

УДК 517.9

АСИМПТОТИКА ТРЁХМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

А. А. Ершов

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
ale10919@yandex.ru

Построена асимптотика некоторых трёхмерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра. Знаменатель подынтегральной функции рассмотренных интегралов представляет собой сумму малого параметра и неотрицательной функции, обращающейся в ноль на трёх пересекающихся поверхностях. Такого вида интегралы расходятся при стремлении малого параметра к нулю. Применены метод вычитания особенностей и круговой метод.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, малый параметр, интеграл, метод вычитания особенностей, круговой метод.

Введение

Хорошо известна задача нахождения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. В качестве примера подобных интегралов можно привести хорошо изученные интегралы вида $\int_0^1 f(x)e^{\lambda S(x)} dx$, где λ — большой положительный параметр [1]. Асимптотика различных интегралов описана в ряде работ (например, [2; 3]). Здесь рассматриваются мало изученные до сих пор интегралы вида $\int \Psi(x, \varepsilon) dx$ от функции, которая регулярно зависит от малого параметра ε всюду, кроме некоторого множества (одной или нескольких точек, многообразий и т. п.). Однако при $\varepsilon = 0$ интеграл расходится, и его асимптотика имеет довольно сложный характер.

В настоящей статье находится асимптотическое разложение сингулярных интегралов вида $\iiint_{\omega} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}$, где ω — некоторая окрестность критической точки $(0, 0, 0)$, в которой неотрицательная функция $U(x, y, z)$ и её частные производные обращаются в ноль. В статье рассмотрен неисследованный ранее случай, когда функция $U(x, y, z)$ обращается в ноль на трёх пересекающихся в одной точке плоскостях и имеет специальный вид. Случаи, когда $U(x, y, z)$ равна нулю в точке или на одной поверхности, более просты для рассмотрения [4, гл. 7, § 30]. Отметим, что двумерным аналогом данных исследований является работа [5], в которой были исследованы асимптотические разложения сингулярных интегралов вида $\iint_{\omega} \frac{dx dy}{\varepsilon^2 + U(x, y)}$, где ω — некоторая окрестность критической точки $(0, 0)$, когда функция $U(x, y)$ обращается в ноль на n пересекающихся линиях, а в монографии [4, гл. 1, § 1] была рассмотрена асимптотика двумерных сингулярных интегралов вида $\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y) dx dy}{\varepsilon^2 + xy}$.

Вычисление асимптотики

Рассмотрим интеграл $\int_{-\delta_1-\delta_2-\delta_3}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{-\delta_3}^{\delta_3} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}$, где окрестность $[-\delta_1, \delta_1] \times [-\delta_2, \delta_2] \times [-\delta_3, \delta_3]$ достаточно мала,

$$U(x, y, z) = (z - h_1(x, y))^2 \times (y - h_2(x, z))^2 (x - h_3(y, z))^2 G^2(x, y, z),$$

$G(x, y, z)$ — гладкая функция, не обращающаяся в ноль, а уравнения $z = h_1(x, y)$, $y = h_2(x, z)$ и $x = h_3(y, z)$ задают достаточно гладкие поверхности, пересекающиеся на трёх кривых с общей точкой в начале координат (т. е. $h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = h_3(0, 0) = 0$), причём нормали к этим поверхностям в нуле не являются коллинеарными.

Заметим, что если применить предложенный в [5] метод разбиения области интегрирования на сектора и некоторые выпрямляющие замены, то по существу можно рассмотреть только следующий интеграл:

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2}, \quad (1)$$

где $f(x, y, z) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])$ — некоторая положительная функция. Действительно, возьмём δ_1 , δ_2 и δ_3 малыми настолько, чтобы при $-\delta_3 < x < \delta_3$, $-\delta_2 < y < \delta_2$, $-\delta_1 < z < \delta_1$ выполнялись неравенства

$$-\delta_1 < h_1(x, y) < \delta_1, \quad -\delta_2 < h_2(x, z) < \delta_2, \quad -\delta_3 < h_3(y, z) < \delta_3.$$

Тогда

$$\int_{-\delta_1-\delta_2-\delta_3}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{-\delta_3}^{\delta_3} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)} = S_1 + S_2,$$

$$S_1 = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{-\delta_3}^{h_3(y, z)} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}, \quad S_2 = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{h_3(y, z)}^{\delta_3} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}.$$

Рассмотрим интеграл S_2 , интеграл S_1 исследуется аналогично. Имеем

$$S_2 = \left[\begin{array}{l} x = \xi + h_3(y, z), \\ dx = d\xi \end{array} \right] = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_0^{\delta_3 - h_3(y, z)} \frac{d\xi dy dz}{\varepsilon^2 + U(\xi + h_3(y, z), y, z)} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \xi = (\delta_3 - h_3(y, z))s, \\ d\xi = (\delta_3 - h_3(y, z))ds \end{array} \right] = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_0^1 \frac{f_1(y, z) ds dy dz}{\varepsilon^2 + U_1(s, y, z)},$$

где

$$f_1(y, z) = \delta_3 - h_3(y, z),$$

$$U_1(s, y, z) = U((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), y, z) =$$

$$= s^2 (z - \tilde{h}_1(s, y, z))^2 (y - \tilde{h}_2(s, y, z))^2 G_1^2(s, y, z),$$

$$\tilde{h}_1(s, y, z) = h_1((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), y),$$

$$\tilde{h}_2(s, y, z) = h_2((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), z),$$

$$G_1(s, y, z) = (\delta_3 - h_3(y, z))G((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), y, z).$$

Обозначим через функцию $y = H_2(s, z)$ решение уравнения $y = \tilde{h}_2(s, y, z)$ относительно y и переставим пределы интегрирования. Тогда интеграл S_2 можно представить в виде суммы $S_2 = S_{2,1} + S_{2,2}$, где

$$S_{2,1} = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_{-\delta_2}^{H_2(s,z)} \frac{f_1(y, z) dy ds dz}{\varepsilon^2 + U_1(s, y, z)}, \quad S_{2,2} = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_{H_2(s,z)}^{\delta_2} \frac{f_1(y, z) dy ds dz}{\varepsilon^2 + U_1(s, y, z)}.$$

Интегралы $S_{2,1}$ и $S_{2,2}$ могут исследоваться практически одинаково, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Преобразуем интеграл $S_{2,2}$ следующим образом:

$$S_{2,2} = \left[\begin{array}{l} y = H_2(s, z) + \eta, \\ dy = d\eta \end{array} \right] = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_0^{\delta_2 - H_2(s,z)} \frac{f_1(H_2(s, z) + \eta, z) d\eta ds dz}{\varepsilon^2 + s^2 \eta^2 (z - \tilde{h}_1)^2 \tilde{G}_1^2(s, \eta, z)},$$

где

$$\tilde{G}_1(s, \eta, z) = G_1(s, H_2(s, z) + \eta, z) \cdot \frac{H_2(s, z) + \eta - h_2(s, H_2(s, z) + \eta, z)}{\eta}.$$

После замены

$$\left[\begin{array}{l} \eta = (\delta_2 - H_2(s, z))t, \\ d\eta = (\delta_2 - H_2(s, z))dt \end{array} \right]$$

интеграл $S_{2,2}$ принимает вид

$$S_{2,2} = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_2(s, t, z) dt ds dz}{\varepsilon^2 + U_2(s, t, z)}$$

с функциями

$$f_2(s, t, z) = f_1(t\delta_2 + (1-t)H_2(s, z)),$$

$$U_2(s, t, z) = s^2 \eta^2 (z - \tilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s, z), z))^2 \tilde{G}_1^2(s, (\delta_2 - H_2(s, z))t, z).$$

В свою очередь интеграл $S_{2,2}$ может быть разбит на сумму двух интегралов $S_{2,2,1} + S_{2,2,2}$, где

$$S_{2,2,1} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\delta_1}^{H_1(s,t)} \frac{f_2(s, t, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + U_2(s, t, z)}, \quad S_{2,2,2} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{H_1(s,t)}^{\delta_1} \frac{f_2(s, t, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + U_2(s, t, z)}.$$

Здесь функция $z = H_1(s, t)$ — решение уравнения $z = \tilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s, z), z)$.

Каждый из интегралов, $S_{2,2,1}$ и $S_{2,2,2}$, аналогичными заменами может быть приведён к интегралу вида

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_3(s, t, \tau) d\tau dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 \tau^2 G_3^2(s, t, \tau)}.$$

Теперь нужно избавиться от функции $G_3(s, t, \tau)$ в знаменателе. Для этого сделаем ряд замен, аналогичных заменам, проведённым в двумерном случае [5]:

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_3(s, t, \tau) d\tau dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 \tau^2 G_3^2(s, t, \tau)} = \left[\begin{array}{l} \zeta = \tau G_3(s, t, \tau) = F(s, t, \tau), \\ \tau = F^{-1}(s, t, \zeta) \end{array} \right] = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{G_3(s, t, 1)} \frac{f_3(s, t, F^{-1}(s, t, \zeta)) d\zeta dt ds}{F'_\tau(s, t, F^{-1}(s, t, \zeta)) (\varepsilon^2 + s^2 t^2 \zeta^2)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{G_3(s, t, 1)} \frac{f_4(s, t, \zeta) d\zeta dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 \zeta^2} = \\
&= \left[\begin{array}{l} \zeta = G_3(s, t, 1)z, \\ d\zeta = G_3(s, t, 1)dz \end{array} \right] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_5(s, t, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 z^2 G_3^2(s, t, 1)},
\end{aligned}$$

где $F^{-1}(s, t, \zeta)$ обозначает функцию, обратную к функции $F(s, t, \tau)$ относительно третьей переменной.

Аналогично можно получить, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_5(s, t, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 z^2 G_3^2(s, t, 1)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_6(s, y, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 y^2 z^2 G_3^2(s, 1, 1)} = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_7(x, y, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2 G_3^2(1, 1, 1)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_8(x, y, z) dz dt ds}{\mu^2 + x^2 y^2 z^2},
\end{aligned}$$

где $\mu = \frac{\varepsilon}{G_3(1, 1, 1)}$.

Вернёмся к рассмотрению интеграла (1). Его асимптотику можно найти методом вычитания особенностей. Для этого представим функцию $f(x, y, z)$ в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned}
f(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + x f'_x(0, 0, 0) + y f'_y(0, 0, 0) + z f'_z(0, 0, 0) + \\
&+ xy f''_{xy}(0, 0, 0) + yz f''_{yz}(0, 0, 0) + xz f''_{xz}(0, 0, 0) + xyz f'''_{xyz}(0, 0, 0) + \\
&+ x^2 \cdot \frac{f(x, 0, 0) - f(0, 0, 0) - x f'_x(0, 0, 0)}{x^2} + \dots \\
&+ x^2 y \cdot \frac{f'_y(x, 0, 0) - f'_y(0, 0, 0) - x f''_{xy}(0, 0, 0)}{x^2} + \dots \\
&+ x^2 y z \cdot \frac{f''_{yz}(x, 0, 0) - f''_{yz}(0, 0, 0) - x f'''_{xyz}(0, 0, 0)}{x^2} + \dots \\
&+ x^2 y^2 \cdot \frac{1}{x^2 y^2} \left(f(x, y, 0) - f(x, 0, 0) - f(0, y, 0) + f(0, 0, 0) + \right. \\
&+ x f'_x(0, 0, 0) + y f'_y(0, 0, 0) - x f'_x(0, y, 0) - y f'_y(x, 0, 0) + xy f''_{xy}(0, 0, 0) \left. \right) + \\
&+ \dots + x^2 y^2 z \cdot \frac{1}{x^2 y^2} \left(f'_z(x, y, 0) - f'_z(x, 0, 0) - f'_z(0, y, 0) + f'_z(0, 0, 0) + \right. \\
&+ x f''_{xz}(0, 0, 0) + y f''_{yz}(0, 0, 0) - x f''_{xz}(0, y, 0) - y f''_{yz}(x, 0, 0) + \\
&+ xy f'''_{xyz}(0, 0, 0) \left. \right) + \dots + x^2 y^2 z^2 \varphi(x, y, z),
\end{aligned}$$

(2)

где $\varphi(x, y, z) = O(1)$. При этом данная сумма соответствует десяти различным видам интегралов, асимптотика каждого из которых по-прежнему не является столь очевидной, как в двумерном случае. Поэтому найдём только главный член асимптотики и оценку остатка.

Интеграл, соответствующий первому слагаемому равенства (2), можно разложить следующим способом:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} &= \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \int_\varepsilon^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} + \\ &+ \int_0^\varepsilon \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} - \int_0^\varepsilon \int_0^1 \int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = I_1 + 2I_2 - I_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = [x = \varepsilon\xi] = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi dydz}{1 + \xi^2 y^2 z^2}, \\ I_3 &= \int_0^\varepsilon \int_0^1 \int_0^\varepsilon \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = [x = \varepsilon\xi, z = \varepsilon\zeta] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi dyd\zeta}{1 + \varepsilon^2 \xi^2 y^2 \zeta^2} = 1 + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Асимптотику оставшегося интеграла можно найти, применяя круговой метод:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \int_\varepsilon^1 \frac{dxdydz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = [x = \varepsilon t] = \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \int_1^{1/\varepsilon} \frac{dtdydz}{1 + t^2 y^2 z^2} = \\ &= \left[t = \frac{1}{u} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \int_\varepsilon^1 \frac{dudydz}{u^2 + y^2 z^2} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \left(\int_\varepsilon^1 \int_0^y \frac{dudy}{u^2 + y^2 z^2} + \int_\varepsilon^1 \int_0^u \frac{dydu}{u^2 + y^2 z^2} - \int_0^\varepsilon \int_\varepsilon^1 \frac{dydu}{u^2 + y^2 z^2} \right) dz = i_1 + i_2 - i_3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^1 \int_0^y \frac{dudydz}{u^2 + y^2 z^2} = \left[\begin{array}{l} u = yv, \\ du = ydv \end{array} \right] = \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \frac{dvdydz}{y(v^2 + z^2)} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \frac{dvdz}{v^2 + z^2} = [z = \varepsilon\zeta] = \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1/\varepsilon} \int_0^1 \frac{dv d\zeta}{v^2 + \varepsilon^2 \zeta^2} = \left[\zeta = \frac{1}{u} \right] = \\ &= \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 \int_0^1 \frac{dvdu}{\varepsilon^2 + u^2 v^2} = \ln \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{dvdu}{\varepsilon^2 + u^2 v^2} - \int_0^\varepsilon \int_0^1 \frac{dvdu}{\varepsilon^2 + u^2 v^2} \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt + \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon), \end{aligned}$$

$$i_2 = \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 dz \left[\int_\varepsilon^1 \int_0^u \frac{dydu}{u^2 + y^2 z^2} \right] = \left[\begin{array}{l} y = ut, \\ dy = ut dt \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \int_0^1 \frac{u dt du dz}{u^2 + u^2 t^2 z^2} = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^1 \int_0^1 \frac{dt dz}{1 + t^2 z^2} = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dz - \int_0^{\varepsilon} \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dz \right] = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dz - \ln \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\
& i_3 = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{\varepsilon} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dy du dz}{u^2 + y^2 z^2} = \left[\begin{array}{l} y = \varepsilon \eta, \\ u = \varepsilon \xi, \\ z = \varepsilon \zeta \end{array} \right] = \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_1^{1/\varepsilon} \int_0^1 \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\varepsilon^3 d\eta d\xi d\zeta}{\varepsilon^2 \xi^2 + \varepsilon^4 \eta^2 \zeta^2} = \left[\eta = \frac{1}{y}, \zeta = \frac{1}{z} \right] = \int_{\varepsilon}^1 \int_0^1 \int_{\varepsilon}^1 \frac{dy d\xi dz}{y^2 \xi^2 \zeta^2 + \varepsilon^2} = I_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, $2I_1 = i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$. Отсюда $I_1 = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon)$ и, соответственно,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi dy dz}{1 + \xi^2 y^2 z^2} - 1 + O(\varepsilon^2 \ln \varepsilon).$$

Заметим, что абсолютные величины всех остальных интегралов, соответствующих слагаемым суммы (2), можно оценить сверху интегралом $M \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{z dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2}$, где постоянная M не зависит от ε . Поэтому для оценки точности главного члена асимптотики достаточно найти асимптотику интеграла $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{z dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2}$.

Итак,

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{z dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} - \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\varepsilon} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} = \frac{1}{2} J_1 - J_2 + \frac{1}{2} J_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^1 \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} = \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2 y^2}{\varepsilon^2}\right)}{x^2 y^2} dx dy = \left[x = \frac{\varepsilon}{u}, y = \frac{\varepsilon}{v} \right] = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 \left(\ln(u^2 v^2 + \varepsilon^2) - \ln(u^2 v^2) \right) du dv = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^1 \left(\ln(v^2 + \varepsilon^2) - \varepsilon \ln(\varepsilon^2(v^2 + 1)) - \right. \\
&\quad \left. - 2(1 - \varepsilon) + \frac{2\varepsilon}{v} (\operatorname{arctg} \frac{v}{\varepsilon} - \operatorname{arctg} v) \right) dv - \frac{2}{\varepsilon^2} \int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 (\ln u + \ln v) du dv = \\
&= \pi \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{2} + 2 - 2 \ln 2 - 4 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} v}{v} dv \right) + 2 \ln \frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{\pi}{4} + O(\varepsilon),
\end{aligned}$$

$$J_2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\varepsilon \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} = [x = \varepsilon \xi] = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi dy dz}{1 + \xi^2 y^2 z},$$

$$J_3 = \int_0^1 \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z} = [x = \varepsilon \xi, y = \varepsilon \eta] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi d\eta dz}{1 + \varepsilon^2 \xi^2 \eta^2 z} = 1 + O(\varepsilon).$$

Складывая интегралы, получаем

$$J = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pi}{4} + 1 - \ln 2 - 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} v}{v} dv + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{d\xi dy dz}{1 + \xi^2 y^2 z} \right) - 1 - \frac{\pi}{8} + O(\varepsilon).$$

Данная оценка позволяет заключить, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = f(0, 0, 0) \cdot \frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заключение

Как замечено А. М. Ильиным в работе [5], уже в трёхмерном случае возникают значительные трудности, когда знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю на пересекающихся многообразиях различной размерности. Построенная здесь асимптотика является примером такого вида сингулярных интегралов. Остаётся открытым вопрос, например, об асимптотике интеграла $\int_{\omega} \frac{dx dy}{\varepsilon^2 + U(x, y)}$, когда неотрицательная функция $U(x, y, z)$ обращается в ноль на трёх пересекающихся кривых. Однако интерес представляют и случаи, когда предельный знаменатель имеет критические точки более сложного вида, классификация которых есть, например, в [6; 7].

Автор благодарит А. М. Ильина за постановку целого направления исследований.

Список литературы

1. **Федорюк, М. В.** Асимптотика, интегралы и ряды / М. В. Федорюк. — М. : Наука, 1987. — 544 с.
2. **Риекстыньш, Э. Я.** Асимптотические разложения интегралов / Э. Я. Риекстыньш. — Рига : Зинатне, 1974. — Т. 1. — 392 с.; Т. 2. — 464 с.
3. **Риекстыньш, Э. Я.** Асимптотические разложения интегралов. Т. 3 / Э. Я. Риекстыньш. — Рига : Зинатне, 1981. — 370 с.
4. **Ильин, А. М.** Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : Физматлит, 2009. — 248 с.
5. **Ильин, А. М.** Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра / А. М. Ильин, А. А. Ершов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 3. — С. 116–126.
6. **Арнольд, В. И.** Теория катастроф / В. И. Арнольд. — 2-е изд., доп. — М. : Изд-во Моск. гос. ун-та, 1983. — 80 с.
7. **Бреккер, Т.** Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Бреккер, Л. Ландер. — М. : Платон, 1997. — 208 с.

Поступила в редакцию 11.11.2014

После переработки 10.02.2016

Сведения об авторе

Ершов Александр Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ale10919@yandex.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 1. P. 35–42.

ASYMPTOTICS OF THREE-DIMENSIONAL INTEGRALS SINGULARLY DEPENDING ON A SMALL PARAMETER

A. A. Ershov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
ale10919@yandex.ru

Asymptotics of some three-dimensional integrals singularly depending on a small parameter is constructed. The integrand denominator of the considered integrals is a sum of a small parameter and nonnegative function vanishing on three not intersecting surfaces. Such form integrals diverge as a small parameter tends to zero. The method of singularities subtraction and the circle method are applied.

Keywords: *asymptotic expansion, small parameter, integral, singularities subtraction method, circle method.*

References

1. **Fedoryuk M.V.** *Asimptotika, integraly i ryady* [Asymptotics, integrals and series]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 544 p. (In Russ.).
2. **Riekstynsh E.Ya.** *Asimptoticheskiye razlozheniya integralov* [Asymptotic expansions of integrals]. Riga, Zinatne Publ., 1974. Vol. 1. 392 p.; Vol. 2. 464 p. (In Russ.).
3. **Riekstynsh E.Ya.** *Asimptoticheskiye razlozheniya integralov* [Asymptotic expansions of integrals]. Riga, Zinatne Publ., 1981. Vol. 3. 370 p. (In Russ.).
4. **Il'in A.M., Danilin A.R.** *Asimptoticheskiye metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 248 p. (In Russ.).
5. **Il'in A.M., Ershov A.A.** Asymptotics of two-dimensional integrals dependind singularly on a small parameter. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 131–142.
6. **Arnold V.I.** *Teoriya katastrof* [Catastrophe theory]. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta Publ., 1983. 80 p. (In Russ.).
7. **Bröcker Th., Lander L.** *Differentiable Germs and Catastrophes*. Cambridge University Press, 1975. 188 p.

Article received 11.11.2014

Corrections received 10.02.2016