

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Suvorov, Geometric interpretation of propositional formulas, *Num. Meth. Prog.*, 2003, Volume 4, Issue 3, 28–33

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

March 18, 2025, 06:48:07



УДК 510.662

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

В. В. Суворов<sup>1</sup>

Излагается метод логического анализа, основывающийся на геометрической интерпретации пропозициональных формул. Логическая формула представляется в виде единичного гиперкуба в ортогональном базисе с размерностью, равной местности формулы. Показывается, что анализ сечений куба по простым визуальным критериям позволяет достоверно выделять логические аксиомы. Обсуждается возможность построения в вычислительной среде инструментальных средств для выполнения истинностных оценок формул по зрительным критериям.

**1. Введение.** Разработка математических методов для создания систем искусственного интеллекта на базе высокопроизводительных вычислительных устройств является актуальной и, вместе с тем, трудноосуществимой задачей. Можно констатировать, что использование суперкомпьютеров для решения задач проектирования, метеорологии, расшифровки генома человека и других проектов, масштабных по содержательной постановке и требуемым вычислительным ресурсам, связано, главным образом, с выполнением огромного объема рутинных вычислительных действий. Наряду с этим следует отметить, что эффективность компьютерных средств массового распространения для решения задач (научно-технических, в сфере бизнеса и в повседневной жизни) обеспечивается в наибольшей степени средствами визуализации информации и остенсивного способа манипулирования объектами, т.е. путем непосредственного целостного восприятия картины и выбора альтернативного варианта действия.

Существенно то, что зрение является не только аппаратом восприятия информации, не только производит предварительную обработку и кодирование информации, посылаемой в отделы мозга, но и обеспечивает принятие эффективных решений в реальном масштабе времени. Прямой, не опосредствованный логикой доступ к информации и актуальное нахождение в едином поле зрения многих компонентов приводят к эффективному синтезу решения в форме “узрения” результата. Глаз, точнее сетчатка (латинское название — retina), по своему строению — высокоорганизованная нервная ткань, которая, по выражению Гельмгольца, является частью мозга, вынесенной на периферию. Зрение это не только оптико-нейронный преобразователь (“перцептрон”), но и инструмент для выполнения интеллектуальных действий, формирующийся в процессах реальной деятельности субъекта в сложноорганизованной среде внешнего мира.

Настоящая работа представляет результат в области математической логики. Она демонстрирует, вместе с тем, эффективность визуального метода решения задач не только для собственно зрения, но и для реализации в вычислительной среде таких базовых свойств зрения, как а) прямой доступ к высокоинформативным объектам с разной степенью их детализации, б) одновременное представление в поле зрения совокупности сложных компонентов, из которых должно следовать решение, в) непосредственное приложение к сложным информационным объектам интегральных критериев содержательной оценки. Проводимое ниже рассмотрение демонстрирует эффективность визуального метода решения сложных логических задач на конкретном математическом содержании. В общем плане здесь разрабатывается подход к построению интеллектуальных инструментальных средств высокого уровня на базе высокопроизводительных вычислительных устройств.

Геометрическая интерпретация структуры формул математической логики основывается на введении пространственных координат для каждого аргумента формулы. При этом решается задача применения к информационному объекту интегрального критерия, который в обычном представлении есть непосредственное видение в реальности определенного пространственного расположения объектов — акт “узрения”. Примерами таких действий являются визуальное различение скрещивающихся либо пересекающихся прямых или, что имеет прямое отношение к решаемой задаче, фиксация факта прохождения секущей плоскости через помеченные вершины пространственной решетки. Вводится многомерный ортогональный базис. Размерность пространства равна количеству аргументов в формуле, точнее, местности формулы. Изображение для естественного зрения ограничено тремя измерениями физического пространства, что соответствует логической формуле с тремя аргументами. Интегральный критерий применим,

<sup>1</sup> Научно-исследовательский вычислительный центр, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992, Москва; e-mail: svv@srcc.msu.ru

однако, и к большому числу измерений — для формул с четырьмя и более аргументами. Важно при этом то, что

- имеется возможность строить реальное изображение, позволяющее выполнять интерактивный визуальный анализ формул с четырьмя-пятью аргументами; это имеет значение для целей обучения и для исследовательской работы;

- при программной эмуляции интегрального критерия частные критерии, следующие из геометрической интерпретации, позволяют сделать процесс решения более эффективным, чем при дедуктивном или модельном анализе;

- частичная реализация интегрального критерия осуществима на основе нейросетевых технологий;

- дальнейшие исследования могут показать экономическую целесообразность создания специализированных микросхем, более адекватных решаемым задачам, чем нейросетевые структуры.

Геометрическая интерпретация приложима к многомерным и неклассическим логикам. Возникает, прежде всего, наглядная интерпретация для интуиционистских логик. Различные аксиоматики приводят к различающимся заполнениям координатного пространства единицами (истина) и нулями (ложь) в узлах пространственных решеток. Решетки логик, построенные по критерию сравнения множества выводимых формул, т.е. в результате замыкания систем аксиом путем присоединения следствий, получают здесь представление в виде гиперпространственных решеток истинностных значений. Последние не гомеоморфны решеткам логик ввиду различия топологий, но они изоморфны ввиду взаимно однозначного соответствия каждого представления одному и тому же множеству логических формул.

**2. Представление логических функций в координатной плоскости.** Логические функции в традиционных обозначениях представляют содержательную интерпретацию таблиц истинности.

$(a1, a2)$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$	$f_{13}$	$f_{14}$	$f_{15}$	$f_{16}$
00	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\perp$	$\uparrow$	$>$	$\neg a2$	$<$	$\neg a1$	$\neq$	$ $	$\wedge$	$\leftrightarrow$	$a1$	$\leftarrow$	$a2$	$\rightarrow$	$\vee$	$\top$
	0															1

На таблице в левом столбце помещены комбинации значений аргументов бинарных логических функций, а правее представлены последовательно 16 функций  $f_1, \dots, f_{16}$ , соответствующие распределениям истинностных значений функций для всевозможных комбинаций значений аргументов в порядке возрастания кодов. В нижней строке приведены обозначения, соответствующие содержательной интерпретации логических функций (здесь ‘|’ — штрих Шеффера, ‘ $\uparrow$ ’ — стрелка Пирса). На рис. 1 показана геометрическая интерпретация для базисных логических функций. На каждой диаграмме изображены оси координат  $a1$  и  $a2$  соответственно для первого и второго аргументов функций. Четыре точки в вершинах квадрата соответствуют значениям координат  $\{00, 10, 01, 11\}$ . Зачерненные точки означают, что при данных значениях аргументов (координат) значение функции равно 1, незачерненные точки — значение функции равно 0.

От диаграмм на рис. 1 можно перейти к геометрической интерпретации формул на рис. 2. Пусть  $f_n(a1, a2)$  — общее обозначение  $n$ -й функции. Тогда, например, для  $n = 14$  (импликация) можно указать несколько конкретных формул, некоторые из которых тривиальны:

- полная четырехточечная диаграмма реализует  $f_{14}$  в форме  $(a1 \rightarrow a2)$ ;

- диагональ  $a2 = a1$  означает прямую зависимость второго аргумента от первого; подстановка  $a2 = a1$  в исходную формулу дает  $(a1 \rightarrow a1)$ ;

- диагональ  $a2 = \neg a1$  означает инверсную зависимость второго аргумента от первого; подстановка  $a2 = \neg a1$  в исходную формулу дает  $(a1 \rightarrow \neg a1)$ ;

- сторона квадрата  $a2 = 0$  соответствует  $(a1 \rightarrow 0)$ ;

- взятие точки графика  $a1 = 1, a2 = 0$  соответствует  $(0 \rightarrow 1)$ .

Аналогичным образом строятся формулы, соответствующие другим сторонам и вершинам квадрата. Примеры, иллюстрирующие выбранные зависимости, показаны на рис. 2. более темным цветом.

Сужение  $f_{14}$  до конкретной формулы означает переход к графикам в четырехточечном пространстве значений. В то время как функции  $f_1, \dots, f_{16}$  являются все попарно различными, результаты их сужений могут совпадать. Каждая конкретная формула означает здесь выделение подпространства путем выполнения определенного вида сечения. В свою очередь, построение сечения происходит путем введения зависимости для аргументов, являющихся в общем случае независимыми.

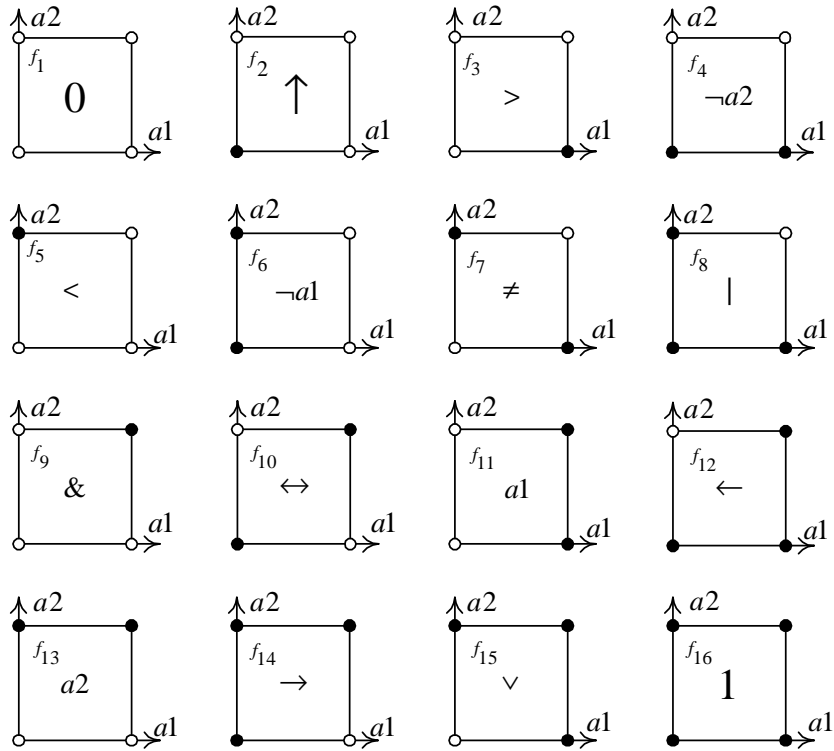


Рис. 1. Изображение логических функций на координатной плоскости

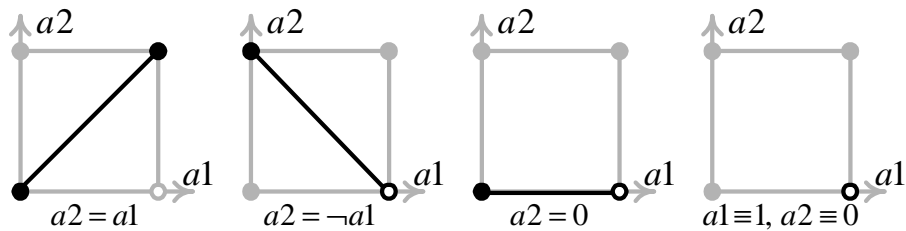


Рис. 2. Графики логических формул

**3. Геометрический способ получения тавтологий.** Пространством для структуры формулы с тремя аргументами является трехмерный единичный куб. На рис. 3 приведена диаграмма для формул  $(a1 \wedge a2) \vee a3$  и  $(a1 \wedge a2) \rightarrow a3$ .

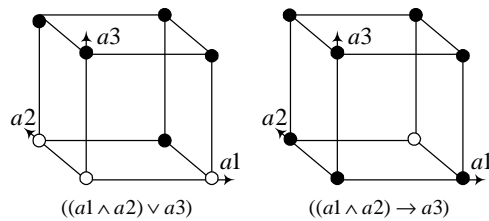


Рис. 3. Трехкоординатные логические формулы

Независимо от структуры формулы в смысле входящих в нее операторов и способов группирования геометрический образ формулы с тремя аргументами имеет форму куба. Различие относится к распределению истинностных значений функции: зачерненные точки — значение 1, незачерненные — 0. В формуле каждый аргумент может а) иметь фиксированное значение (быть константой) или б) быть пе-

ременной, принимающей значения на множестве значений  $\{0, 1\}$ ; в свою очередь, аргумент-переменная может в) изменяться независимо от других аргументов, г) находиться в прямой зависимости от другого аргумента  $a2 = a1$  или д) находиться в инверсной зависимости —  $a2 = \neg a1$ . Альтернативы в каждом случае взаимоисключающие. Постоянное значение аргумента означает фиксацию подпространства, сохраняющего структуру исходного пространства в его значащей (“объемной”) части. Пространство для произвольного значения аргументов (а также любое его подпространство) имеет форму единичного гиперкуба. По мере усложнения формулы увеличивается размерность пространства, но в каждом случае оно сохраняет форму единичного гиперкуба. Как уже сказано, конкретные формулы получаются в результате введения зависимости для независимых аргументов общей формулы, и это в геометрическом представлении означает построение сечения. На примере трехмерного случая можно зафиксировать, что свойство линейности для суперпозиции функций означает, что зависимость для аргументов не изменяется при достраивании формулы. Отсюда, в частности, следует, что не может реализоваться сечение треугольной формы, показанное на рис. 4, но возможны лишь прямоугольные сечения, проходящие через вершины, расположенные симметрично относительно осей симметрии куба.

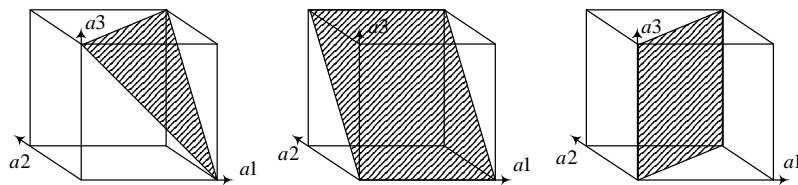


Рис. 4. Логические ограничения на сечения

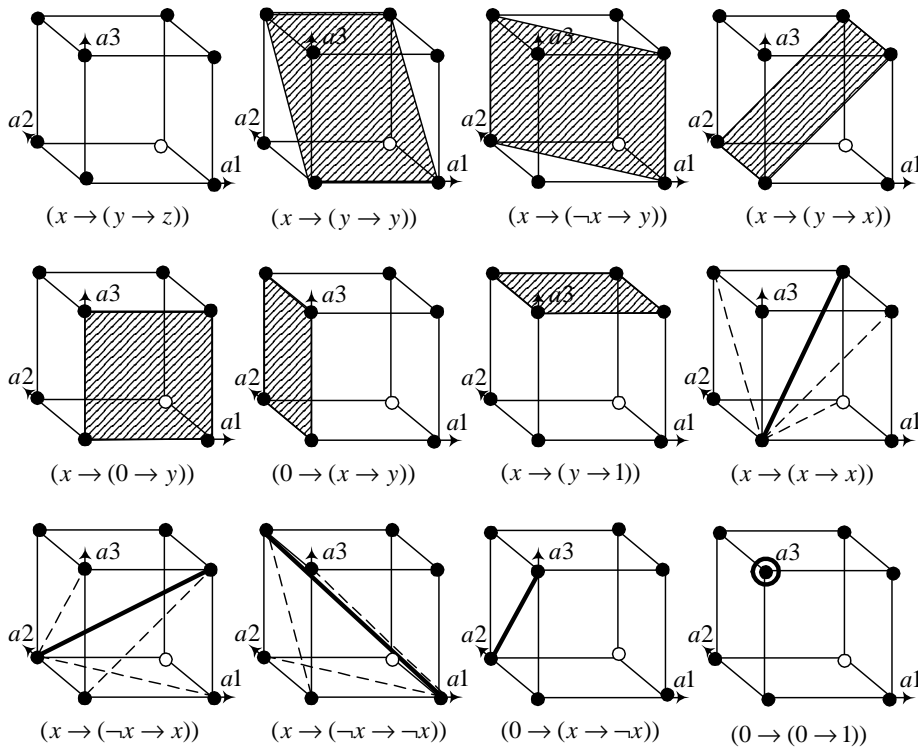


Рис. 5. Геометрическое построение логических тавтологий

Для анализа трехмерных диаграмм обратимся, например, к формуле  $(a1 \rightarrow (a2 \rightarrow a3))$ . На рис. 5 приведены графический образ исходной формулы и построенные различным способом сечения для тавтологий: двумерные (плоские), одномерные (линейные) и нульмерные (точки). Формулы для остальных рисунков строятся по аналогичным соображениям. В формулах под рисунками переменные  $a1, a2$  и  $a1$

переобозначены через  $x$ ,  $y$  и  $z$ ; кроме того, выполнены подстановки в соответствии с зависимостями аргументов:

- $(x \rightarrow (y \rightarrow z))$  — независимые три аргумента;
- $(x \rightarrow (y \rightarrow y))$  — заштрихованное сечение соответствует  $a3 = a2$ ;
- $(x \rightarrow (\neg x \rightarrow y))$  — заштрихованное сечение соответствует инверсной зависимости  $a2 = \neg a1$ ;
- $(x \rightarrow (y \rightarrow x))$  — заштрихованное сечение соответствует  $a3 = a1$ .

Построение тавтологии означает в геометрической интерпретации действие по определению сечения, не имеющего пересечений с 0-вершинами. Основным результатом проведенного рассмотрения является демонстрация того факта, что заключение на основе визуального анализа означает безошибочное построение логической тавтологии. Все приведенные выше тавтологии получены путем выбора секущих плоскостей, граней, отрезков, соединяющих вершины, либо путем выбора самих вершин по единственному критерию отсутствия в них 0-вершин. В данном примере диаграмма для функции  $(x \rightarrow (y \rightarrow z))$  имеет значение 0 (незачерненный кружок) в точке  $(1, 1, 0)$ . В свою очередь, по результатам анализа тавтологий можно построить аксиоматический базис.

**4. Примеры для системы аксиом.** Приводимый ниже пример иллюстрирует четырех- и пятимерные геометрические объекты, которые соответствуют четырех- и пятиместным пропозициональным формам. Прежде всего примем во внимание, что пространство ограничено двумя значениями по каждому измерению и что каждый пространственный объект является кубом: нульмерным (точка), одномерным (отрезком), двумерным (квадрат), трехмерным (куб),  $n$ -мерным (гиперкуб). На рис. 6 базовая система ортов обозначена полужирным символом  $0$ , штрихом помечены локальные системы для четвертого измерения, индексом 1 отмечены системы для пятого измерения.

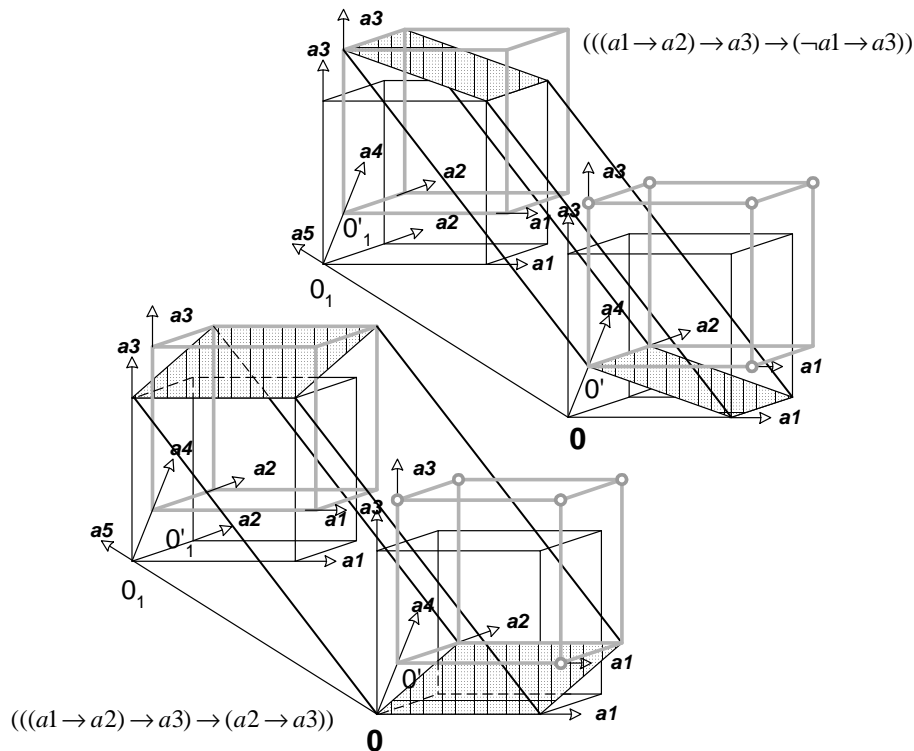


Рис. 6. Диаграммы для аксиом

В качестве примера возьмем первые две аксиомы из импликативной аксиоматики Лукасевича [1]:  $CCCxyzCNxz$ ,  $CCCxyzCyz$ ,  $CCNxzCCyzCCxyz$ . Переходя от польской записи к классической и к используемым здесь обозначениям аргументов, получаем две формулы:

$$F1 = (((a1 \rightarrow a2) \rightarrow a3) \rightarrow (-a1 \rightarrow a3)),$$

$$F2 = (((a1 \rightarrow a2) \rightarrow a3) \rightarrow (a2 \rightarrow a3)).$$

Аксиомы имеют одинаковую скобочную структуру. Разметку вершин выполняем для пропозицио-

нальной формы

$$f = (((a1 \rightarrow a2) \rightarrow a3) \rightarrow (a4 \rightarrow a5)),$$

которая имеет следующую таблицу истинности:

$f(00000)=1$	$f(00100)=1$	$f(00010)=1$	$f(00110)=0$	$f(00001)=1$	$f(00101)=1$	$f(00011)=1$	$f(00111)=1$
$f(10000)=1$	$f(10100)=1$	$f(10010)=0$	$f(10110)=0$	$f(10001)=1$	$f(10101)=1$	$f(10011)=1$	$f(10111)=1$
$f(01000)=1$	$f(01100)=1$	$f(01010)=1$	$f(01110)=0$	$f(01001)=1$	$f(01101)=1$	$f(01011)=1$	$f(01111)=1$
$f(11000)=1$	$f(11100)=1$	$f(11010)=1$	$f(11110)=0$	$f(11001)=1$	$f(11101)=1$	$f(11011)=1$	$f(11111)=1$

С учетом отождествлений  $a4 = \neg a1$ ,  $a5 = a3$  для первой формулы и  $a4 = a2$ ,  $a5 = a3$  — для второй получаем вершины, в которых функции определены следующим образом:

$F1(10000)=1$	$F1(10101)=1$	$F2(00000)=1$	$F2(00101)=1$
$F1(11000)=1$	$F1(11101)=1$	$F2(10000)=1$	$F2(10101)=1$
$F1(00010)=1$	$F1(00111)=1$	$F2(01010)=1$	$F2(01111)=1$
$F1(01010)=1$	$F1(01111)=1$	$F2(11010)=1$	$F2(11111)=1$

На рис. 6 приведены диаграммы для функций. Отмечены только запрещенные вершины (светлые кружочки), т.е. те, для которых значение функции равно 0. В математическом представлении полученные фигуры — два по-разному расположенных трехмерных куба в одной и той же координатной сетке. На рисунке кубы трансформировались в параллелепипеды с заштрихованными верхними и нижними гранями и утолщенными линиями, соединяющими выбранные вершины. Как и ранее, введены обозначения  $x$ ,  $y$  и  $z$  для переменных  $a1$ ,  $a2$  и  $a1$ .

**5. Заключение.** Геометрическая интерпретация пропозициональных формул демонстрирует тот факт, что истинностные свойства формул математической логики, устанавливаемые обычно с применением дедуктивного или модельного методов, могут быть оценены интегрально по критерию, который естественным образом присущ зрительному восприятию. Получение всех тавтологий из пропозициональной формы превращается из процесса вывода или оценивания на модельном множестве в действие выбора того или иного сечения через вершины геометрической фигуры с исключением специальным образом помеченных вершин. Сечение в многомерном пространстве является многомерной гиперплоскостью. В рассмотренном случае построения диаграмм для пятиместных аксиом с тремя различающимися аргументами сечение привело к выделению трехмерного куба из пятимерного пространства. В формульном выражении проведение сечения приводит к введению зависимости для некоторых аргументов. Прямая и инверсная зависимости означают, соответственно, отождествление одного аргумента с другим либо с его отрицанием. Графическое представление двух аксиом с идентичной структурой отражает геометрическое свойство независимости (ортогональности) аксиом. В частности, можно видеть, что инверсная зависимость  $a4$  от  $a1$  приводит к наклону нижнего основания. Критерий визуального анализа может быть смоделирован в вычислительной среде (для этого имеются теоретические предпосылки). Симметрия геометрических фигур для тавтологий позволяет сформулировать формальные критерии, представляющие интегральные характеристики. Таким образом, в вычислительной среде реализуется эвристический принцип поиска решений, что означает получение нетривиального и притом весьма эффективного инструмента искусственного интеллекта. Оптимальной средой для реализации метода является дискретная многослойная микрокристаллическая среда, подобная нейросетевой, но отличающаяся от последней встроеным механизмом адаптации, который в случае нейросетей означает обучение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Slaney J. More proofs of an axiom of Lukasiewicz // J. of Automated Reasoning. 2002. **29**. 59–66.

Поступила в редакцию  
04.04.2003