В. С. Макаров, И. С. Гуцул, О некомпактных трехмерных многообразиях постоянной отрицательной кривизны, имеющих конечную меру, *Тр. МИАН СССР*, 1980, том 152, 165–169

Труды Математического института АН СССР
1980, том 152

В. С. МАКАРОВ, И. С. ГУЦУЛ

О НЕКОМПАКТНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНУЮ МЕРУ

В работе [1] строится бесконечная серия компактных трехмерных многообразий постоянной отрицательной кривизны.

В данной работе строятся две бесконечные серии некомпактных попарно негомеоморфных трехмерных многообразий постоянной отрицательной кривизны, обладающих конечною мерою. Эти многообразия получаются путем отождествления граней многогранников, которые являются вырожденными правильными призмами пространства Лобачевского, т. е. призмами с бесконечно удаленными вершинами. При этом сами многогранники должны нормально и правильно разбивать пространство Лобачевского. Эти многогранники мы также будем называть призмами (опуская слово «вырожденные»). Каждая из таких призм имеет лишь конечное число бесконечно удаленных точек и потому ее объем, равный мере получаемого из нее многообразия, конечен.

Покажем, как строятся такие призмы и разбиения из них пространства Лобачевского. Возьмем в пространстве Лобачевского некоторую плоскость γ и рассмотрим ее правильное разбиение на равные правильные n-угольники, каковое, как известно, возможно для любого значения n (см. [2, 3]). При $n \geqslant 7$ в вершинах (узлах) разбиения может сходиться любое число $k \geqslant 3$ таких многоугольников. В данной работе мы будем рассматривать единственный случай $k=4$, т. е. будем предполагать, что все углы этих правильных многоугольников равны $\pi/2$.

Итак, рассмотрим разбиение плоскости γ на правильные $4p$-угольники ($p \geqslant 2$) с прямыми углами. Возьмем один такой многоугольник и через его центр проведем прямую u, ортогональную плоскости γ. Отложим на этой прямой (по обе стороны от γ) отрезки равной длины h и через их концы проведем плоскости δ_1 и δ_2, ортогональные прямой u. Через стороны $4p$-угольника также проведем плоскости $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{4p}$, ортогональные плоскости γ. Эти плоскости пересекутся по прямым $b_1, b_2, \ldots, b_{4p}$, проходящим через вершины $4p$-угольника и ортогональным плоскости γ. Рассмотрим выпуклый многогранник, ограниченный плоскостями $\delta_1, \delta_2, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{4p}$. Если h достаточно мало то плоскости δ_1 и δ_2 пересекают прямые $b_1, b_2, \ldots, b_{4p}$ ($b_i=\beta_i \cap \beta_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, 4p-1$, $b_{4p}=\beta_{4p} \cap \beta_1$). Полученный многогранник обычно называют правильной призмой пространства Лобачевского. Величина плоского угла боковой грани призмы (так же, как и двугранного угла при ее основаниях) является функцией от h и меняется от $\pi/2$ до 0. Рассмотрим именно тот предельный случай, когда он равен 0. Ребра такой призмы, ранее принадлежавшие одной вершине, параллельны между собой, т. е. вершины призмы находятся на абсолюте (если рассматривать изображение этой призмы, например, в интерпретации Бельтрами—Клейна). Эти ребра призмы будут принадлежать одному параболическому пучку, а подходяще подобранная орисфера, ортогональная этому пучку, пересечет многогранник по орисферическому равнобедренному прямоугольному треугольнику. Это означает, что двугранные углы при основаниях призмы равны $\pi/4$ (они равны острым углам вышеуказанного орисферического треугольника), а сама призма разбивает пространство Лобачевского (достаточно призму размножить отражениями в ее гранях).

Перейдем теперь к построению первой серии многообразий. Рассмотрим какую-нибудь $4p$-угольную призму из построенных выше. Нижнее основание δ_1 призмы отождествим с верхним ее основанием δ_2 винтовым движением U с углом поворота $\varphi=\pi/2p$ и осью u (поворот по часовой стрелке, если смотреть со стороны верхнего основания). Боковые грани перенумеруем. Каждую грань β_{2i} ($i=1, 2, \ldots, p-1$) с четным номером (грани мы обозначаем теми же буквами, что и инцидентные им плоскости) отождествим с противоположной ей гранью β_{2i+2p} сдвигом B_{2i} (ось которого u_{2i} проходит через центры отождествляемых граней), а каждую грань β_{2i-1} с нечетным номером отождествим с противоположной ей гранью винтовым движением B_{2i-1} с углом поворота $\psi=\pi$ и осью U_{2i-1}, проходящей через центры отождествляемых граней. В дальнейшем грани с четными номерами будем называть четными гранями, а грани с нечетными номерами — нечетными (аналогичное соглашение принимается и для ребер); так как число $4p$ четное, то четные грани отождествляются лишь с четными, а нечетные — с нечетными.

Так как любой из двугранных углов призмы равен либо $\pi/2$, либо $\pi/4$, то согласно [4] рассматриваемая призма является фундаментальной областью дискретной группы Γ, порожденной движениями, отождествляющими ее грани.

Т е о р е м а 1. *Группа* Γ — *группа без кручения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Попарное отождествление граней призмы индуцирует распределение ребер призмы в циклы (в один цикл входят все ребра, отождествляющиеся в результате отождествления граней). Для доказательства теоремы достаточно [4] показать, что все циклы несущественные, т. е. сумма двугранных углов при ребрах одного цикла равна 2π.

Рассмотрим боковое ребро b_{2i} призмы. Оно является ребром пересечения четной грани β_{2i} с нечетной гранью β_{2i+1}. Винтовое движение B_{2i+1} переводит ребро b_{2i} в центрально симметричное ему ребро b_{2i+2p}. Сдвиг B_{2i}^{-1} переводит ребро b_{2i+2p} в ребро b_{2i-1} (второе боковое ребро грани β_{2i}). Винтовое движение B_{2i-1} переведет ребро b_{2i-1} в центрально симметричное ему ребро $b_{2i-1+2p}$ (второе боковое ребро грани β_{2i+2p}). Наконец, сдвиг B_{2i}^{-1} переведет ребро $b_{2i-1+2p}$ в ребро b_{2i}, и цикл замкнется. Таким образом, боковые ребра группируются в циклы по четыре ребра (пара ребер b_{2i-1} и b_{2i} четной грани и пара ребер $b_{2i-1+2p}$ и b_{2i+2p} противоположной ей четной грани). Так как двугранный угол при боковом ребре призмы равен $\pi/2$, то боковые ребра образуют несущественные циклы.

Рассмотрим теперь ребро c_{2i+1} нижней грани δ_1 ($c_{2i+1}=\delta_1\cap\beta_{2i+1}$). Движение U переводит это ребро в ребро $d_{2i+1}=\delta_2\cap\beta_{2i+2}$ верхней грани δ_2. Сдвиг B_{2i+2} переведет d_{2i+2} в противоположное ему ребро $d_{2i+2+2p}=\delta_2\cap\beta_{2i+2+2p}$ верхней грани. Движение U^{-1} переведет ребро $d_{2i+2+2p}$ в ребро $c_{2i+1+2p}=\delta_1\cap$ $\cap\beta_{2i+1+2p}$ нижней грани. Винтовое движение B_{2i+1}^{-1} переведет ребро $c_{2i+1+2p}$ в ребро $d_{2i+1}=\delta_2\cap\beta_{2i+1}$ верхней грани. Винтовое движение U^{-1} переведет ребро d_{2i+1} в ребро $c_{2i}=\delta_1\cap\beta_{2i}$ нижней грани. Сдвиг B_{2i} переведет ребро c_{2i} в ребро $c_{2i+2p}=\delta_1\cap\beta_{2i+2p}$ нижней грани. Винтовое движение U переведет ребро c_{2i+2p} в ребро $d_{2i+2p+1}=\delta_2\cap\beta_{2i+2p+1}$ верхней грани. Наконец, винтовое движение B_{2i+1}^{-1} переведет $d_{2i+2p+1}$ в исходное ребро c_{2i+1} нижней грани, и цикл замкнется. В дальнейшем для краткости записи будем перечислять последовательно (через запятую) сперва ребро, затем преобразование, затем ребро, получаемое из первого ребра этим преобразованием, затем второе преобразование, затем ребро, получаемое из предыдущего ребра этим преобразованием, и т. д. При таком способе записи мы получим для ребра c_{2i+1} следующую последовательность:

$$\begin{gathered}c_{2i+1},\ U,\ d_{2i+2},\ B_{2i+2},\ d_{2i+2+2p},\ U^{-1},\\ c_{2i+1+2p},\ B_{2i+1}^{-1},\ d_{2i+1},\ U^{-1},\ c_{2i},\ B_{2i},\\ c_{2i+2p},\ U,\ d_{2i+2p+1},\ B_{2i+1}^{-1},\ c_{2i+1}.\end{gathered}$$

Таким образом один цикл объединит восемь ребер при основаниях: два ребра c_{2i+1} и d_{2i+1} нечетной грани, два ребра $c_{2i+1+2p}$ и $d_{2i+2p+1}$ противоположной ей грани, два нижних ребра c_{2i} и c_{2i+2p} предыдущих им граней и два верхних ребра d_{2i+2} и $d_{2i+2p+2}$ последующих им граней. Так как согласно построению двугранный угол при основании призмы равен $\pi/4$, то полученные циклы ребер при основаниях несущественны. Легко видеть, что циклов других видов у многогранника нет. Тем самым мы доказали, что Γ — группа без кручения.

Отсюда следует [4], что после указанного отождествления граней при любом p мы получаем некомпактное многообразие постоянной отрицательной кривизны, обладающее конечной мерой. Таким образом, мы получили бесконечную серию требуемых многообразий.

Перейдем теперь к построению второй серии многообразий. Рассмотрим какую-нибудь $4(2p-1)$-угольную призму из построенных выше $p\geqslant 2$. Нижнее основание δ_1 призмы отождествим с верхним ее основанием δ_2 винтовым движением U' с углом поворота $\tau=\pi/2$ и осью u (поворот по часовой стрелке, если смотреть со стороны верхнего основания). Боковые грани, как и прежде, перенумеруем: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{4(2p-1)}$. Как и в первом случае, каждую нечетную грань β_{2i-1} ($i=1, 2, \ldots, 2p-2$) отождествим с противоположной ей гранью $\beta_{2i-1+2(2p-1)}$ винтовым движением B_{2i-1} с углом поворота $\psi=\pi$ и осью U_{2i-1}, проходящей через центры отождествляемых граней. Четную грань β_{2p} отождествим с противоположной ей гранью сдвигом B_{2p}, ось u_{2p} которого проходит через центры этих граней. Наконец, всякую четную грань β_{2i}, отличную от указанных двух, отождествим винтовым движением B_{2i} с углом поворота $\psi=\pi$ и осью U_{2i} с гранью $\beta_{4(2p-1)-2i+2}$, симметричной грани β_{2i} относительно плоскости α, проходящей через ось u_1 и ортогональной плоскости γ. По тем же соображениям, что и в предыдущем случае, рассматриваемая призма является фундаментальной областью дискретной группы Γ', порожденной движениями, отождествляющими ее грани.

Т е о р е м а 2. *Группа Γ' — группа без кручения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что все циклы несущественны. При принятом нами способе записи мы получим для цикла четного бокового ребра b_{2i} $(1 \leqslant i < 2p-1;\ i \neq p)$ следующую последовательность:

$$b_{2i},\ B_{2i},\ b_{4(2p-1)-2i+2},\ B^{-1}_{2(2p-1)-2i+3},$$
$$b_{2(2p-1)-2i+2},\ B_{2(2p-1)-2i+2},\ b_{2(2p-1)+2i},\ B^{-1}_{2i+1},\ b_{2i},$$

из которой следует, что в каждый такой цикл входят ровно четыре (четных) боковых ребра — по одному из каждой четверти, на которые делится призма взаимно ортогональными плоскостями α и α', проходящими через прямую u. То же самое можно сказать относительно цикла нечетных боковых ребер b_{2i-1}, который определяется последовательностью

$$b_{2i-1},\ B_{2i-1},\ b_{2i-1+2(2p-1)},\ B^{-1}_{2(2p-1)-2i+2},$$
$$b_{2(2p-1)-2i+1},\ B_{2(2p-1)-2i+1},\ b_{4(2p-1)-2i+1},\ B^{-1}_{2i},\ b_{2i-1}.$$

В этот цикл входит четыре нечетных боковых ребра — по одному из каждой четверти.

При $i=p$ цикл состоит из ребер b_{2p}, b_{2p-1}, b_{6p-1} и b_{6p-2} и получается так же, как и в предыдущей серии многообразий. Так как угол между боковыми гранями равен $\pi/2$, то все циклы боковых ребер несущественные.

Переходя к ребрам оснований призмы, отметим первым делом, что ребра c_1, d_1, $c_{1+2(2p-1)}$, $d_{1+2(2p-1)}$, c_{2p}, d_{2p}, c_{6p-2} и d_{6p-2} образуют один цикл, что легко проверяется непосредственно. Эти ребра мы исключим из дальнейшего рассмотрения. Далее отметим, что многогранник и схема отождествления его граней переходят в себя при повороте W вокруг оси u на угол $\psi=\pi$. Это нас избавляет от исследования циклов ребер третьей и четвертой четвертей. Кроме того, движение U' переводит нижнее ребро первой четверти в верхнее ребро второй четверти и это нас избавляет от исследования циклов верхних ребер второй четверти. Нечетное нижнее ребро второй четверти эквивалентно нечетному верхнему ребру четвертой четверти, которое поворотом W переходит в нечетное верхнее ребро исходной грани, а от рассмотрения таких ребер мы только что избавились. Четное нижнее ребро второй четверти переходит в нечетное верхнее ребро третьей четверти, которое эквивалентно нечетному нижнему ребру первой четверти, и мы снова возвращаемся к исследованию циклов ребер лишь первой четверти. Рассмотрим нечетное нижнее ребро c_{2i-1}, $2 \leqslant i \leqslant p$, из первой четверти. Для него мы получаем последовательность

$$c_{2i-1},\ U',\ d_{2i-1+2p-1},\ B_{2i-1+2p-1},\ c_{3(2p-1)-2i+3},$$
$$U',\ d_{4(2p-1)-2i+3},\ B^{-1}_{2(2p-1)-2i+3},\ c_{2(2p-1)-2i+3},$$
$$U',\ d_{3(2p-1)-2i+3},\ B_{2p-1+2i+1},\ c_{2p-1+2i-1},$$
$$U',\ d_{2(2p-1)+2i-1},\ B^{-1}_{2i-1},\ c_{2i-1},$$

из которой видно, что в цикл входит четыре нижних и четыре верхних ребра. Для четного нижнего ребра мы получаем последовательность

$$c_{2i},\ U'_1,\ d_{2i+2p-1},\ B_{2i+2p-1},\ c_{2i+3(2p-1)},\ U',\ d_{2i},$$
$$B_{2i},\ c_{4(2p-1)-2i+2},\ U',\ d_{(2p-1)-2i+2},\ B_{2p-1-2i+2},$$
$$c_{3(2p-1)-2i+2},\ U',\ c_{4(2p-1)-2i+2},\ B_{2i}^{-1},\ c_{2i},$$

из которой видно, что в цикл четного нижнего ребра c_{2i} вошло и верхнее ребро d_{2i} той же грани. Это нас освобождает от необходимости рассматривать цикл верхнего четного ребра. Цикл верхнего нечетного ребра первой четверти аналогичен циклу нижнего нечетного ребра, и мы его для краткости не приводим.

Мы видим, что в каждом случае цикл состоит из восьми ребер. Так как двугранный угол при ребре основания равен $\pi/4$, то все циклы ребер при основаниях призмы несущественны. Таким образом, мы доказали, что Г — группа без кручения. Отсюда следует, что после указанного отождествления граней призмы при любом $p \geqslant 2$ мы получаем некомпактное многообразие постоянной отрицательной кривизны, обладающее конечной мерой. Таким образом, мы получили вторую бесконечную серию многообразий. Многообразия первой серии неизометричны многообразиям второй серии: при разном числе граней у призмы они негомеоморфны ввиду различия фундаментальных групп и, следовательно, неизометричны; при одинаковом числе граней у призмы многообразие второй серии обладает замкнутой геодезической такой длины, каковую не могут иметь замкнутые геодезические соответствующего многообразия первой серии. В заключение отметим, что у нас имеется еще несколько примеров подобных серий многообразий, но мы здесь привели лишь две, наиболее простые, на наш взгляд.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуцул И. С.* О компактных трехмерных многообразиях постоянной отрицательной кривизны. — Наст. сб., с. 89—96.
2. *Poincaré H.* Theorie de groupes fuchsiens. — Acta math., I, 1882, **1**, p. 1—62.
3. *Мордухай-Болтовской М. М.* О заполнении неевклидовых пространств правильными многоугольниками и многогранниками. — Учен. зап. НИИ мат. и физ. Рост. ун-та, 1938, № 2, с. 35—37.
4. *Best L. A.* On Torsion-free discrete subgroups of PSL (2, C) with compact orbit space. — Canad. J. Math., 1971, **23**, N 3, p. 451—460.