А. Ф. Вакуленко, Об одном варианте коммутаторных оценок в спектральной теории, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 163, 29–36

А.Ф.Вакуленко

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ КОММУТАТОРНЫХ ОЦЕНОК В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

В работе рассматриваются операторы Шредингера системы двух и трех частиц. Основные результаты спектральной теории и теории рассеяния получаются с помощью абстрактной схемы Като-Лавина, для проверки условий которой мы предлагаем новый способ. Для двух частиц он дает полные результаты, включая теорему единственности Като (в одном отношении усиливая её). Для трех частиц мы привлекаем также метод Мурра. Автор благодарен Д.Р.Яфаеву за полезные обсуждения и критику.

I. В этом пункте мы рассматриваем двухчастичный оператор Шредингера. Его содержание основано на одном простом наблюдении, которое отражено в приводимой ниже лемме I. Пусть H -самосопряженный оператор. Напомним, что оператор T называется H -ограниченным, если $\mathcal{D}(H)\subset\mathcal{D}(T)$ и $\|Tf\|\leqslant c_1\|f\|+c_2\|Hf\|$. Оператор T называется H -гладким на отрезке $[a,b]$, если $|\operatorname{Im} z|\,\|T(H-z)^{-1}\|^2\leqslant c$, $\operatorname{Re} z\in[a,b]$.

ЛЕММА I. Пусть H -самосопряженный оператор. Пусть A - H -ограниченный оператор, $[a,b]$ -конечный отрезок. Если для всех $f\in\mathcal{D}(H)$ и $\lambda\in[a,b]$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\big((H-\lambda)f,\,Af\big)\geqslant\|Bf\|^2, \qquad \text{(I)}$$

то оператор B является H -гладким на $[a,b]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (I) следует, что $\|Bf\|^2\leqslant\|(H-\lambda)f\|\,\|Af\|$. Пусть R_z - резольвента H. Имеем

$$|\varepsilon|\,\|BR_{\lambda+i\varepsilon}f\|^2\leqslant|\varepsilon|\,\|AR_{\lambda+i\varepsilon}f\|\,\|(H-\lambda)R_{\lambda+i\varepsilon}f\|\leqslant c\|f\|^2.$$

Понятие относительной гладкости играет существенную роль в теории Като-Лавина [I], и в работах использующих эту схему предлагались различные признаки относительной гладкости. Если предположить, что оператор A кососимметричен, то условие леммы I приобретет такой вид $([H,A]f,f)\geqslant 2\|Bf\|^2$. Этот вариант леммы I (с дополнительным условием ограниченности A) хорошо известен: [I].

Введем оценочную функцию $\eta: R^n\longrightarrow R^+$, зависящую только от радиуса и ограниченную. Потребуем также, чтобы интеграл $\int_0^\infty\eta(r)\,dr$ сходился, и выполнялось $r\,\eta(r)\to 0$ при $r\to 0$. В качестве η можно взять, например, функцию $c(1+r)^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon>0, c>0$. Рассмотрим в $L_2(R^n)$ самосопряженные операторы $H_0=-\Delta$, $H=-\Delta+V$

где Δ - оператор Лапласа, а V -оператор умножения на вещественную функцию ϑ такую, что $|\vartheta| \leq \eta$.

ТЕОРЕМА I. Положительный спектр H абсолютно-непрерывен, существуют пределы

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} \exp(itH_0)\exp(-itH)P_{ac}, \quad \operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} \exp(itH)\exp(-itH_0).$$

где P_{ac} - проектор на абсолютно-непрерывное подпространство H. Теория Като-Лавина позволяет вывести теорему I из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Оператор умножения на функцию $\sqrt{\eta}$ является H-гладким на $(0,\infty)$.

В формулировке этой теоремы и далее под относительной гладкостью на открытом множестве Q подразумевается гладкость на любом отрезке $[a,b] \subset Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с одномерного случая: $Hf = -f'' + \vartheta f$. Пусть $\lambda_0 > 0$. Положим

$$\omega(x) = \exp\left\{\frac{2}{\sqrt{\lambda_0}} \int_{-\infty}^{x} \eta(t)\,dt\right\}, \quad A = 2\omega \frac{d}{dx}.$$

Ясно, что $A - H$ -ограничен. Проверку неравенства леммы I достаточно провести для вещественных функций. Пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Имеем

$$((H-\lambda)f, Af) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\omega'(f'^2 + \lambda f^2) + 2\omega\vartheta f f'\right\} dx \geq$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\omega' - \frac{|\vartheta|}{\sqrt{\lambda}}\omega\right)(f'^2 + \lambda f^2)\,dx \geq \sqrt{\lambda_0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \eta f^2\,dx \geq c\|\sqrt{\eta} f\|^2.$$

Пусть теперь $n \geq 3$. Введем операторы $D = 2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{n-1}{r}$ и ∇_φ - градиент по угловым переменным. Покажем, что при подходящем выборе гладких, ограниченных функций ω и α будет справедливо неравенство

$$((H-\lambda)g, \omega e^{\alpha} D e^{\alpha} g) \geq c\|\sqrt{\eta} g\|^2. \qquad (2)$$

Положим $f = e^{\alpha} g$. Неравенство (2) примет вид $(e^{\alpha}(H-\lambda)e^{-\alpha} f, \omega D f) \geq$ $\geq c\|\sqrt{\eta} e^{-\alpha} f\|^2$ Величины $\|\sqrt{\eta} f\|$ и $\|\sqrt{\eta} e^{-\alpha} f\|$ эквивалентны, поэтому нам нужно добиться выполнения неравенства

$$\operatorname{Re}(e^{\alpha}(H-\lambda)e^{-\alpha} f, 2\omega D f) \geq c_1\|\sqrt{\eta} f\|^2. \qquad (3)$$

Пусть $N_0 < N$, m - константы, значения которых будут определены позднее. Положим

$$\omega(\tau)=\begin{cases}\tau & \tau\in(0,N),\\ N\exp\left\{\frac{4}{\sqrt{\lambda_0}}\int_0^\tau \eta(t)dt\right\}, & \tau> N,\end{cases}\qquad \alpha(\tau)=\int_0^\tau dt\int_t^\infty \frac{a(s)}{s}ds.$$

где a - гладкая функция вида

$$a(s)=\begin{cases}0 & s\in(0,N_0)\cup(N,\infty)\\ 0\le a(s)\le\frac{\lambda_0}{8m},\ a'(s)\ge-\frac{\lambda_0}{4}, & s\in(N_0,N).\end{cases}$$

Потребуем дополнительно $\int_0^\infty \frac{a(s)}{s}ds=m$. Последнее возможно, если N достаточно велико. Левую часть (3) запишем в виде $\int_{R^n}\mathcal{J}(x)dx$ где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}=&-\left(\frac{\omega}{\tau^2}\right)'\left(\frac{(n-1)(n-3)}{4}f^2+(\nabla\varphi f)^2\right)+\\ &+4\alpha'\tau(Df)^2+\left\{2\alpha'\alpha''-(\alpha''\tau)'\right\}f^2+\alpha'^2f^2+\\ &+\omega'\left((Df)^2+\lambda f^2\right)+2\omega\tilde{v}fDf.\end{aligned}\tag{4}$$

Во второй строке учтено, что $\omega=\tau$ при $\alpha'\ne0$. Выберем теперь константы N_0, N, m. Пусть N_0 таково, что при $N>N_0$ выполнено $2\omega-\omega'\tau\ge0$. Тогда $-\left(\frac{\omega}{\tau^2}\right)'$ неотрицательно, и мы можем выбросить первое слагаемое в (4). Выражение в фигурных скобках в (4) оценим так $2\alpha'\alpha''\tau-(\alpha''\tau)'=-2\alpha'a+a'\ge-\frac{2m\lambda_0}{8m}-\frac{\lambda_0}{4}=-\frac{\lambda_0}{2}$. Учитывая еще раз $\alpha'\ne0\Rightarrow\omega'=1$ получим $\left\{2\alpha'\alpha''\tau-(\alpha''\tau)'\right\}f^2+\lambda\omega'f^2\ge\omega'\frac{\lambda_0}{2}f^2$. Таким образом $\mathcal{J}\ge\omega'Df^2+\frac{\lambda_0}{2}\omega'f^2+\alpha'^2f^2+2\tilde{v}\omega fDf$. Увеличив, если нужно N_0, будем считать, что при $\tau>N_0$ выполнено

$$\mathcal{J}\ge\omega'(Df)^2+\omega'\frac{\lambda_0}{2}f^2+2\omega\tilde{v}fDf\ge c_2\eta f^2.\tag{5}$$

Теперь считаем N_0 фиксированным. При $\tau<N_0$ имеем $\omega=\tau$, $\alpha'=m$ и $\mathcal{J}\ge(Df)^2+m^2f^2+2\tilde{v}\tau fDf$. Ясно, что, если m достаточно велико, то

$$\mathcal{J}\ge c_3f^2\ge c_4\eta f^2.\tag{6}$$

Оценки (5) и (6) приводят к (3). Теорема доказана.

Заметим, что конструктивный характер доказательства приводик к явным оценкам резольвенты парного оператора Шредингера.

При доказательстве теоремы мы попутно получили, что $\operatorname{Re}\left((H-\lambda)f,Af\right)\ge\left\|\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{\tau}\nabla\varphi f\right)\right\|^2$. Следовательно $\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{\tau}\nabla\varphi\right)$ - H-гладкий на $(0,\infty)$ оператор. Нетрудно доказать то же самое для операторов $\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left|\frac{1}{\tau}\nabla\varphi\right|^{\tau}$, $\tau>0$. Коэффициенты оператора $\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(\frac{1}{\tau}\nabla\varphi\right)$

убывают на ∞ ровно как $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$. В то же время операторы $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ и $\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial}{\partial\tau}$ не являются H-гладкими. Существование H-гладких операторов такого типа отмечено (по-видимому, впервые) в [4]. Близкие по духу оценки резольвенты оператора Шредингера есть в [2, 3]. Если в качестве H взять оператор Лапласа и перейти в импульсное представление, то H-гладкость оператора $\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left|\frac{1}{\tau}\nabla\varphi\right|^{\tau}$ станет следствием теоремы о следах функций соболевского класса $W_2^{\tau+\frac{1}{2}}$ (которая тем сильнее, чем меньше $\tau>0$). В следующем пункте нас будут интересовать подобные оценки для трехчастичного оператора Шредингера.

2. Пусть для некоторого конечного множества индексов α заданы разложения $R^m = X_\alpha \oplus Y_\alpha$, причем $X_\alpha \neq \{0\}$; $Y_\alpha \cap Y_\beta = \{0\}$ при $\alpha \neq \beta$. Вектор из R^m будем записывать в виде пары (x_α, y_α). Пусть заданы вещественные функции $v_\alpha(x_\alpha)$ такие, что

$$|v_\alpha(x_\alpha)| + \left|\left(\frac{\partial}{\partial|x_\alpha|}v_\alpha\right)(x_\alpha)\right| \leq c(1+|x_\alpha|)^{-1-\varepsilon} \quad \varepsilon>0, c>0.$$

Пусть V_α -оператор умножения на v_α в $L_2(R^m)$. Положим $H_\alpha = -\Delta + V_\alpha$, $H = -\Delta + \sum V_\alpha$. Мы установим существование пределов

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to\infty} \exp(itH_\alpha) J_\alpha \exp(-itH) P_{ac}, \tag{7}$$

для некоторого набора операторов J_α таких, что $\sum J_\alpha = I$. Существование этого предела эквивалентно сильной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \exp(itH_\alpha)\{H_\alpha J_\alpha - J_\alpha H\}\exp(-itH) P_{ac}\, dt.$$

В [5] отмечена возможность такого выбора J_α, что оператор $H_\alpha J_\alpha - J_\alpha H$ оказывается компактным относительно H. Появление метода Мурра расширило возможности изучения предела (7) в рамках схемы Като-Лавина. Различные варианты такого подхода обсуждались в литературе: [2-4]. В нашем изложении мы заимствуем многое из упомянутых работ. В, частности, следуя [2, 5] выберем в качестве J_α оператор умножения на функцию j_α со следующими свойствами. j_α - однородная функция нулевой степени однородности. Её сужение на единичную сферу S -гладкая функция, равная единице в окрестности $S\cap Y_\alpha$ и равная нулю в окрестности $S\cap Y_\beta$ при $\beta\neq\alpha$.

ТЕОРЕМА 3. На вещественной оси существует замкнутое, не более чем счетное множество Λ такое, что для каждого α имеется разложение $H_\alpha J_\alpha - J_\alpha H = \sum A_k^* B_k$ где $A_k(B_k) - H_\alpha(H)$ -

гладкие на $R \setminus \Lambda$.

Как уже отмечалось, из теоремы 3 вытекает существпвание пределав (7). Близкое утверждение есть в [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что $H_\alpha \mathcal{J}_\alpha - \mathcal{J}_\alpha H = 2(\nabla j_\alpha, \nabla) + \Delta j_\alpha - j_\alpha \sum_{\alpha \neq \beta} v_\beta$. Очевидны следующие оценки: $|j_\alpha \sum v_\beta| \leqslant C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}$, $|\Delta j_\alpha| \leqslant C|x|^{-2}$. Из результатов Мурра (см. [2]) следует, что операторы умножения на $|x|^{-1}$ и $(1+|x|)^{\frac{-1-\varepsilon}{2}}$ являются H и H_α - гладкими на $R \setminus T$, где T - некоторое замкнутое, не более чем счетное множество (при $m = 2$ умножение на $|x|^{-1}$ не будет H - гладким, но соответствующие уточнения совсем просты). Нам осталось исследовать оператор $Q = (\nabla j_\alpha, \nabla)$ который является оператором того же типа, что и операторы, обсуждавшиеся в конце пункта I. Пусть χ - однородна степени нуль, и её сужение на единичную сферу равно нулю в окрестности всех $S \cap Y_\beta$ Положим $Q_\tau = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left| \frac{1}{\tau} \nabla \varphi \right|^\tau \chi$. Ясно, что $|Q| \leqslant Q^*_{\frac{1}{2}} Q_{\frac{1}{2}}$ при подходящем выборе χ . Доказательство теоремы завершается применением первого из следующих утверждений.

ЛЕММА 2. Оператор $Q_{\frac{1}{2}}$ - H - гладкий на $R \setminus T$.

ЛЕММА 3. Оператор Q_1 - H - гладкий на $R \setminus T$. В первом варианте работы автор располагал леммой 3, не заметив разницы между операторами $Q_{\frac{1}{2}}$ и Q_1 . На это указал Д.Р.Яфаев.

В отсутствии потенциала, когда можно пользоваться разложением по сферическим гармоникам, леммы 2 и 3 получаются применением леммы I к следующим тождествам

$$\Lambda 2. \int_0^\infty \left(-f'' - \lambda f + \frac{n^2}{r^2} f\right) \frac{2r}{\sqrt{\lambda}\, r + n} f' \, dr = \int_0^\infty \left(\frac{n}{(\sqrt{\lambda}\, r + n)^2} f'^2 + \frac{n}{r^2} f^2\right) dr \quad (\lambda > 0) \tag{7}$$

$$\Lambda 3. \int_0^\infty \left(-f'' - \lambda f + \frac{n^2}{r^2} f\right) 2 f' \, dr = \int_0^\infty \frac{2n^2}{r^3} f^2 \, dr . \tag{8}$$

Эти же тождества можно написать в $L_2(R^m)$, при этом, однако, выражение $\frac{2r}{\sqrt{\lambda}\, r + n}$ порождает нелокальный по угловым переменным оператор. Нам потребуется следующее обобщение леммы I, аналогичное приведенному в [4].

ЛЕММА 4. Пусть H -самосопряженный оператор. Пусть A - H-ограниченный, C_K-H-гладкие операторы. Если $\mathrm{Re}\,((H-\lambda) f, A f) \geqslant \|Bf\|^2 + (Bf, C_1 f) + (C_2 f, C_3 f)$, то B- H - гладкий оператор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Составим по образцу (9) следующее выражение

$$((H-\lambda) f, D f) = \int \left\{ \sum v_\alpha f D f + \frac{2}{r^3} \left(\frac{(m-1)(m-3)}{4} + (\nabla_\varphi f)^2 \right\} dx . \tag{I0}$$

Напомним, что $D = 2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m-1}{r}$, ∇_φ – градиент по угловым переменным. Проведем следующее преобразование

$$\int v_\alpha f D f\, dx = -\int \frac{|x_\alpha|}{r} \frac{\partial v_\alpha}{\partial |x_\alpha|}\, dx.$$

Величина $\frac{x_\alpha}{r}\frac{\partial v_\alpha}{\partial |x_\alpha|}$ убывает как $r^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}$ равномерно в области $\{|y_\alpha| \leqslant |x_\alpha|^2\}$ (но не во всем пространстве). Подправим оператор D в окрестности подпространств Y_α. Пусть φ – гладкая функция с носителем в $[0,1]$, причем $0 \leqslant \varphi' \leqslant 1$ и $\varphi'(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. Положим $\rho_\alpha = \sqrt{|y_\alpha|}\,\varphi\left(\frac{|x_\alpha|}{\sqrt{|y_\alpha|}}\right)$ и

$$A_\alpha f = \frac{1}{r}\left\{2\rho_\alpha \frac{\partial}{\partial |x_\alpha|} f + (\dim X_\alpha - 1)\left(\frac{\partial}{\partial |x_\alpha|}\rho\right) f\right\}.$$

В окрестности Y_α оператор A_α совпадает с той частью D, которая дает нетривиальный вклад в $(V_\alpha f, Df)$. Легко вычислить, что

$$((H-\lambda)f, A_\alpha f) =$$

$$= \int\left\{\frac{1}{r}\left(2\varphi'\left(\frac{|x_\alpha|}{\sqrt{|y_\alpha|}}\right)(\nabla_{x_\alpha} f)^2 - \rho_\alpha\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial |x_\alpha|}\right) f^2\right) + O\left(r^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)\left(f^2 + |\nabla f|^2\right)\right\} dx. \qquad (11)$$

Сравним (10) и (11). В области $\{|x_\alpha|^2 \leqslant |y_\alpha|\}$ (содержащей носитель $\varphi'\left(\frac{|x_\alpha|}{\sqrt{|y_\alpha|}}\right)$) справедливо неравенство $(\nabla_{x_\alpha} f)^2 \leqslant$ $\leqslant \left(\frac{1}{r}\nabla_\varphi f\right)^2\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right)$. Там же имеем $\frac{1}{r}\rho_\alpha \frac{\partial v_\alpha}{\partial |x_\alpha|} = \frac{1}{r}|x_\alpha|\frac{\partial v_\alpha}{\partial |x_\alpha|}$. Причем вне указанной области обе величины суть $O\left(r^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)$. В итоге

$$((H-\lambda)f, (D - \sum A_\alpha)f) \geqslant \int\left\{\chi r^{-3}(\nabla_\varphi f)^2 + O\left(r^{-1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)\left(f^2 + (\nabla f)^2\right)\right\} dx. \qquad (12)$$

Где χ – функция, описанная перед леммой 2. Воспользуемся леммой 4, положив $C_1 = 0$ и приняв за $(C_2 f, C_3 f)$ быстроубывающую добавку в (12).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 3 нетрудно вывести H -гладкость операторов $\frac{1}{\sqrt{r}}\left|\frac{1}{r}\nabla_\varphi\right|^\tau$ при $\tau \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Действовать по аналогии с доказательством леммы 3, исходя из (8), нельзя. Изложим другой вариант доказательства леммы 2 в случае, когда $H = -\Delta$. Вместо (8) рассмотрим следующее выражение (считаем $\lambda > 0$)

$$\int_0^\infty \left(f'' + \lambda f - \frac{n^2}{r^2} f\right)\frac{2n}{r+n} f'\, dr = \int_0^\infty\left(\frac{n}{(r+n)^2}\left(f'^2 + \lambda f^2\right) - \frac{n^3(2r+n)}{r^3(r+n)^2} f^2\right) dr.$$

Правая часть теперь не является знакоопределенной, но отрицательная часть не превосходит $\frac{n^2}{r^3}f^2$ – величины, оцененной в (9). По лемме 4 получаем, что $\frac{\sqrt{n}}{r+n}$ -гладкий оператор. Поскольку $\frac{n}{r^2}\leqslant\frac{2n}{(r+n)^2}+\frac{n^2}{r^3}$ утверждение леммы 2 в этом простом случае доказано.

Будем рассматривать $\frac{2n}{r+n}$ как оператор в $L_2(R^m)$. Пусть χ – описанная выше функция. Составим выражение

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left((H-\lambda)f,\left(-\chi\frac{2n}{r+n}\chi D\right)f\right)=\\&=\left\|\frac{\sqrt{n}}{r+n}\chi f\right\|^2+\lambda\left\|\frac{\sqrt{n}}{r+n}D\chi f\right\|^2-\left(\sum V_\alpha f,\chi\frac{2n}{r+n}\chi Df\right)+\ldots\end{aligned}\tag{13}$$

Слагаемое $\left(\sum V_\alpha f,\chi\frac{2n}{r+n}\chi Df\right)$ представим в виде $\left((1+r)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\chi\sum V_\alpha f,\right.$ $\left.(1+r)^{\frac{-1-\varepsilon}{2}}\frac{2n}{r+n}\chi Df\right)$. Тогда слева и справа в скалярном произведении стоят H -гладкие операторы. Из невыписанных явно слагаемых в (13) наибольшую сложность представляют те, что возникли из коммутации χ с угловой частью лапласиана. Символически изобразим их таким образом

$$\left(\frac{n}{r^2}f,\chi'\frac{n}{r+n}\chi Df\right)\sim\left(\frac{n\sqrt{n}}{r^2}\chi' f,\frac{\sqrt{n}}{r+n}D\chi f\right).$$

Именно здесь скажется замена $\frac{r}{r+n}$ на $\frac{n}{r+n}$. Учитывая слагаемое $\left\|\frac{\sqrt{n}}{r+n}D\chi f\right\|^2$ и H -гладкость $\frac{n\sqrt{n}}{r^2}\chi$ получаем с помощью леммы 4 H -гладкость $\frac{\sqrt{n}}{r+n}\chi$, а следовательно и H -гладкость $\frac{\sqrt{n}}{r}\chi$. При $\lambda<0$ достаточно воспользоваться формулой

$$((H-\lambda)f,\chi f)=\int\chi\left((\nabla f)^2-\lambda f^2\right)-\frac{1}{2}\Delta\chi f^2+\chi\sum V_\alpha f\Big)dx.$$

Литература

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т.4. М.: Мир, 1982.
2. Яфаев Д.Р. Замечания о спектральной теории для оператора Шредингера многочастичного типа. – В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VI. – Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1984, т.133, с.277–298.
3. Mourre E. Operateurs conjugués et propriétés de propagations (II) – Marseille CNRS, 1982.
4. Sigal I.M., Soffer A. N-Particle Scattering Problem: Asymptotic Completeness for Short-Range Systems. California, 1985.
5. Deift P., Simon B. A time-dependent approach to the completeness of multiparticle quantum systems. – Comm.Pure

Appl.Math., 1977, v.30, p.573-583.

A.F.Vakulenko. On quasi-commutator estimates in spectral theory.

For two or three-particle Schrödinger operator H the positivity of $\mathrm{Re}\,((H-\lambda)f, Af)$ is used to construct H -smooth operators. Asymptotic completeness in the short-range case is proved. The absence of embedded eigenvalues is a byproduct of the method for two particle system.