



Общероссийский математический портал

М.-Г. М. Зильпукаров, Г. Г. Малинецкий, А. В. Подлазов, Применение метода русел и джокеров для описания динамики системы Розенцвейга–Макартура, *Матем. моделирование*, 2007, том 19, номер 6, 3–15

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.235.145.252

3 ноября 2024 г., 22:33:01



**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РУСЕЛ И ДЖОКЕРОВ  
ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ РОЗЕНЦВЕЙГА-МАКАРТУРА**

© 2007 г. М.-Г.М. Зулпукаров, Г.Г. Малинецкий<sup>1</sup>, А.В. Подлазов<sup>2</sup>

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва  
125047, Москва, Миусская пл. 4, телефон (495)978-1314,  
e-mail: [vreemd@mail.ru](mailto:vreemd@mail.ru), <sup>1</sup>[GMalin@Keldysh.ru](mailto:GMalin@Keldysh.ru), <sup>2</sup>[Tiger@Keldysh.ru](mailto:Tiger@Keldysh.ru).

В настоящее время методы и идеи нелинейной динамики и асимптотического анализа широко применяются при исследовании биологических систем. В статье рассматривается система Розенцвейга–Макартура, представляющая собой модель простой биологической системы – тритрофной пищевой цепи, и отличающаяся большим разнообразием динамических режимов. Используется новая техника численного моделирования – метод русел и джокеров. Данный метод основан на выделении посредством асимптотического анализа областей с большим горизонтом прогноза и малым числом существенных переменных (называемых руслами), и областей плохой предсказуемости (джокеров). Далее, для русел и джокеров используются различающиеся алгоритмы моделирования. Показано, что обсуждаемый подход позволяет получить удовлетворительное качественное и количественное представление о динамике модели.

**USING THE CHANNELS AND JOKERS METHOD  
FOR THE ROSENZWEIG–MACARTHUR SYSTEM DYNAMICS DESCRIPTION**

*M.-G.M. Zulpukarov, G.G. Malinetski<sup>1</sup>, A.V. Podlazov<sup>2</sup>*

Keldysh Institute for Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow  
4 Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia,  
phone: 7(495)978-1314, e-mail: [vreemd@mail.ru](mailto:vreemd@mail.ru), <sup>1</sup>[GMalin@Keldysh.ru](mailto:GMalin@Keldysh.ru), <sup>2</sup>[Tiger@Keldysh.ru](mailto:Tiger@Keldysh.ru).

Nowadays, methods of nonlinear dynamics and asymptotical analysis are widely used in biological systems research. This article reviews the Rosenzweig-MacArthur system, a model of the simple biological system (a tritrophic food chain). This system is remarkable for the multiplicity of its dynamical modes. A new technique of the numerical modeling, the channels and jokers method, is used. The latter method is based on detection (by means of asymptotical analysis) of regions with wide horizon of predictability and small number of essential variables (which regions are called channels), and regions of poor predictability (jokers). Then, distinct numerical modelling algorithms are used for channels and jokers separately. It is shown, that the technique proposed lets obtain both good quantitative and qualitative idea of the model dynamics

**Введение**

Известно, что аппарат нелинейной динамики при решении задач, связанных с построением предсказывающей модели на основе известной истории поведения объекта, наиболее эффективен в случаях, когда размерность модели невелика [1]. Задачи большой размерности можно решать, используя тот факт, что фазовое пространство динамических систем зачастую неоднородно: состояние системы в определённых областях фазового пространства может быть с приемлемой точностью охарактеризовано небольшим количеством переменных, описывающих проекцию малой размерности. Прочие переменные могут быть подчинены переменным проекции (называемым параметрами порядка) и/или несущественны с точки зрения описания системы в рамках задачи.

В общем случае, проекции малой размерности могут использоваться в ограниченных областях фазового пространства, причём в разных областях проекции необязательно одинаковы. Такие области было предложено называть *руслами* [1].

Области, в которых построение проекции малой размерности с последующим применением методов нелинейной динамики не представляется возможным, именуется *джокерами*. Поведение системы, находящейся в области джокера, отличается сложностью, непредсказуемостью и разнообразием, вследствие чего приходится использовать вероятностные методы и/или простые приближённые правила, определяемые эмпирически либо из общих соображений. Таким образом, решение задачи с помощью русел и джокеров представляет собой комбинацию динамических и статистических методов.

К системам, исследуемым подобным образом, в частности, можно отнести автономные системы с чередующейся медленно-быстрой динамикой: лазеры, сложные пищевые цепи в биологии, колебательные химические реакции, и др. При построении моделей таких систем руслами можно считать области медленной динамики (и, что ещё более важно, хорошей предсказуемости), а джокерами, соответственно, быстрой.

Примером систем, демонстрирующих медленно-быструю динамику, являются сингулярно возмущённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений, иерархизированные по характерным временам изменения переменных в силу наличия малых параметров при одной или более производных. Как известно, решение такой системы, в соответствии с теоремой Тихонова [2-4], стремится через некоторое характерное время, определяемое величиной малого параметра, к решению вырожденной системы, в которой малый параметр взят равным нулю (что приводит к замене соответствующего дифференциального уравнения алгебраическим, и, фактически, к понижению размерности системы).

Таким образом, совершенно естественно выбрать в качестве проекции малой размерности вырожденную систему. Тогда конфигурация области медленного движения (и, следовательно, русла) будет определяться устойчивыми участками гиперповерхности, заданной алгебраическим уравнением в вырожденной системе [5].

Целью данной работы является анализ поведения математической модели тритрофной пищевой цепи (то есть, системы популяций трёх видов, образующих простейшую трёхуровневую пищевую пирамиду) методом русел и джокеров [6]. Исследуемая система Розенцвейга-Макартура представляет собой модификацию модели Вольтерра «хищник-жертва» [7] для случая трёх видов – жертвы, хищника и суперхищника (пожирателя хищников), учитывающую дополнительные факторы – внутривидовую конкуренцию жертв за ресурсы и насыщение хищников и суперхищников. Как правило, в таких тритрофных цепях имеется три различных характерных времени изменения численности популяций: скорость изменения численности жертв наибольшая, а суперхищников – наименьшая.

Исследуемая система, несмотря на внешнюю простоту и небольшую размерность, в зависимости от значений параметров может демонстрировать весьма сложное поведение, в частности, хаос различных типов [8-12]. Нас интересует режим с наличием хаотического аттрактора шильниковского типа [13-17]. В модели Розенцвейга-Макартура шильниковский хаос имеет место, когда скорости изменения численности хищников и суперхищников совпадают по порядку величины [9].

Поверхность, заданная алгебраическим уравнением в вырожденной системе Розенцвейга-Макартура, имеет две различные устойчивые (притягивающие) области. Таким образом, можно выделить два русла, движение вдоль каждого из которых описывается соответствующей системой двух дифференциальных уравнений с двумя переменными. Третья переменная является скрытой и управляет переключением между режимами движения. Её действие моделируется двумя джокерами, имеющими вид отрезков, при достижении которых изображающей точкой происходит переключение.

Рассматривая эту модель, мы имеем в виду не только конкретные результаты с позиций теории динамических систем и математического моделирования экологических процессов, но и прообраз более общей и типичной ситуации. В этой ситуации доступной для измерения является лишь часть переменных, в то время как другая, играющая существенную роль, недоступна.

### Русла и джокеры

Понимание, на основе которого можно принимать решения, дают только простые модели. Идеальный случай – построение простой проекции реальности для всей совокупности решаемых задач. На практике, чаще приходится выбирать проекцию для какого-то конкретного вида задач, оговаривая область её применения – определять русла. Иными словами, вместо единой модели получается ряд моделей для разных ситуаций.

Примерная схема возникновения неоднородностей фазового пространства в виде русел дана в [1]. Предположим, существует область фазового пространства, где исходную функцию, задающую фазовую скорость (или отображение), можно представить в виде суммы какой-либо более простой функции (например, меньшей размерности), и некоторого малого члена. Тогда, пренебрегая малым членом, получают уравнение движения на русле. Конфигурация русла, соответственно, определяется условием малости отброшенного члена.

Джокер представляет собой правило или алгоритм, определяющий поведение объекта на некотором подмножестве фазового пространства (*области джокера*), в котором неопределённость в поведении объекта резко возрастает. При попадании изображающей точки в область джокера, происходит его *срабатывание* – задействуется соответствующее правило (алгоритм).

В зависимости от специфики рассматриваемой задачи используемые джокеры могут различаться. Например, можно выделить следующие типы джокеров.

*Джокер первого рода* мгновенно переводит систему в определённую точку фазового пространства. Типичный случай, соответствующий срабатыванию такого джокера – быстрое разрушение системы (предполагается, что детали процесса разрушения нас не интересуют, либо их моделирование затруднено). Например, постепенное развитие экосистемы заканчивается экологической катастрофой.

*Джокер второго рода* при срабатывании с вероятностью  $p_1$  переводит систему в некоторую точку фазового пространства  $A$ , и с вероятностью  $p_2$  – в точку  $B$ .

*Джокер третьего рода* переводит систему в точку некоторой области фазового пространства в соответствии с заданным законом распределения вероятности. Этот джокер можно рассматривать как обобщение джокеров первого и второго рода.

В [18] описываются джокеры на одномерных отображениях и вводится иная классификация. Например, джокер первого рода называется *точечным*, второго рода – *двухточечным*, а третьего рода – *непрерывным*. Также рассматриваются следующие более интересные и сложные джокеры со свойствами, представляющими собой различные комбинации свойств непрерывного и точечного джокеров.

*Мерцающий непрерывный джокер* представляет собой непрерывный джокер, срабатывающий с некоторой, отличной от 1, вероятностью. То есть при попадании изображающей точки в область джокера, следующий шаг либо (с вероятностью  $p_1$ ) делается в соответствии с уравнением русла, либо (с вероятностью  $p_2$ ) в соответствии с правилом непрерывного джокера. Данный тип джокеров хорошо подходит для имитации явления перемежаемости.

*Мерцающий точечный джокер* есть точечный джокер, который срабатывает аналогично мерцающему непрерывному джокеру, в соответствии с вероятностным правилом.

*Выбор между точечным и непрерывным джокерами*: в соответствии с вероятностным правилом определяется выбор режима срабатывания – точечный или непрерывный.

В [18] на примере логистического отображения рассмотрено влияние различного вида джокеров на поведение системы. В частности, непрерывный джокер может сделать поведение

полностью хаотическим. Последовательно уменьшая его область, можно сначала добиться режима, похожего на перемежаемость, а затем – «сбоя цикла».

Действие мерцающего непрерывного джокера аналогично. Его преимущество заключается в том, что можно добиваться различной степени хаотичности за счёт варьирования вероятности срабатывания, не меняя при этом размеров области джокера.

Точечный джокер действует прямо противоположным образом, подавляя хаос. Основным типом движения на отображении с таким джокером является цикл. Мерцающий точечный джокер порождает циклические участки, соответствующие действию точечного джокера, перемежку с участками, соответствующими невозмущённому движению. Результатом действия двухточечного джокера является стохастическое чередование различных циклических участков.

Режим выбора между точечным и непрерывным джокером является наиболее сложным. Такой джокер в общем случае нельзя отнести ни к порождающим, ни к подавляющим хаос. Совместное действие эффектов хаотизации и упорядочивания может породить новый порядок, сильно отличающийся от исходного. Анализируя его, может быть проще получить представление о параметрах джокера, чем о системе без него.

Следует отметить, что если изучать систему не с целью прогнозирования её поведения, а с точки зрения генерации системой новой информации, то области джокеров представляют больший интерес, чем области русел. Действительно, пока поведение системы предсказуемо, неопределённость поведения зависит от уровня шума и величины ляпуновских показателей (которые в совокупности определяют горизонт прогноза), и потому не может быстро уменьшаться.

### Поиск русел

Рассмотрим один из возможных способов получения простой приближённой модели исходной системы. Пусть, например, дана некоторая система, в фазовом пространстве которой выделяются области медленной и быстрой динамики. Допустим, движение в пределах области медленной динамики может быть приближённо описано с помощью некоторой более простой системы (например, системы с меньшей размерностью). Тогда для описания движения в области быстрой динамики (а также в области перехода от медленного движения к быстрому), где данная простая система неприменима, можно воспользоваться джокером. Область медленного движения, соответственно, будет руслом.

Заметим, что в ряде случаев для приближённого описания быстрого движения можно подобрать ещё более простую систему. Тем не менее, не следует использовать джокер для описания медленного движения. Действительно, как правило, можно утверждать, что основное время система проводит в «медленных» областях, проходя «быстрые» за короткие промежутки времени. При этом, предпочтительнее, чтобы в течение основного времени была задействована динамическая часть модели.

Итак, требуется решить три подзадачи:

- выделение областей медленной динамики;
- подбор простой модели для медленной динамики;
- подбор джокера для описания сложного поведения.

Обсудим более подробно первую из них. Медленно-быструю динамику демонстрируют, в частности, сингулярно возмущённые системы обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  – вектора,  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$  – вектор-функции, а  $\varepsilon$  – параметр,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При выполнении условий теоремы Тихонова [2-4], для приближённого (тем более точного, чем меньше  $\varepsilon$ ) определения областей медленного движения достаточно использования самого простого метода – записи уравнения вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0, \tag{2}$$

то есть, фактически, выполнения предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Области медленного движения будут устойчивые области гиперповерхности (2), то есть, те её участки, для которых отрицательны действительные части всех собственных значений матрицы

$$J_{\mathbf{x}} f(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\mathbf{A}) \right)$$

– якобиана функции  $f$ , если считать  $\mathbf{y}$  параметром [5].

Далее будем ссылаться на описанный метод как на *сингулярное приближение (singular approximation)* [19]). Среди прочих методов определения областей медленной динамики [19-21] он выделяется своей простотой, и потому представляется целесообразным воспользоваться именно им.

### Пример исследования методом русел и джокеров

Рассмотрим пример применения метода русел и джокеров к исследованию системы Розенцвейга-Макартура, представляющей собой модификацию модели Вольтерра «хищник-жертва» [7]. Предполагается наличие трёх взаимодействующих популяций: жертвы, хищника и суперхищника. Популяции ведут себя следующим образом. Численность жертв в отсутствие хищника растёт логистически. Хищники питаются жертвами, причём при истреблении жертв и при размножении хищников учитывается эффект насыщения хищников (увеличение численности жертв, начиная с определённого уровня, не приводит к увеличению их потребления хищниками, используется функция Холлинга II типа [22]). При отсутствии жертв хищники вымирают экспоненциально. Суперхищники существуют за счёт потребления хищников, при этом также учитываются эффекты насыщения и вымирания в отсутствие пищи.

Модель, в её безразмерном виде, представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \zeta \dot{x} = x \left( 1 - x - \frac{y}{\beta_1 + x} \right) \equiv x f(x, y), \\ \dot{y} = y \left( \frac{x}{\beta_1 + x} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) \equiv y g(x, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) \equiv \varepsilon z h(y), \end{cases} \tag{3}$$

где  $x, y, z$  – численности популяций (жертв, хищников и суперхищников, соответственно), а  $\zeta, \varepsilon, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2$  – параметры. Значения всех переменных и всех параметров неотрицательны. Предполагается также выполнение условий

$$\delta_1 < 1, \delta_2 < 2,$$

что означает неперевышение скоростью вымирания соответствующего хищника максимальной скорости его размножения (нарушение условия приводит к вырождению трофической цепи). Кроме того, учитывается гипотеза о различии масштабов времени в трофических системах (*trophic time diversification hypothesis*), согласно которой, скорость размножения тем ниже, чем более высокое положение занимает вид в пищевой иерархии:

$$0 < \zeta \ll 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

В условиях выполнения данной гипотезы система (3) является сингулярно возмущённой.

Система (3) интересна тем, что, в зависимости от значений параметров, демонстрирует большое разнообразие динамических режимов, включая режимы с устойчивыми особыми точ-

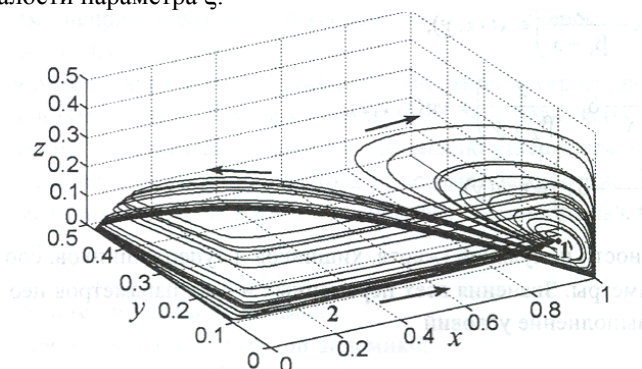
ками, устойчивыми предельными циклами, пачечно-импульсные режимы, а также хаотические режимы различных типов [8-11].

Хаотическая динамика в биологических системах позволяет наглядно продемонстрировать достоинства метода русел и джокеров. Действительно, во-первых, джокеры представляются естественной заменой для участков сложного поведения системы, по крайней мере, в тех случаях, когда нужна простая модель, дающая качественное понимание. Во-вторых, при исследовании, например, глубоководных экосистем не всегда известен полный набор видов (более того, не всегда точно известна роль вида в системе). В этом случае джокеры естественно использовать для описания воздействия скрытых факторов (здесь просматривается аналогия с идеей, характерной для асимптотического анализа [2] – исключением части уравнений системы).

Будем рассматривать один из хаотических режимов системы (3), а именно режим с аттрактором шильниковского типа, который имеет место при выполнении условий теоремы Шильникова о петле сепаратрисы седлофокуса [13-17]. Это означает, что имеется особая точка типа седлофокус, лежащая на гомоклинической фазовой траектории, называемой петлей сепаратрисы седлофокуса, причём скорость ухода от особой точки по неустойчивому направлению превышает скорость приближения по устойчивым направлениям.

Наличие точки седлофокуса  $A_f$  в системе Розенцвейга-Макартура обеспечивается невыполнением гипотезы о различии масштабов времени в трофических системах для пары «хищник-суперхищник» [9], то есть, скорости размножения хищников и суперхищников должны быть сравнимы (параметр  $\varepsilon$  принимает значение порядка единицы). Подобная ситуация характерна для случая, когда массы тел хищника и суперхищника сравнимы. Отметим, что такое соотношение не вполне типично. Однако, в принципе, хищник не обязан быть крупнее жертвы. В качестве наиболее яркого примера можно упомянуть живоглота чёрного (*chiasmodon niger*), способного заглотить добычу с массой в 6–12 раз больше собственной [24].

Скорость ухода (в обратном времени) от особой точки по неустойчивому направлению велика вследствие выполнения гипотезы о различии масштабов времени для пары «жертва-хищник», то есть, малости параметра  $\zeta$ .



**Рис. 1.** Траектории системы Розенцвейга-Макартура в режиме шильниковского хаоса. Цифрой 1 помечен седлофокус, цифрой 2 – петля сепаратрисы седлофокуса. Стрелкой показано направление движения.

Шильниковский хаос в системе Розенцвейга-Макартура (рис.1) можно наблюдать, в частности, при следующих значениях [9] параметров:

$$\zeta=0.05, \varepsilon=1, \beta_1=0.25, \beta_2=0.1, \delta_1=0.2, \delta_2=0.39. \quad (4)$$

Действуя в соответствии с предложенной выше схемой, определим для системы (3) области медленной динамики и уравнения медленного движения, и подберём джокеры, приближённо описывающие поведение системы в областях быстрого движения.

Для определения областей медленной динамики и уравнений медленного движения воспользуемся сингулярным приближением. Уравнение (2) в данном случае совпадает с уравнением нуль-изоклины жертв и определяет множество точек, представляющее собой объединение плоскости  $x=0$  и цилиндрической параболы [8]

$$y = f^{-1}(x, \_) = (1-x)(\beta_1 + x) \tag{5}$$

и имеющее две устойчивые области,  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  (здесь и далее знак « $\_$ » обозначает тот аргумент функции  $f$ , относительно которого решено уравнение (2)). Область  $\Gamma_1$  образована точками правой ветви цилиндрической параболы (5), то есть точками, для которых выполняется неравенство

$$x > \bar{x} \equiv \frac{(1-\beta_1)}{2}, \quad y < \bar{y} \equiv \frac{(1+\beta_1)^2}{4}$$

(точка  $(\bar{x}, \bar{y})^T$  – вершина параболы, представляющей собой проекцию цилиндрической параболы (5) на плоскость  $z=0$ ). Область  $\Gamma_0$  образована точками плоскости  $x=0$ , лежащими выше пересечения плоскости параболой (5), то есть, точками, для которых выполняется неравенство

$$y > y_{tm} \equiv \beta_1$$

(где индекс « $tm$ » означает «transcritical», так как при прохождении точки  $y=y_{tm}$  устойчивость точек плоскости  $x=0$  и точек левой ветви параболы (5) меняется).

Уравнения медленного движения определяются *вырожденной системой* дифференциальных и алгебраических уравнений, представляющей собой исходную систему (3), в которой выполнен предельный переход при  $\zeta \rightarrow 0$ :

$$\begin{cases} 0 = xf(x, y), \\ \dot{y} = yg(x, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon zh(y). \end{cases} \tag{6}$$

Следует отметить, что фазовые траектории данной системы на плоскости  $x=0$  выходят за пределы устойчивой области  $\Gamma_0$ , продолжаясь до так называемой *точки поворота (turning point)*,  $y$ -координата которой обозначается  $y_{spk}$  (так как после прохождения точки поворота происходит скачок («spiking») численности популяции жертв). Значение  $y_{spk}$  определяется интегральным уравнением [8]

$$\int_{y_{spk}}^{\bar{y}} \frac{f(0, y)}{yg(0, y, z)} dy = 0. \tag{7}$$

Линия на плоскости  $x=0$ , образованная точками поворота (они же точки срыва), обозначается  $\Sigma_0$ . Линия  $\Sigma$  в области  $\Gamma_1$ , образованная соответствующими точкам срыва  $\Sigma_0$  точками падения, называется *линией падения (junction line)* и представляет собой проекцию  $\Sigma_0$  на  $\Gamma_1$  параллельно оси  $x$ .

Медленное движение фазовой точки системы (6) на плоскости  $x=0$  можно описать, выполнив соответствующую подстановку:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \left( -\delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = yg(0, y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \varepsilon zh(y). \end{cases} \tag{8}$$



Фазовое пространство полученной системы двумерно, а её траектории показаны на рис.2(а). Поведение системы (8) в области  $y > y_{\text{спк}}$  аналогично поведению исходной системы. Однако, если фазовая точка системы (6), достигнув точки поворота на линии  $\Sigma_0$ , покидает плоскость  $x=0$ , то в более простой системе (8), по понятным причинам, данное явление отсутствует. Следовательно, для его воспроизведения необходимо наличие джокера, далее обозначаемого  $\mathbf{J}_0$ .

Далее, для описания медленного движения фазовой точки системы (6) на поверхности  $\Gamma_1$ , можно использовать следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \left( \frac{f_+^{-1}(\underline{z}, y)}{\beta_1 + f_+^{-1}(\underline{z}, y)} - \delta_1 - \frac{z}{\beta_2 + y} \right) = yg(f_+^{-1}(\underline{z}, y), y, z), \\ \dot{z} = \varepsilon z \left( \frac{y}{\beta_2 + y} - \delta_2 \right) = \varepsilon zh(y), \end{cases} \quad (9)$$

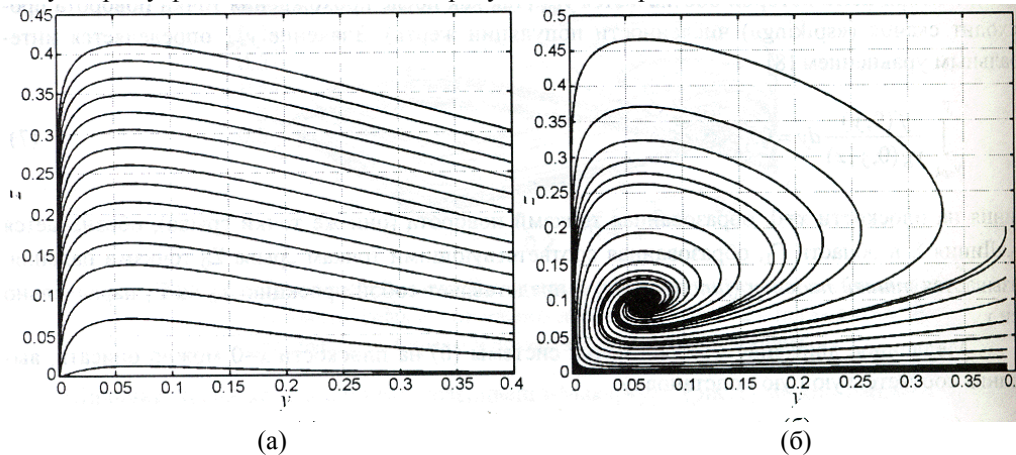
где

$$f_+^{-1}(\underline{z}, y) \equiv +\sqrt{\bar{y} - y} + \bar{x}, \quad y \leq \bar{y}, \quad (10)$$

– то из двух решений уравнения  $f(x, y) = 0$  относительно  $x$ , что соответствует  $\Gamma_1$ . Фазовое пространство системы (9) опять же двумерно, а её траектории показаны на рис.2(б). В частности, можно видеть, что система (9) имеет особую точку  $A'_f = (y_f, z_f)^T$  типа неустойчивый фокус.

Заметим, что выполнение условия возникновения шильниковского хаоса в системе (3) – наличия петли сепаратрисы седлофокуса – обеспечивается прохождением линии падения  $\Sigma$  через соответствующую  $A'_f$  точку  $A_f = (x_f, y_f, z_f)^T$  в области  $\Gamma_1$ .

Можно видеть, что фазовая точка системы (9), удаляясь от  $A'_f$  по спиралевидной траектории, достигает линии  $y = \bar{y}$ . До этого момента поведение системы (9) аналогично поведению исходной системы, то есть, фазовые траектории системы (9) представляют собой проекции фазовых траекторий системы (6) в фазовое пространство системы (9). Далее, фазовая точка системы (6) покидает  $\Gamma_1$  и перемещается на плоскость  $x=0$ ; система же (9) при  $y > \bar{y}$  не определена, так как не определена функция (10). Следовательно, для соответствия поведения упрощённой системы поведению исходной системы, требуется наличие джокера, срабатывание которого соответствует срыву фазовой точки. Введём требуемый джокер и обозначим его  $\mathbf{J}_1$ .



**Рис.2.** Фазовые траектории системы (8), соответствующей области медленного движения в плоскости  $x=0$  (а) и системы (9) в варианте с функцией (10), соответствующей поверхности  $\Gamma_1$  (б) (хорошо заметна особая точка типа неустойчивый фокус). Траектории упрощённой системы (9), в которой функция (10) заменена её первым и нулевым приближениями в точке  $x=x_f, y=y_f$ , выглядят аналогично (б).

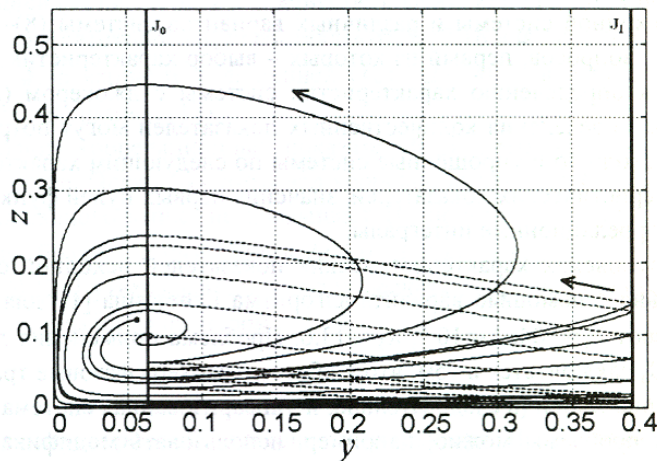
Итак, с учётом сказанного, упрощённая система может быть построена на основе следующих правил. Фазовое пространство системы двумерно, переменными состояниями являются  $y$  и  $z$ . Результат воздействия скрытой переменной  $x$  достигается введением джокеров  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{J}_1$ . Фазовая точка движется в плоскости  $(y,z)$ , подчиняясь, например, системе уравнений (8). Достигнув области джокера  $\mathbf{J}_0$ , фазовая точка начинает движение согласно системе уравнений (9), что соответствует перемещению фазовой точки системы (6) с плоскости  $x=0$  в область  $\Gamma_1$ . Через некоторое время, достигнув области джокера  $\mathbf{J}_1$ , фазовая точка вновь начинает движение согласно системе (8), и так далее.

Фазовые траектории системы (8)– $\mathbf{J}_0$ –(9)– $\mathbf{J}_1$  непрерывны (хотя и не гладки) в точках областей джокеров, поскольку перемещение фазовой точки исходной системы между  $\Gamma_1$  и плоскостью  $x=0$  происходит параллельно оси  $x$ . Задержка фазовой точки в области джокера отсутствует, так как перемещение мгновенно.

Определив поведение (программу срабатывания)  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{J}_1$ , обсудим конфигурацию областей джокеров.

В случае  $\mathbf{J}_1$  выбор вырожденной системы (6) в качестве основы для построения упрощённой системы предопределяет выбор области джокера в виде линии срыва – прямой  $y = \bar{y}$ . Отметим также, что если система (9) может быть задана с начальными условиями вне области определения функции (10), то следует расширить область джокера на полуплоскость  $y \geq \bar{y}$ , и соответствующим образом доопределить правило срабатывания.

Область джокера  $\mathbf{J}_0$  определяется линией  $\Sigma_0$  и, по идее, должна задаваться уравнением (7). Однако, аналитическое решение данного уравнения неизвестно (если вообще существует), поэтому при численном интегрировании системы (8) необходимо использование некоторого дополнительного алгоритма определения координат вхождения фазовой точки в область джокера. Простейший пример такого алгоритма – численное решение уравнения (7) на каждом шаге интегрирования. Последнее неприемлемо затратно, поэтому, предлагается начать с применения джокера с максимально простой конфигурацией. В качестве последней представляется целесообразным использование прямой  $y=y_f$  (рис.3), выбор которой продиктован соображением сохранения такого принципиального свойства системы, как размещение точки фокуса на линии падения (что, собственно, и обеспечивает наличие хаотического режима шильниковского типа).



**Рис.3.** Фазовые траектории системы (8)– $\mathbf{J}_0$ –(9)– $\mathbf{J}_1$  (используется джокер  $\mathbf{J}_0$  с упрощённой конфигурацией в виде прямой  $y=y_f$ ). Джокеры показаны сплошными жирными линиями. Сплошными тонкими линиями обозначены траектории системы (9), пунктирными – системы (8). Стрелками показано направление движения, жирной точкой – начальные условия. В окрестности области джокера  $\mathbf{J}_1$  хорошо заметно изменение типа движения, сопровождающееся нарушением гладкости траектории.

Таким образом, можно представить, что джокеры  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{J}_1$  «сшивают» фазовые пространства двух различных систем. В этом заключается их принципиальное отличие от рассмотренных ранее джокеров, действие которых заключается в перемещении в пределах одного фазового пространства. С учётом особенностей срабатывания и конфигурации, новому джокеру можно присвоить название *джокер типа «шов»*.

Если для данного конечно малого значения параметра  $\zeta$  выбранные простые конфигурации и правила срабатывания джокеров  $\mathbf{J}_0$  и  $\mathbf{J}_1$  не обеспечивают необходимой степени сходства фазовых портретов исходной и упрощённой систем, то следует пересмотреть выбор в сторону усложнения. Например, для джокера  $\mathbf{J}_0$  можно, воспользовавшись данными наблюдений, изменить конфигурацию в соответствии с точным решением уравнения (7), а также правило срабатывания (с учётом того факта, что точка падения при  $\zeta > 0$  не совпадает с точкой срыва в проекции на координатную плоскость  $x=0$ ). В случае джокера  $\mathbf{J}_1$  изменение линии срыва на основе данных наблюдений затруднено тем, что функция (10) не определена в области  $y > \bar{y}$ . Для решения этой проблемы можно, например, вместо решения вырожденной системы использовать асимптотическое приближение более высокого порядка, а также ввести в рассмотрение пограничную часть асимптотики.

Если же упрощённая система, наоборот, хорошо аппроксимирует исходную, то можно попробовать продвинуться по пути дальнейшего упрощения, например, заменив в уравнениях (9) функцию (10) сначала её первым, а затем нулевым приближением в точке  $y=y_f$  (данная точка выбрана по причине того, что положение точки фокуса по отношению к области джокера  $\mathbf{J}_0$  не должно измениться). Первое приближение (уравнение касательной), как несложно показать, имеет вид

$$f_1^{-1}(\_, y) \equiv \frac{1}{-2x_f - \beta_1 + 1} (y - y_f) + x_f, \quad (11)$$

а нулевое приближение, соответственно,

$$f_0^{-1}(\_, y) \equiv x_f. \quad (12)$$

Фазовые траектории системы (9) с приближениями (11) и (12) в целом аналогичны траекториям системы (9) с функцией (10), показанным на рис. 2 (б).

Сравнение исходной системы и различных вариантов системы (8)– $\mathbf{J}_0$ –(9)– $\mathbf{J}_1$  порождает ряд дополнительных вопросов, первый из которых – выбор характеристик для сравнения, а остальные относятся к определению характеристик системы с джокером (в последнем случае стандартные методы определения количественных показателей могут потребовать доработки). Будем сравнивать исходную и упрощённые системы по следующим характеристикам: значения ляпуновских характеристических показателей, значения первых нулей функций автокорреляции переменных  $u$  и  $z$ , корреляционные интегралы.

Значения ляпуновских характеристических показателей исходной системы, определённые экспериментально с помощью варианта алгоритма Бенеттина [1.] для дифференциальных уравнений, составляют  $\lambda_1=0.04$ ,  $\lambda_2=10^{-4}$ ,  $\lambda_3=-13.6$ . Проблема применения данного алгоритма к системе (8)– $\mathbf{J}_0$ –(9)– $\mathbf{J}_1$  заключается в том, что в области джокера фазовые траектории не являются гладкими, и матрица Якоби (а следовательно, и линеаризованная система) не определена.

Для решения проблемы можно, например, использовать модификацию варианта алгоритма Бенеттина для отображений (шаг отображения представляет собой интегрирование системы в течение некоторого фиксированного времени  $\Delta t$ ). В этой модификации вместо итераций линеаризованной системы для возмущений относительно начала координат, где возмущения ортонормированы, выполняются итерации исходной системы для возмущений относительно начальных данных, где возмущения ортогонализированы, малы и одинаковы по модулю. Шаг  $\Delta t$  и величина малого возмущения  $r$  подбираются опытным путём, с учётом характерной величины

фазовой скорости  $v$ , таким образом, чтобы  $r$  и произведение  $v \cdot \Delta t$  совпадали по порядку величины. Вблизи области джокера ортогонализация возмущений не выполняется (соответственно, не вычисляется текущая оценка показателей), то есть, для начальных данных и возмущений выполняется несколько итераций отображения подряд. Последнее правило обусловлено тем, что в области джокера траектории системы не являются гладкими, и ортогонализация возмущений приводит к значительным погрешностям.

Значения ляпуновских характеристических показателей системы (8)– $J_0$ –(9)– $J_1$  в варианте с функцией (10), определённые данным методом, составляют  $\lambda_1=0.095$  и  $\lambda_2=0.015$ . Для сравнения, тот же алгоритм, применённый к проекции исходной системы на плоскость  $x=0$ , даёт значения  $\lambda_1=0.09$  и  $\lambda_2=0.02$ . Таким образом, есть основания считать, что исходная система и система русел и джокеров похожи в части «разбегания» траекторий в соответствующей проекции.

Здесь имеет смысл отметить, что для систем, включающих джокеры ранее описанных типов, определение ляпуновских характеристических показателей затруднено или невозможно. Действительно, две сколь угодно близкие траектории, пройдя область джокера, например, третьего рода, могут, следуя вероятностному правилу, мгновенно разойтись на конечное расстояние. Обратный пример: две различные траектории, проходя джокер первого рода, объединяются в одну. Таким образом, при использовании стандартных методов, оценка показателя в первом случае стремится к  $+\infty$ , а во втором – обращается в ноль. Следовательно, необходимо доопределение понятия ляпуновского характеристического показателя для систем с джокером. Возможно, также потребуется интегрировать систему в течение очень долгого времени (достаточно долго, чтобы фазовая точка прошла область джокера столько раз, сколько необходимо для сбора статистики), что может быть весьма затратно.

Джокер типа «шов», в отличие от предыдущих, сохраняет единственность решения и его непрерывность по начальным данным, что даёт возможность использовать общепринятое определение ляпуновского характеристического показателя и позволяет избежать чрезмерных затрат вычислительных ресурсов.

Для переменных  $y$  и  $z$  в исходной системе и в системе с джокерами были вычислены значения первых нулей функций автокорреляции. Для переменной  $y$  последние составляют  $\Delta t=5.00$  для исходной системы,  $\Delta t=4.48$  для системы (8)– $J_0$ –(9)– $J_1$  в варианте с функцией (10),  $\Delta t=4.62$  – в варианте с функцией (11) и  $\Delta t=4.54$  – в варианте с функцией (12). Для переменной  $z$  значения первых нулей функций автокорреляции составляют:  $\Delta t=7.16$  для исходной системы,  $\Delta t=6.95$  для системы (8)– $J_0$ –(9)– $J_1$  в варианте с функцией (10),  $\Delta t=7.40$  – в варианте с функцией (11) и  $\Delta t=7.40$  – в варианте с функцией (12).

Для определения корреляционных показателей [5] необходим массив некоррелированных точек на аттракторе. Поскольку интервал корреляции для каждой из фазовых переменных, как следует из написанного выше, не превышает 10, постольку точки, принадлежащие одной фазовой траектории, брались с интервалом  $\Delta t=10$ . Вопрос о количестве точек был решён следующим образом. В [23] утверждается, что для расчета корреляционного показателя с точностью в 5% необходима выборка размером

$$N > 42^M,$$

где  $M$  – целая часть хаусдорфовой размерности аттрактора. В предположении, что ни для исходной системы, ни для системы (8)– $J_0$ –(9)– $J_1$   $M$  не превышает 2, минимально необходимое количество некоррелированных точек было оценено как  $42^2=1764$ . С учётом этой оценки корреляционный показатель  $\nu$  рассчитывался для исходной системы по 10000 некоррелированных точек, и составил  $\nu=1.69$ , а для упрощённой системы – по 4000 точек, и составил  $\nu=1.4$  при использовании функции (10),  $\nu=1.65$  при использовании функции (11), и, наконец,  $\nu=1.72$  при использовании функции (12).

### Заключение

Итак, на основе сингулярно возмущённой системы нелинейных дифференциальных уравнений можно построить упрощённую систему пониженной размерности – систему русел и джокеров. Целесообразна замена джокерами участков поведения, не объяснимого простой моделью (причиной чего может быть проявление воздействия скрытых или подчинённых переменных). В рассмотренном случае предлагается выбор участков медленного движения в качестве русел, а участков быстрого движения – в качестве джокеров.

Показано, что при понижении размерности системы для воспроизведения эффекта действия скрытой переменной (как правило, имеющей место в случаях, когда моделируемая система плохо формализуема, или часть её показателей недоступна для измерения) можно использовать джокер нового типа – «шов», при срабатывании не перемещающий (или не только перемещающий) фазовую точку, но меняющий закон её движения. Важной особенностью джокеров типа «шов» является то, что для системы с джокером данного типа могут быть использованы стандартные (возможно, с небольшими изменениями) методы определения количественных характеристик хаоса (в частности, ляпуновских характеристических показателей).

Сравнение исходной системы и различных вариантов системы русел и джокеров проводилось по следующим характеристикам: значения ляпуновских характеристических показателей, первые нули функций автокорреляции численностей хищников и суперхищников, корреляционные интегралы. По результатам сравнения, в общем и целом, можно считать, что система русел и джокеров аппроксимирует исходную систему с приемлемой точностью. Предложенный метод представляется пригодным для построения упрощённой предсказывающей модели.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: УРСС, 2002.
2. А.Н. Тихонов. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Избранные труды А.Н. Тихонова. – М.: МАКС Пресс, 2001.
3. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1990.
4. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980.
5. Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975.
6. М.-Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов. Метод русел и джокеров на примере исследования системы Розенцвейга-Макартура. – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2006, препринт № 21.
7. Г.Ю. Ризниченко. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
8. B. Deng. Food chain chaos due to junction-fold point // Chaos, 2001, v.11, №3.
9. B. Deng, G. Hines. Food chain chaos due to Shilnikov's orbit // Chaos, 2002, v.12, №3.
10. B. Deng, G. Hines. Food chain chaos due to transcritical point // Chaos, 2003, v.13, № 2.
11. B. Deng. Food chain chaos with canard explosion // Chaos, 2004, v.14, № 4.
12. М.-Г.М. Зульпукаров, Г.Г. Малинецкий. Шильниковский хаос в системе Розенцвейга-Макартура. . – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2006, препринт № 45.
13. Л.П. Шильников. Об одном случае существования счётного множества периодических движений // Доклады АН СССР, 1965, том 160, №3.
14. Л.П. Шильников. О существовании счётного множества периодических движений в четырёхмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса // Доклады АН СССР, 1967, т.172, №1.
15. Л.П. Шильников. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // Математический сборник, 1970, т.81, №1.
16. С.П. Кузнецов. Динамический хаос. – М.: Физматгиз, 2001.
17. Дж. Гукенхеймер, П. Холмс. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – М.: УРСС, 2002.

18. Л.В. Белайчук, Г.Г. Малинецкий. Прорезки джокеров на одномерных отображениях – М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1997, препр. № 24.
19. B. Rossetto, T. Lenzini, S. Ramdani, G. Suchey. Slow-Fast Autonomous Dynamical Systems // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1998, v.8, №11.
20. S. Ramdani, B. Rossetto, L.O. Chua, R. Lozi. Slow Manifolds of Some Chaotic Systems with Applications to Laser Systems // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, v.10, №12.
21. B. Rossetto, J.-M. Ginoux. Singular Manifolds and Attractors Structure in Predator-Prey models. Université du Sud Toulon-Var, France.  
[rossetto.univ-tln.fr/Recents/Singular%20Manifolds.pdf](http://rossetto.univ-tln.fr/Recents/Singular%20Manifolds.pdf).
22. А.Д. Базыкин. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985.
23. Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992.
24. В.Е. Соколов (ред.). Жизнь животных. – М.: Просвещение, 1988.

Поступила в редакцию 29.05.06