центра круга. Выберем число $a \in (0;1)$ такое, что если $h \le a$, то длина хорды больше 4. Ясно, что такое a найдется.

Теперь опишем стратегию преступника. Пока он в большей части, он должен находиться в середине граничной дуги этой части (назовем это стандартным положением). Если часть становится меньшей, преступник должен придерживаться той же стратегии до момента, пока h не станет равным a. При этом расстояние от преступника до хорды будет все время больше 1, так что он не коснется ни одного полицейского.

В момент, когда h станет равным a, преступник должен «мгновенно» переместиться в бóльшую часть, заняв в ней стандартное положение. Это будет возможно, так как проекции полицейских на хорду – один или два отрезка суммарной длины не больше 4 м, а значит, на хорде найдется «дыра» – свободный отрезок ненулевой длины. Точечный преступник сможет проскочить в бóльшую часть через эту дыру.

5. Пусть K_1, K_2 – середины A_1C_1 и A_2C_2, L_1, L_2 – середины A_1B_1 и A_2B_2, I, I_A – центры вписанной и вневписанной окружностей, а A_1', A_2' – диаметрально противоположные точки для A_1, A_2 на этих окружностях.

Заметим, что прямая BI параллельна C_2A_2 (они перпендикулярны BI_A), прямая CI параллельна B_2A_2 (они перпендикулярны CI_A), прямая K_1L_1 параллельна K_2L_2 (каждая из них параллельна B_1C_1 и B_2C_2 соответственно как средняя линия, а последние прямые параллельны в силу равнобедренности треугольников C_1AB_1 и C_2AB_2). Значит, треугольники K_1L_1I и $K_2L_2A_2$, образованные данными прямыми, гомотетичны, откуда прямые K_1K_2, L_1L_2 и IA_2 пересекаются в одной точке.

Аналогичным образом получаем, что треугольники $K_1L_1A_1$ и $K_2L_2I_A$ гомотетичны, откуда прямые K_1K_2, L_1L_2 и A_1I_A пересекаются в одной точке. Значит, все четыре прямые K_1K_2, L_1L_2, IA_2 и A_1I_A пересекаются в одной точке, т.е. достаточно рассмотреть точку пересечения последних двух прямых.

Поскольку вписанная и вневписанная окружности гомотетичны с центром в A, то при этой гомотетии точка A_1' переходит в A_2, а точка A_1 – в A_2'. Так как A_2I является медианой в треугольнике $A_2A_1A_2'$, то она является и медианой в подобном треугольнике A_2HA. Отсюда получаем, что A_2I проходит через середину высоты AH. Аналогично, рассматривая медиану A_1I_A в треугольнике $A_1A_2A_2'$, получаем, что она тоже проходит через середину AH.

6. Назовем *осью симметрии* многочлена вертикальную ось симметрии его графика. Заметим, что если $x = a$ является осью симметрии многочлена $R(x)$, то она является осью симметрии и любого многочлена вида $Q(R(x))$.

Предположим, что f и h не совпадают. Поскольку f и h – приведенные квадратные трехчлены с пересекающимися графиками, у них разные оси симметрии. Значит, у многочлена $T(x) = f(g(h(x))) = h(g(f(x)))$ есть две различные оси симметрии. Но этого, очевидно, не может быть, так как иначе график T имел бы пересечение с какой-то горизонтальной прямой в бесконечном числе точек, и значит, совпадал бы с этой прямой, но степень T больше нуля.

LXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

6 класс

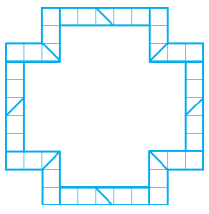

Рис. 3

1. Разрезать можно так, как показано на рисунке 3.

5. Максимальное количество «кусков» равно семи, например: ПИРОГ = 95207, КУСОК = 13601.

Перепишем условие как пример на умножение: ПИРОГ = КУСОК$\cdot n$, где n – количество «кусков». Если «кусков» 10 или больше, то правая часть превысит 100000.

Невозможно решение и для девяти «кусков»: если число ПИРОГ = КУСОК$\cdot$9 пятизначное, то К = 1. Но тогда ПИРОГ и начинается, и кончается на девятку.

Пусть КУСОК$\cdot$8 = ПИРОГ. Так как в слове ПИРОГ все буквы разные, то ПИРОГ $\le$ 98765, а тогда КУСОК $\le$ $\le$ 98765/8 = 12345,675, т.е. КУСОК $\le$ 12345. Значит, К = 1 и Г = 8. Буква О обозначает цифру, произведение которой на 8 оканчивается на нее же. Это может быть только ноль. Поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а У $\le$ 2 и С $\le$ 3, то У = 2 и С = 3. Значит, КУСОК = 12301. Но это число не подходит, так как 12301$\cdot$8 = 98408, а в 98408 цифры повторяются.

6. Попугай, Лев, Жираф, Шакал.

7 класс

1. Наибольшее число, которое можно получить, это 573618492 (рис. 4).

1	8	4
6	3	9
5	7	2

Рис. 4

4. Либо за 24, либо за 72 минуты.

5. «В этой фразе 1/2 всех цифр – цифры 1, доли цифр 2 и 5 одинаковы и равны 1/5, а доля всех остальных цифр составляет 1/10» (или «…доли цифр 0 и 2 одинаковы…» или «…доли цифр 0 и 5 одинаковы…»).

8 класс

1. Например, 2012 = 353 + 553 + 553 + 553.

2. 8 прыжков.

За 8 прыжков кузнечик может посетить все отмеченные точки, если пройдет по маршруту $FABGQEDCH$, где Q – вершина равнобедренного треугольника с основанием GE и стороной 5 (рис. 5).

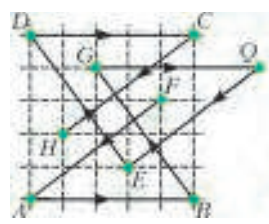

Рис. 5

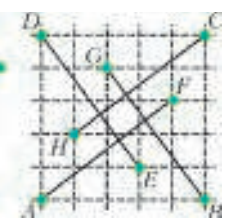

Рис. 6

Чтобы за семь или меньше прыжков посетить все восемь отмеченных точек, он должен начать в одной из отмеченных точек и каждым прыжком попадать в новую отмеченную точку. Но на расстоянии 5 от каждой из точек E, F, G, H есть только одна отмеченная точка (рис. 6), а хотя бы одна из этих точек не является ни начальной, ни конечной – противоречие.

4. Пусть L – середина отрезка CD тогда $ML \perp CD$, так как ML – медиана равнобедренного треугольника CMD. В треугольнике KLB имеем $LM \perp BK$, так как $BK \parallel CD$, и $BM \perp KL$, так как $KL \parallel AD$. Значит, M – ортоцентр треугольника KLB, т.е. $KM \perp BL$. Но $BL \parallel KD$, поэтому $KM \perp KD$.

5. Приведем дроби x, y, z к виду с наименьшим общим знаменателем: $x = \frac{a}{D}$, $y = \frac{b}{D}$, $z = \frac{c}{D}$. Тогда НОД$(a,b,c,D) = 1$.

Число $x^2 + y^2 + z = \frac{a^2 + b^2 + cD}{D^2}$ целое, поэтому $a^2 + b^2$ делится на D. Аналогично, на D делятся $b^2 + c^2$ и $a^2 + c^2$. Поэтому $2c^2 = (b^2 + c^2) + (a^2 + c^2) - (a^2 + b^2)$ также делится на D. Аналогично, $2a^2 \vdots D$, $2b^2 \vdots D$.

Если у D есть простой делитель $p > 2$, то из делимости $2a^2$ на D следует, что a делится на p; то же верно для b и c, и НОД$(a,b,c,D) \ge p > 1$ – противоречие. Значит, D – степень двойки. Если $D \vdots 4$, то $a,b,c \vdots 2$ – снова противоречие. Зна-

чит, $D = 1$ или $D = 2$. Поэтому $2x = \frac{2a}{D}$ – целое.

6. Для любых.

Если в клетке стоит единица, то ровно в одной из соседних написана единица. Значит, единицы образуют прямоугольники 1×2. При этом никакие два таких прямоугольника не граничат по стороне и не пересекаются.

Клетка, не принадлежащая таким прямоугольникам, не может граничить ровно с одним прямоугольником.

Пусть в таблице $m\times n$ прямоугольники 1×2 расположены так, что 1) они не граничат по стороне и не пересекаются; 2) если клетка не принадлежит ни одному из этих прямоугольников, то она граничит *не* с одним прямоугольником. Тогда в прямоугольники можно поставить единицы, а во все остальные клетки – количество соседних с ними единиц. Если m и n дают остаток 1 при делении на 3, прямоугольники можно расположить так, как изображено на рисунке 7.

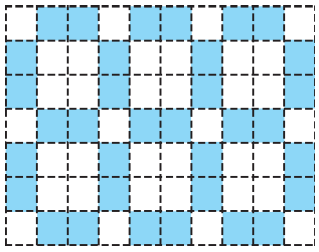

Рис. 7. Прямоугольники 1×2 в таблице (3k + 1)×(3l + 1)

Добавляя подходящие полоски ширины 5, мы сможем заполнить любые таблицы $m\times n$, где $m,n > 14$.

9 класс

1. 6 провинций.

Упорядочим провинции по возрастанию населения. Как в первой, так и во второй провинции живет не больше 7% населения. Тогда в третьей живет меньше 14%, в четвертой – меньше 21%, в пятой – меньше 35%. Значит, в первых пяти провинциях живет меньше 84% населения страны Далекой.

Пример с 6 провинциями: в них может жить 7%, 7%, 11%, 16%, 25%, 34% населения.

6. а) 74; б) $n - 1$, если $n > 3$; 3, если $n = 2$ или $n = 3$.

Обсудим решение пункта б), так как пункт а) – его частный случай.

Если в турнире участвуют две или три команды, то минимальный разрыв будет составлять три очка.

В случае $n > 3$ команд разрыв между первым и последним местом не меньше $n - 1$. Докажем это по индукции.

Существует турнир 4 команд с минимальным разрывом 3 очка. Именно, пусть первая команда выиграла у второй, вторая у четвертой, а остальные встречи закончились вничью.

Пусть при некотором $n > 3$ можно построить таблицу, в которой первому месту соответствует $2n - 3$ очка, а последнему – $n - 2$ очка. Покажем, как это сделать для $n + 1$.

Разобьем команды на тройки по количеству набранных очков: первая тройка – команды с $2n - 3$, $2n - 4$, $2n - 5$ очками, и т.д. Добавим еще одну команду.

При $n = 3k + 1$ пусть новая команда выигрывает у первой команды и проигрывает второй и третьей, и аналогично с другими тройками. Команда, занимавшая последнее место, пусть сыграет с новой командой вничью.

При $n = 3k + 2$ пусть команды из k троек играют с новой командой аналогично предыдущему случаю. Команда, занимавшая последнее место, выигрывает у новой команды, а предпоследняя играет с ней вничью.

При $n = 3k$ новая команда аналогично играет с первыми $k - 1$ тройками, у нее будет $n - 3$ очка. У последних трех команд будет n, $n - 1$, $n - 2$ очков соответственно. Команда с $n - 1$ очками выигрывает у новой, команда с n очками проигрывает, команда с $n - 2$ очками играет с ней вничью. Тогда у новой команды будет $n + 1$ очко. Отсюда следует утверждение индукции.

10 класс

1. –30.

Пусть трехчлен имеет вид $ax^2 + bx + c$, а его корни равны m и n. По теореме Виета $c = amn$. Поэтому одно из пяти чисел на доске делилось по крайней мере на три других числа.

На доске осталась лишь одна пара чисел, одно из которых делится на другое: 2 и 4. Значит, было стерто число c.

Применив еще раз теорему Виета, получим $b = -a(m + n)$, а значит, b делится на a. Поэтому $a = 2$, $b = 4$, числа 3 и –5 – корни, а $c = amn = 2\cdot 3\cdot(-5) = -30$.

3. Можно. Пример приведен на рисунке 8.

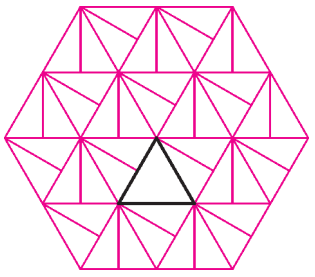

Рис. 8

4. Отметим груши X и Y с самой маленькой и с самой большой массами. Отсортируем груши по массе: по часовой стрелке от X до Y и отдельно – против часовой стрелки от X до Y. Тогда массы любых двух соседних по-прежнему отличаются не более чем на 1 г.

Расположим груши в один ряд по возрастанию массы. Рассмотрим произвольную грушу Z из этого ряда, отличную от Y. Если есть хотя бы две груши тяжелее Z, то обязательно найдутся как минимум две груши, которые тяжелее Z не более чем на 1 г: одна из них была соседней с Z после сортировки, вторая будет соседней с Z, если перенести Z в другую часть круга.

Выложим по часовой стрелке от X до Y груши с нечетных мест ряда по возрастанию массы, а против часовой стрелки от X до Y – остальные груши. Условие про массы двух соседних груш сохранилось в силу доказанного. Теперь мы получим требуемое, если, начиная с груши X и идя против часовой стрелки, будем класть грушу в пакет вместе с противоположной и выкладывать эти пакеты последовательно по кругу.

6. $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Обозначим наш граф $G = (V, E)$, где V – его вершины, а E – ребра. Минимальное число цветов $\chi(G)$, в которые можно правильно раскрасить вершины, называется *хроматическим числом графа*.

Обозначим через $\alpha(G)$ размер одного из самых больших множеств вершин графа, которые попарно не соединены ребрами. Легко понять, что $\chi(G) \ge \frac{|V|}{\alpha(G)} = \frac{C_n^3}{\alpha(G)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6\alpha(G)}$. Остается проверить, что $\alpha(G) \le n$.

Пусть даны вершины $M_1,\ldots,M_s$, которые попарно не соединены ребрами. Заменим их векторами $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_s$ с координатами 0 и 1: i-я координата вектора $\vec{x}_j$ равна 1, если $i \in M_j$, и равна 0 в противном случае. Тогда условие $|M_i \cap M_j| \ne 1$ равносильно условию $(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \ne 1$. Нетрудно видеть, что векторы $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_s$ с указанным свойством линейно независимы. Значит, их не больше n.

11 класс, первый день

2. Графики функций $y = 2a + \frac{1}{x-b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x-d}$ центрально симметричны относительно точки с координатами $\left(\frac{b+d}{2}, a+c\right)$ и, следовательно, имеют ровно одну общую точку тогда и только тогда, когда $2a + \frac{1}{x-b} = 2c + \frac{1}{x-d} = a + c$ при $x = \frac{b+d}{2}$. Это условие эквивалентно равенству $(a-c)(b-d) = 2$.

Но аналогичное верно и для второй пары графиков.

3. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Если $\angle C = 90^\circ$, то H совпадает с C и $AB = 2R$. Тогда $AH + BH = AC + BC > AB = 2R$ по неравенству треугольника. Если $\angle C < 90^\circ$, то треугольник остроугольный, а точки O и H лежат внутри него. Покажем, что точка O находится внутри или на границе треугольника AHB. Действительно, $\angle AOB = 2\angle C$, $\angle HAB = 90^\circ - \angle B \geq 90^\circ - \angle C = \angle OAB$, аналогично, $\angle HBA \geq \angle OBA$, и, следовательно, лучи AO и BO пересекаются внутри или на границе треугольника ABC.
Пусть P – точка пересечения луча AO с отрезком BH. Тогда $AH + HP \geq AP$ и $OP + PB \geq BO$, откуда $AH + HP + OP + PB \geq AP + BO$ и $AH + BH = AH + HP + PB \geq AP + BO - OP = AO + BO = 2R$.
Аналогично разбирается случай, когда $\angle C > 90^\circ$.

4. а) Пусть А – один из пришедших на собрание людей, k – количество его знакомых. Из них можно составить $\frac{k(k-1)}{2}$ пар. Каждой паре сопоставим ее второго общего знакомого. Так как у него ровно два общих знакомых с А, то он не может быть сопоставлен другой паре знакомых А. Но каждый из пришедших на собрание, кроме самого А, имеет с ним ровно двух общих знакомых и, значит, был сопоставлен какой-либо паре. Отсюда $\frac{k(k-1)}{2} = n - 1$. Для данного n может существовать только одно такое натуральное k.
б) Пусть $n = 16$. Присвоим каждому из 16 человек индивидуальный номер, состоящий из двух необязательно различных цифр k и l из набора $\{1,2,3,4\}$. Будем считать, что человек с номером kl знаком с человеком, номер которого mp, тогда и только тогда, когда либо $k = m$, либо $l = p$. Тогда любые два человека имеют ровно двух общих знакомых.

5. Пусть a_1, a_2, a_3, … – неубывающая последовательность натуральных чисел. Для $k \geq 2$ положим $S_k = a_1 + \ldots + a_{k-1}$, и пусть $S_1 = 0$.
Утверждение: *чтобы любое натуральное число представлялось в виде суммы различных членов последовательности $\{a_k\}$, необходимо и достаточно выполнение для любого k неравенства $a_k \leq S_k + 1$.*
Доказать это можно по индукции.
Применим утверждение к последовательности $\{a_k\}$, состоящей из членов геометрических прогрессий 1, 3, 3^2, 3^3, …, 1, 4, 4^2, 4^3, … и 1, 5, 5^2, 5^3, …, расположенных в порядке неубывания.
Неравенство из условия леммы для $k = 1, 2, 3$, выполнено.
Пусть для $k > 3$ сумма S_k состоит ровно из n членов первой геометрической прогрессии, из m – второй и из $l = k - 1 - n - m$ – третьей. Тогда следующее число последовательности a_k равно минимальному из чисел $3^n, 4^m, 5^l$. Имеем

$$S_k = \sum_{j=0}^{n-1} 3^j + \sum_{j=0}^{m-1} 4^j + \sum_{j=0}^{l-1} 5^j = \frac{3^n - 1}{2} + \frac{4^m - 1}{3} + \frac{5^l - 1}{4} \geq$$
$$\geq \left(\min\left(3^n, 4^m, 5^l\right) - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \min\left(3^n, 4^m, 5^l\right) - 1 = a_k - 1.$$

11 класс, второй день

1. 19.
Пусть исходная последовательность имела вид $n+1$, $n+2$, … …, $n+m$, а после приписывания справа двух цифр к каждому члену получилась последовательность $(l+1)^2$, $(l+2)^2$, … …, $(l+m)^2$. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ выполнены неравенства $100(n+k) \leq (l+k)^2 \leq 100(n+k) + 99$. Прибавим к каждой из частей выражение $50^2 - 100(l+k)$, воспользуемся равенством $(l+k)^2 - 100(l+k) + 50^2 = (k+l-50)^2$ и положим $p = 50^2 + 100(n-l)$. Полученные неравенства при $p \geq 1$ приводятся к виду $\sqrt{p} \leq |k+l-50| \leq \sqrt{p+99}$, и значения всех выражений $k + l - 50$ при $k = 1, 2, \ldots, m$ принадлежат либо отрезку $\left[-\sqrt{p+99}; -\sqrt{p}\right]$, либо отрезку $\left[\sqrt{p}; \sqrt{p+99}\right]$. Каждый из этих отрезков содержит не более $\sqrt{p+99} - \sqrt{p} + 1$ целых чисел. Следовательно, при таких p получаем $m \leq \sqrt{p+99} - \sqrt{p} + 1 = \frac{99}{\sqrt{p+99} + \sqrt{p}} + 1 \leq 10$.
При $p \leq 0$ получаем неравенства $-\sqrt{p+99} \leq |k+l-50| \leq \sqrt{p+99}$. Тогда значения всех выражений $k + l - 50$ при $k = 1, 2, \ldots, m$ принадлежат отрезку $\left[-\sqrt{p+99}; \sqrt{p+99}\right]$. Этот отрезок содержит нечетное число целых чисел, не превосходящее $2\sqrt{p+99} + 1 < 21$. Следовательно, при таких p получаем $m \leq 19$.
Примером требуемой последовательности из 19 членов являются числа 16, 17, …, 34, которые после приписывания справа двух цифр преобразуются в последовательность $1681 = 41^2$, $1764 = 42^2$, …, $3481 = 59^2$.

2. Да.
Так как каждый из пяти прожекторов испускает лазерный луч под одним из двух острых углов α или β к площадке, то найдутся по крайней мере три прожектора, которые испускают луч под одним и тем же углом, скажем α.
Пусть эти три прожектора, расположенные в точках A, B и C, повернуты так, что их лучи пересеклись в одной точке D. Пусть H – основание перпендикуляра из D к плоскости ABC. Треугольники ADH, BDH и CDH равны по общему катету DH и острому углу α. Следовательно, $AH = BH = CH$, точка H является центром описанной окружности треугольника ABC и $DH = AH \operatorname{tg}\alpha$. Значит, в полупространстве над горизонтальной площадкой существует лишь одна точка, в которой могут пересечься лучи этих трех прожекторов.
Рассмотрим прожектор, отличный от этих трех. По условию все четыре прожектора можно повернуть так, чтобы их лучи пересекались в одной точке, а это может быть лишь точка D. Таким же образом можно повернуть и пятый прожектор.

3. При $n = 1$ на доске после действий учителя останутся x и $(1-x)$, и утверждение задачи выполнено.
Пусть для некоторого n утверждение задачи верно, и пусть учитель сложил первые k полученных выражений $\left(2 \leq k \leq 2^{n+1}\right)$. После проделанных им операций получится многочлен вида

$$x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x + x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot (1-x) + x \cdot x \cdot \ldots \cdot (1-x) \cdot x + \ldots$$

Если $k \leq 2^n$, то первый множитель в каждом из этих k слагаемых равен x. Вынеся его за скобку, получим в скобках сумму, в которой каждое слагаемое является произведением n множителей вида x и $(1-x)$. По предположению индукции, эта сумма – постоянная или возрастающая на отрезке $[0;1]$ функция от x. Это будет верно и после умножения на x.
Если $k = 2^{n+1}$, то учитель сложил все выражения на доске. Получается многочлен, тождественно равный единице.
Если $2^n < k < 2^{n+1}$, то обозначим полученную учителем функцию $f(x)$ и рассмотрим сумму выражений, им не использованных. Она равна $1 - f(x)$. Первый множитель в каждом из слагаемом равен $(1-x)$. Вынесем его за скобку, слагаемые в скобках расположим в обратном порядке и положим $t = 1 - x$. Получаем выражение $t \cdot t \cdot \ldots \cdot t \cdot t + t \cdot t \cdot \ldots \cdot t \cdot (1-t) + t \cdot t \cdot \ldots$ $\ldots \cdot (1-t) \cdot t + \ldots$ По предположению индукции, это постоянная или возрастающая на отрезке $[0;1]$ функция от t, т.е. от $(1-x)$. После умножения на $(1-x)$ получаем убывающую на отрезке $[0;1]$ функцию от x. Но эта функция равна $1 - f(x)$.

4. 2 : 3.

Для каждой точки P скатерти обозначим через $f(P)$, $g(P)$ и $h(P)$ соответственно точки, симметричные ей относительно одной из двух линий, соединяющих середины противоположных сторон скатерти, второй такой линии и той ее диагонали, при перегибе через которую видимая площадь пятен становится равна S_1. Пусть $k(P)$ – точка, симметричная точке P относительно второй диагонали скатерти. Тогда $h(k(P))$ и $f(g(P))$ совпадают с точкой, симметричной точке P относительно центра скатерти. Поэтому точки $k(P)$ и $h(f(g(P)))$ также совпадают.

Предположим, что $S_1 < \frac{2S}{3}$. Тогда площадь множества всех точек Q, для которых $P = g(Q)$ и Q покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > \frac{2S}{3}$. Аналогично, площадь множества всех точек Q, для которых Q и $R = f(Q)$ покрыты пятнами, равна $2(S - S_1) > \frac{2S}{3}$. Тогда площадь множества тех точек Q, для которых одновременно выполнены оба условия, должна быть больше чем $\frac{2S}{3} + \frac{2S}{3} - S = \frac{S}{3}$. Значит, и площадь множества всех точек P, для которых P и $R = f(Q) = f(g(P))$ покрыты пятнами, больше чем $\frac{S}{3}$.

Аналогично, площадь множества всех точек P, для которых P и $T = h(R) = h(f(g(P)))$ покрыты пятнами, больше нуля.

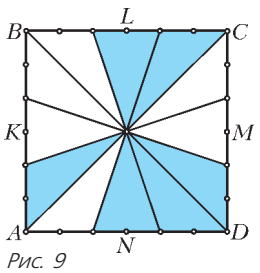

Рис. 9

С другой стороны, $T = h(f(g(P))) = k(P)$. Из условия следует, что площадь множества тех точек P, для которых P и $k(P)$ покрыты пятнами, равна 0 – противоречие.

Пример расположения пятен, где $\frac{S_1}{S} = \frac{2}{3}$, показан на рисунке 9. Стороны квадратной скатерти разделены отмеченными на них точками на 6 равных частей.

5. а) 324.

Пусть k – простое число и

$$n = n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \ldots + n_p k^p = (n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0)_k$$

– k-ичное представление числа n. Покажем, что $S(n,k) = (n_0+1)(n_1+1)\ldots(n_p+1)$. Из этого факта вытекает ответ в пункте а) и доказательство пункта б).

Скажем, что два многочлена $P_n(t)$ и $Q_n(t)$ с целыми коэффициентами сравнимы по модулю k, если сравнимы по модулю k (т.е. дают одинаковый остаток при делении на k) все их коэффициенты при одинаковых степенях. Обозначать это будем так: $P_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)$. Очевидно, что

1) если $P_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)$ и $T_n(t) \overset{(k)}{=} S_n(t)$, то $P_n(t)T_n(t) \overset{(k)}{=} Q_n(t)S_n(t)$;

2) если p – простое число, то C_p^m делится на p при любом $m = 1,\ldots,p-1$ и C_l^m не делится на p при любом $l < p$, $m = 0,\ldots,l$.

В дальнейшем k – простое число. Нетрудно показать по индукции, что для любого m выполнено равенство

$$(t+1)^{k^m} \overset{(k)}{=} t^{k^m} + 1.$$

Теперь докажем основное утверждение индукцией по числу разрядов в k-ичной записи числа n. Если $0 \le n \le k-1$, утверждение очевидно. Пусть оно верно, если n представимо в виде $n = n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \ldots + n_{p-1} k^{p-1}$, $0 \le n_i \le k-1$.

Рассмотрим число $N = n_0 + n_1 k + n_2 k^2 + \ldots + n_{p-1} k^{p-1} + n_p k^p = n + n_p k^p$, $1 \le n_p \le k-1$. Имеем

$$(t+1)^N = (t+1)^n \left((t+1)^{k^p}\right)^{n_p} \overset{(k)}{=} (t+1)^n \left(t^{k^p}+1\right)^{n_p} = \sum_{j=0}^{n_p} C_{n_p}^j t^{k^p j} (t+1)^n.$$

Ни один из коэффициентов $C_{n_p}^j$ не делится на k и (в силу того, что $n < k^p$) у многочленов $t^{k^p j}(t+1)^n$ при разных j нет одинаковых степеней t. Поэтому число коэффициентов многочлена $(t+1)^N$, которые не делятся на k, равно числу таких коэффициентов у $(t+1)^n$, умноженному на $n_p + 1$, что и требовалось.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $t = 120$ с. **2.** $s = 1{,}125$ км.
3. Через 1,2 мин или через 6 мин. **4.** $\rho = 8500$ кг/м^3.

8 класс

1. $l = 6$ км. **2.** $l = 30$ см. **3.** $m = 400$ г, $V = 100$ мл.
4. Растает не весь лед, уровень воды понизится приблизительно на 4,6 мм.

9 класс

1. $v_р = 1$ м/с (при малых x приведенный в условии график приближенно совпадает с прямой $y = 2x$), $a = 0{,}02$ м/с^2.
2. $m_А = 63$ кг, $m_л = 2700$ кг. **3.** $t_В = 8$ мин.
4. 12 (после двух последовательных отражений угол между лучом и вертикалью увеличивается на $2\varphi = 14°$).

10 класс

1. $\beta = \pm\arccos\left(\frac{\mu g(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}(a+\mu g)}\right) + \operatorname{arctg}\mu$, $\beta_1 \approx 45°$, $\beta_2 \approx -34°$ (сила направлена вниз под углом к горизонту, но при этом заклинивания бруска не происходит).

2. $x_{max} \approx 10$ см. **3.** $F_в = \frac{\rho g V_0}{1 + (\rho g H)/(p_0 - p_н)}$.

4. $t_в = t + \frac{10\rho_л(t + \lambda/c_в)}{27\rho_в - 10\rho_л} \approx 70$ °C. **5.** $P = \frac{qU}{t} \approx 43$ мВт.

11 класс

1. $Q = \frac{32}{7}\nu R T_0 \approx 10{,}6$ кДж (газ получает тепло на линейном участке цикла от точки *1* до точки *3*, в которой объем составляет 5 минимальных объемов, а давление – 3 минимальных давлений).

2. $\frac{E}{B} = \frac{v}{\sqrt{2}}$; вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка, вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости рисунка и составляет со скоростью электрона угол $45°$ или $135°$.
3. $n > \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. $v_п = 14{,}5$ м/с $= 52{,}2$ км/ч, $l = 100$ м.
2. $\eta = 80\%$. **3.** $m = 18$ г. **4.** $t = 24$ с.

9 класс

1. $a_M = g\frac{M - 3m}{M + 9m}$, $a_m = -3a_M = -3g\frac{M - 3m}{M + 9m}$.