) = c + m\zeta + m'(b'-\zeta)^{-1}$, $\zeta \in \partial G_{x,b'}$, где c, m, m' – вещественные числа, $m, m' \geq 0$, $m + m' > 0$.

3°. Пусть F – замкнутое ограниченное множество на $\mathbb{C}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}^{F}$ – класс функций $f(\zeta) \in \mathcal{T}^{F \cup \{\infty\}}$ с разложением вида

$$f(\zeta) = \zeta + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \zeta^{-\nu}.$$

Из следствия I немедленно получаем, что класс $\widetilde{\mathcal{T}}^{K} (K \subset R)$ представим в $\mathbb{C} \setminus K$ формулой

$$f(\zeta) = \zeta + \int \frac{dm(t)}{t-\zeta}, \tag{14}$$

где $m(t)$ – конечная неотрицательная мера на K. Для класса $\widetilde{\mathcal{T}}^{K}$, в добавление к теоремам 2-5, имеем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6. Для любой функции $f(\zeta) \in \widetilde{\mathcal{T}}^{K}$ в $\mathbb{C} \setminus R$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{Im} f(\zeta)| \geq |\operatorname{Im}\zeta|,$$

равенство в котором достигается только для функции $f(\zeta) = \zeta$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $K\subset[b_1,b_2]$, $b_1,b_2\in K$, $f(\zeta)\in\widetilde{\tau}^K$. Тогда в полуплоскостях $\operatorname{Re}\zeta\leqslant b_1$ и $\operatorname{Re}\zeta\geqslant b_2$ выполняются соответственно неравенства

$$\operatorname{Re} f(\zeta)\leqslant\operatorname{Re}\zeta,\quad \operatorname{Re} f(\zeta)\geqslant\operatorname{Re}\zeta.$$

Равенства имеют место только в случаях $f(\zeta)=\zeta$ или $f(\zeta)=\zeta+m(b_i-\zeta)^{-1}$, $\operatorname{Re}\zeta=b_i$, $i=1,2$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $f(\zeta)=\zeta+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\zeta^{-\nu}\in\widetilde{\tau}^K$, $\widetilde{K}=K\cup\{0\}\subset[b_1,b_2]$, $b_1,b_2\in\widetilde{K}$, $p=b_1$, если $|b_1|>|b_2|$ и $p=b_2$, если $|b_1|\leqslant|b_2|$. Тогда при $n=1,2,\ldots$ имеют место неравенства

$$c_{2n-1}\leqslant 0, \tag{15}$$

$$c_{2n+1}\geqslant c_1 p^{2n}, \tag{16}$$

$$c_1 b_2^{2n-1}\leqslant c_{2n}\leqslant c_1 b_1^{2n-1}. \tag{17}$$

Кроме случая $f(\zeta)=\zeta$, равенства имеют место только в следующих случаях: в (15) для функций $f(\zeta)=\zeta-m\zeta^{-1}$, если $n\geqslant 2$ и $\{0\}\in K$, в (16) для функций $f(\zeta)=\zeta+m(p-\zeta)^{-1}$, если $b_2\neq -b_1$, и для функций $f(\zeta)=\zeta+m(\zeta+s)(p^2-\zeta^2)^{-1}$, если $b_2=-b_1$, в (17) для функций $f(\zeta)=\zeta+m(b_i-\zeta)^{-1}$, если $b_i\in K$, $i=1,2$. Здесь $m\geqslant 0$, $-2\leqslant s\leqslant 2$.

Доказательство теорем 6-8 сводится к простому анализу следующих равенств, вытекающих из формулы (14):

$$\operatorname{Im} f(\zeta)=\operatorname{Im}\zeta\left(1+\int\frac{dm(t)}{|t-\zeta|^2}\right),$$

$$\operatorname{Re} f(\zeta)=\operatorname{Re}\zeta+\int\frac{t-\operatorname{Re}\zeta}{|t-\zeta|^2}\,dm(t),$$

$$c_\nu=-\int t^{\nu-1}\,dm(t),\quad \nu=1,2,\ldots$$

Пусть $\sum^F$ - класс функций

$$f(\zeta)=\zeta+\sum_{\nu=1}^{\infty}c_\nu\zeta^{-\nu} \tag{18}$$

регулярных и однолистных в области $\mathbb{C}\setminus F$, где F - ограниченное замкнутое множество на $\mathbb{C}$; $\Sigma = \Sigma^{\bar U}$, $\tilde\Sigma = \Sigma^{[0,1]}$; Σ_R^F - класс функций $f(\zeta)\in\Sigma^F$ с вещественными коэффициентами $c_1, c_2, \ldots$ в разложении (18). Так как $\Sigma_R^K \subset \tilde{T}^K \subset T^{K\cup\{\infty\}}$, то все приведенные выше утверждения с соответствующими уточнениями справедливы и для класса Σ_R^K $(K\subset R)$. Например, из теоремы 8 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любой функции $f(\zeta)=\zeta+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \zeta^{-\nu}\in\Sigma_R^K$ при $n=1,3,5,\ldots$ выполняются неравенства

$$c_n \leqslant 0. \tag{19}$$

Если, кроме того, $(-\infty,0)\cap K=\emptyset$, то неравенства (19) справедливы при всех $n\geqslant 1$. Равенства имеют место только для функции $f(\zeta)=\zeta$.

Как известно, для функций $f(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^{-\nu}\in\Sigma$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} b_1 \leqslant 1, \quad \operatorname{Re}\{b_2+2b_1\}\leqslant 2$$

и равенства в них имеют место только для функции $f(z)=z+z^{-1}$ (доказательство второго из этих неравенств дано в [2]). Отсюда получаем, что для функций $f(\zeta)\in\tilde\Sigma$ с разложением (18) при $n=1,2$ справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} c_n \leqslant 0, \tag{20}$$

равенства в которых имеют место только для функции $f(\zeta)=\zeta$. При $n\geqslant 3$, как показывают примеры функций, построенные в [3, 4], неравенства (20) выполняются не во всем классе $\tilde\Sigma$. Следствие 4 дополняет эту информацию.

4^0. Отметим, что все утверждения пп. 1^0-3^0 могут быть перенесены с соответствующими изменениями на классы T^F, $\tilde{T}^F$, Σ_R^F в случае, если область $G=\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ симметрична относительно вещественной оси и может быть конформно отображена (с сохранением симметрии образов симметричных относительно вещественной оси точек при этом отображении) на область $G'=\overline{\mathbb{C}}\setminus K$, где $K\subset\overline{R}$. Приведем два примера.

Пусть $K=[d-2,d+2]$, $-\infty<d<\infty$, $F=\overline{U}$, $z=\varphi(\zeta)=\zeta+\ldots$ - функция, конформно отображающая область $G'=\overline{\mathbb{C}}\setminus K$ на $G=\overline{\mathbb{C}}\setminus F$,

$g(z)=z+\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu z^{-\nu}\in\Sigma_R$. Тогда $f(\zeta)=g(\varphi(\zeta))-$ $-g(\varphi(0))\in\tilde{\Sigma}_R$. Выразим коэффициенты разложения функции $f(\zeta)$ в окрестности бесконечно удаленной точки через величины $b_1, b_2,\ldots$ и применим следствие 4. Тогда для каждого нечетного $n\geqslant 1$, а при условии $d\geqslant 2$ и для каждого четного $n\geqslant 2$, получим точное неравенство в классе Σ_R, равенство в котором достигается только для функции $g(z)=z+z^{-1}$. Например, при $n=3,4$ указанные неравенства имеют следующий вид:

$$b_3+2db_2+(1+d^2)b_1\leqslant d^2+1,\ -\infty<d<+\infty,$$

$$b_4+3db_3+(2+3d^2)b_2+d(3+d^2)b_1\leqslant d(3+d^2),\ d\geqslant 2.$$

Аналогично, рассматривая функцию $\zeta=-(z+z^{-1})$, отображающую U на $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-2,2]$ и применяя следствие 2, получаем, что класс TM мероморфных типично вещественных в U функций представим формулой

$$g(z)=-m_0(z+z^{-1})+C_0+\sum\frac{m_i z}{z^2+t_i z+1}+\int_{-2}^{2}\frac{z\,dm(t)}{z^2+tz+1}. \qquad (21)$$

Отсюда нетрудно получить интегральное представление для класса T (см., например, [1]), а также представление для функций $g(z)\in TM$, полученное в [5]:

$$g(z)=-m_0(z+z^{-1})+C_0+\sum\frac{m_i z}{z^2+t_i z+1}-\mu t(z).$$

Здесь и в (21) $C_0, m(t), m_i, i=0,1,\ldots$ – те же, что и в следствии 2, $t(z)\in T$, $\mu\geqslant 0$.

Литература

1. Г о л у з и н Г.М. О типично вещественных функциях. - Мат. сб., 1950, т.27 (69), № 2, с.201-218.
2. **G a r a b e d i a n P.R., S c h i f f e r M. A coefficient inequality for schlicht functions. - Ann. of Math., 1955, vol.61, N 1, p.116-136.**
3. **L e u n g Y.J., S c h o b e r G. The simple-zero theorem**

for support points in Σ. - Proc.Amer.Math.Soc., 1989, vol. 105, N 3, p.603-608.

4. Кузнецов В.О. О свойствах ассоциированных квадратичных дифференциалов в некоторых экстремальных задачах. - В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап.научн. семин.ЛОМИ, 1988, т.168, с.85-97.
5. Goodman A.W. Functions typically-real and meromorphic in the unit circle. - Trans.Amer.Math.Soc., 1956, vol.81, N 1, p.92-105.