A. Yu. Daletskii, Yu. S. Samoilenko, Noncommutative moments problem, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1987, Volume 21, Issue 2, 72–73

Функциональный анализ и его приложения,
1987, т. 21, вып. 2, 72—73

УДК 519.4

НЕКОММУТАТИВНАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

А. Ю. Далецкий, Ю. С. Самойленко

1. Пусть G — конечномерная вещественная группа Ли, $\mathfrak{G}$ — ее алгебра Ли, L — комплексная обертывающая $*$-алгебра (элементы $\mathfrak{G}$ предполагаются кососамосопряженными в L). Пусть U — унитарное представление G в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H, $H \ni \Omega$ — фиксированный вектор, dU — соответствующее представление L с областью определения D.

Рассмотрим функционал $S_{(U,\Omega)}(x) = (dU(x)\Omega, \Omega)$. Если $\Omega \in D$, он определен для всех $x \in L$. В этом случае будем говорить, что пара (U, Ω) имеет все моменты. Некоммутативная проблема моментов (НПМ) заключается в следующем. Пусть задан линейный функционал S на L. При каких условиях существует обладающая всеми моментами пара (U, Ω) такая, что $S = S_{(U,\Omega)}$?

Для простейшей коммутативной группы Ли $G = \mathbf{R}^n$ L есть множество полиномов от n переменных, и поставленная задача, как следует из спектрального представления коммутирующего набора операторов, совпадает с классической степенной проблемой моментов Гамбургера.

Впервые НПМ рассматривалась на алгебре канонических коммутационных соотношений [1; 2]. В этих работах обобщался метод Рисса. Дальнейшее его обобщение и применение к НПМ на конечномерной алгебре Ли проведено в [3; 4], однако полученный критерий разрешимости НПМ сложен.

Простые достаточные условия разрешимости НПМ: положительная определенность функционала S на L и аналитические оценки $|S(X_k^m)| \leqslant CM^m m!$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ для некоторого набора образующих $\{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathfrak{G}$, вытекают из ФС^3-теории интегрирования представлений конечномерных алгебр Ли [5; 6].

Ниже для класса бесконечномерных алгебр Ли формулируется аналог ФС^3-теоремы и вытекающие из него условия разрешимости НПМ.

2. В [7] рассматривается класс бесконечномерных алгебр Ли (AE-алгебры), каждой из которых можно поставить в соответствие локальную группу Ли, причем это соответствие обладает свойствами, аналогичными конечномерному случаю. В этот класс входят, например, банаховы алгебры Ли, их индуктивные пределы, алгебры Ли гладких токов, нильпотентные и квазинильпотентные алгебры Ли.

Пусть T — сильнонепрерывное представление AE-алгебры Ли $\mathfrak{G}$-кососимметричными операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения D. Предположим, что: 1) операторы $T(x)$, $x \in \mathfrak{G}$, в существенном кососамосопряжены на D; 2) для любого $x \in \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — некоторое плотное в $\mathfrak{G}$ множество, пространство аналитических векторов $H^\omega(T(x)) \cap D$ плотно в H.

Теорема 1. *Условия* 1), 2) *достаточны для однозначной интегрируемости представления T до унитарного представления G_{loc}.*

Заметим, что условия 1) достаточно, чтобы определить унитарные операторы $U(\exp x) = e^{\overline{T(x)}}$. Хорошие свойства сходимости степенных рядов в AE-алгебре и условие 2) позволяют доказать равенство

$$T(Ad(\exp tx)\, y)\, u = e^{t\overline{T(x)}}\, \overline{T(y)}\, e^{-t\overline{T(x)}} u,$$
$$x, y \in \mathfrak{G}, \quad u \in D.$$

Пусть теперь

$$g = \exp x, \; f = \exp y \in G_{\mathrm{loc}}, \; g(t) = \exp tx, \quad g(t) f = \exp z(t).$$

Из известных формул

$$\frac{d}{dt} \exp z(t) = dL_{\exp z(t)} \int_0^1 Ad(\tau \exp z(t))\, z'(t)\, d\tau$$

(L — оператор левого сдвига),

$$\frac{d}{dt} e^{\overline{T(z(t))}} h = \int_0^1 e^{\tau\overline{T(z(t))}}\, \overline{T(z'(t))}\, e^{-\tau\overline{T(z(t))}}\, d\tau \cdot e^{\overline{T(z(t))}} h, \quad h \in D,$$

следует, что функции

$$t \mapsto U(g(t) f)\, U(f)^{-1} h \text{ и } t \mapsto U(g(t)\, f)\, h$$

являются решениями дифференциального уравнения $\dot{X}(t) = T(x)X(t)$ с начальным условием $X(0) = h$. Это решение единственно, откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь НПМ на сепарабельной АЕ-алгебре Ли $\mathfrak{G}$. В отличие от конечномерного случая, в качестве ее решения будем искать представление соответствующей локальной группы G_{loc}.

Теорема 1 позволяет доказать следующее достаточное условие разрешимости НПМ, в коммутативной ситуации вытекающее из [8; 9].

Теорема 2. *Для разрешимости НПМ на $\mathfrak{G}$ достаточно, чтобы:*

1) *S был положительно определен на L и функционалы $S_n(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1, \ldots, x_n)$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{G}$, $n = 1, 2, \ldots$, непрерывны по каждой переменной;*

2) *для любого $x \in \mathfrak{G}$ одномерная проблема моментов, порожденная последовательностью чисел $a_n = S(x^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ была однозначно разрешима;*

3) *для любого $x \in \mathfrak{A}$ имела место оценка*

$$|S(x^n)| \leqslant C_x M_x^n n!, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Замечания. 1. Если $\mathfrak{G}$ — алгебра токов или разрешимая алгебра, в качестве $\mathfrak{A}$ можно рассматривать не плотное, а специальным образом выбранное тотальное множество.

2. Аналитические оценки в теореме 2 можно заменить на квазианалитические.

3. Если при постановке НПМ требовать цикличности Ω, то условия теорем 1 и 2 обеспечивают единственность решения (с точностью до унитарной эквивалентности).

4. Постановка и доказательство достаточного условия однозначной разрешимости НПМ возможны и для пары антикоммутирующих неограниченных самосопряженных операторов [10], а также для любого счетного семейства операторов, попарно коммутирующих или антикоммутирующих между собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Woronowicz S. L.* // Repts Math. Phys.— 1970.— V. 1.— P. 135—145. 2. *Powers R. T.* // Trans. Amer. Math. Soc.— 1974.— V. 187.— P. 261—293. 3. *Richter P.* // Wiss. Z.— 1978.— № 3.— P. 293—297. 4. *Schmüdgen K.* // Repts Math. Phys.— 1978.— V. 14.— P. 385—404. 5. *Flato M.*, *Simon J.*, *Snellman H.*, *Sternheimer D.* // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.— 1972.— V. 5.— P. 424—434. 6. *Flato M.*, *Simon J.* // J. Funct. Anal.— 1973.—V. 12.— P. 268—276. 7. *Boseck H.*, *Czichowski G.*, *Rudolph K.* Analysis on Topological Groups — General Lie Theory. Teubner texte Math. 1981. 8. *Костюченко А. Г.*, *Митягин Б. С.* // Труды ММО.— 1960.— Т. 8.— С. 283—316. 9. *Березанский Ю. М.*, *Шифрин С. Н.* // Укр. мат. журн.— 1971.— Т. 23.— С. 291—306. 10. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев: Наукова думка, 1984.

Институт математики АН УССР

Поступило в редакцию
27 января 1986 г.