В. М. Бабич, Метод Адамара и асимптотика спектральной функции дифференциального оператора второго порядка,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 5, 689–694

https://www.mathnet.ru/mzm6399

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 5 (1980)

МЕТОД АДАМАРА И АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. М. Бабич

Пусть Ω — ограниченная область $\mathbf{R}^n$, в которой задан эллиптический дифференциальный оператор

$$-Lu=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial u}{\partial x^j}\right)+a(x)\,u,$$
$$\frac{1}{g}=\det(g^{ij}),\quad x=(x^1,x^2,\ldots,x^n). \tag{1}$$

Будем считать, что граница $\partial\Omega$ области Ω дважды непрерывно дифференцируема, а коэффициенты берутся из $C^\infty(\overline{\Omega})$, $(\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega)$. Пусть $\varphi_m(x)$ — нормированные собственные функции оператора

$$L\varphi_m=k_m^2\rho(x)\,\varphi_m,\quad \operatorname{Im}\varphi_m=0,$$
$$\rho(x)>0,\ x\in\overline{\Omega},$$
$$\int_\Omega\rho(x)\,\varphi_m^2(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad \rho(x)\in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{2}$$

соответствующие какому-либо классическому однородному краевому условию. Мы требуем, чтобы все собственные числа k_m^2 были неотрицательны. Наша цель — построить асимптотическое (при $k\to\infty$) разложение спектральной функции

$$\theta(x,y,k)\overset{\text{def}}{=}\sum\nolimits_{k_m<k}\varphi_m(x)\,\varphi_m(y) \tag{3}$$

оператора L.

Схема решения этой задачи хорошо известна (см., например, [1]). Ссылки на более ранние работы имеются в [2]. В статье [3] содержится новый интересный подход к изучению спектральной функции. Получение асимптотического разложения сводится к детальному исследованию особенностей фундаментального решения задачи Коши для гиперболического уравнения, соответствующего уравнению (1). Это исследование можно проводить методом интегральных уравнений типа Вольтерра [4], что сопряжено с громоздкой аналитической техникой. Однако в данной задаче можно обойтись без столь сложных построений, если использовать модернизованный вариант метода Адамара и связанное с ним коротковолновое разложение решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде (см. [5], [6], [7, гл. 6 ч. II]). Сама идея применить метод Адамара при изучении спектральной функции не нова (см. [8]), однако в работе [8] получен лишь главный член асимптотического разложения, между тем, рассуждая иначе, чем Бюро, можно в простой форме получить все асимптотическое разложение (остаточный член мал в среднем). Это асимптотическое разложение выражается через решение дифракционной задачи о фокусировке волны в точку.

Имеет место формула

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} d_k\theta(x, y, k) = h(x, y, t) + h(x, y, -t), \tag{4}$$

которую следует понимать в смысле обобщенных функций. Здесь h — решение смешанной задачи

$$\begin{gathered} \rho(x)\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = -Lh, \qquad t > 0, \\ h \xrightarrow[t\downarrow 0]{} \frac{1}{\rho(y)}\delta(x-y); \quad \frac{\partial h}{\partial t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0; \quad h|_{t<0} = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

соответствующее тем же однородным краевым условиям, что и φ_m. (См. [1, формула 2.16].)

При малых t

$$h(x, y, t) = \partial v(x, y, t)/\partial t,$$

где v — фундаментальное решение задачи Коши:

$$\begin{gathered} \rho(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -Lv \quad (t > 0), \\ v \xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \xrightarrow[t\downarrow 0]{} \frac{1}{\rho(y)}\delta(x-y). \end{gathered} \tag{6}$$

Известно, что при малых t и $y \in \Omega$ имеет место разложение Адамара

$$v(x, y, t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, y) \left.\frac{(t^2-\tau^2)_+^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\right|_{\lambda=(1-n)/2+j}; \tag{7}$$

здесь $v_j(x, y)$ — гладкие функции x и y, τ — геодезическое расстояние, определяемое римановой метрикой

$$ds^2 = \rho(x) \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j, \quad (g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}, \tag{8}$$

Γ — гамма-функция, обобщенная функция $(t^2-\tau^2)_+^{\lambda}/\Gamma(\lambda+1)$ при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ понимается как «обычная» функция, а на остальные λ распространяется с помощью аналитического продолжения. Функции v_j можно последовательно находить, формально подставляя разложение (7) в уравнение (6) и приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях $t^2-\tau^2$. Функции v_j находятся однозначно с помощью интегрирования рекуррентных линейных обыкновенных уравнений вдоль геодезических, соответствующих метрике (8) и исходящих из точки $x = y$. Роль начальных условий играет требование конечности $v_j(x, y)$ при $x = y$ $(j > 0)$ и равенство

$$v_0(y, y) = \frac{\rho^{\frac{n-2}{2}}(y)}{2\sqrt{\det(g^{ij}(y))}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Разложение (7) представляет собой асимптотику $v(x, y, t)$ по гладкости [1]). Это разложение замечательно тем, что оно характеризует сингулярности v на волновом фронте как вблизи точки $x = y$, так и при удалении от этой точки. Открытие Адамаром разложения (7) является уникальной находкой. Уникальной в том смысле, что подобного простого и естественного разложения не удается построить ни для сколько-нибудь общих систем уравнений (в частности, для системы динамических уравнений тео-

---

[1]) То есть для любого $N = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место равенство

$$v = \sum_{j=0}^{N} v_j \frac{(t^2-\tau^2)_+^{j-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(j-\frac{n-3}{2}\right)} + R_N,$$

где остаточный член R_N имеет столько же непрерывных производных, сколько их имеет первый отброшенный член.

рии упругости), ни для уравнений высших порядков. Разложение Адамара (7) дает (по-видимому, тоже уникальную) возможность выписать в простой и общей форме полный асимптотический ряд для спектральной функции эллиптического оператора второго порядка. К сожалению, как разложение Адамара, так и асимптотические формулы для спектральной функции относятся лишь к случаю строго внутренней подобласти. Асимптотические формулы для спектральной функции, справедливые вблизи границы области, требуют несравненно более громоздкой аналитической техники склеивания формальных асимптотических разложений (см. [9]). Как показано в работе [1],

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x, y, k)}{\mathrm{d}k} \sim \frac{-ik}{\pi} u(x, y, k) + \frac{ik}{\pi} u(x, y, -k) \tag{9}$$

(см. [1, формула (2.36)]). В том случае, когда точка y находится в строго внутренней подобласти области Ω, под $u(x, y, k)$ следует понимать ряд

$$\begin{gathered} u(x, y, k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, y) f_{\frac{n-2}{2}+j}(k, \tau), \\ f_p(k, \tau) = i\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pi i p}\left(\frac{2\tau}{k}\right)^p H_p^{(1)}(k\tau); \end{gathered} \tag{10}$$

здесь H_p^1 — функция Ханкеля. Разложение (10) является формальным решением задачи о точечном источнике колебаний в неоднородной среде: $Lu + k^2\rho u = -\delta(x - y)$ (см. [5]). Формула (9) показывает, что асимптотика $\mathrm{d}\theta(x, y, k)/\mathrm{d}k$ представляет собой решение задачи о фокусировке: второе слагаемое соответствует «волне», сходящейся в точку $x = y$, первое — «волне», расходящейся из этой точки. Их формул (9) и (10) вытекает следующее асимптотическое разложение:

$$\frac{\mathrm{d}\theta(x, y, k)}{\mathrm{d}k} \sim \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, y) g_{\frac{2-n}{2}+j}(k, \tau), \tag{11}$$

$$g_p(k, \tau) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\tau}{k}\right)^p J_{-p}(k\tau), \tag{12}$$

здесь J_{-p} — функция Бесселя.

Остаточный член

$$R_r(x, y, k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\theta(x, y, k)}{\mathrm{d}k} - \sum_{j=0}^{r} v_j g_{\frac{2-n}{2}+j}(k, \tau)$$

мал в среднем (см. [1, формула (2.38)])

$$\int_0^k \left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)^r R_r(x, y, \nu)\,d\nu \overset{\text{def}}{=} \int_0^k \left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)^r d\nu \Big[\theta(x, y, \nu) - \\ - \int_0^\nu \sum_{j=0}^r v_j g_{\frac{2-n}{2}+j}\,d\nu\Big] = O(k^{n-r-1}). \tag{13}$$

Интересно, что интегралы от $g_p(\nu, \tau)$ легко вычисляются, ибо

$$g_p(k, \tau) = \frac{\partial}{\partial k}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2\tau}{k}\right)^{p-1} J_{1-p}(k\tau)\right]. \tag{14}$$

При $r = 0$ соотношения (13) и (14) дают известную формулу

$$\theta(x, y, k) = W(x, y)\frac{\rho^{\frac{n-2}{2}}(y)}{\sqrt{\det(g^{ij})}}\left(\frac{k}{2\pi\tau}\right)^{n/2} J_{n/2}(k\tau) + O(k^{n-1}). \tag{15}$$

Здесь $W(x, y)$ — гладкая функция, равная единице при $x = y$.

Ленинградское отделение Математического института АН СССР

Поступило 18.VII.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бабич В. М., Левитан Б. М., Задача о фокусировке и асимптотика спектральной функции оператора Лапласа — Бельтрами, Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та АН СССР, 78 (1978), 3—19.

[2] Левитан Б. М., Асимптотическое поведение спектральной функции эллиптического уравнения, Успехи матем. наук., 26, № 6 (1971), 151—212.

[3] Алимов Ш. А., Ильин В. А., Никишин Е. М., Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений, Успехи матем. наук, 31, № 1 (1977), 107—130.

[4] Суворченкова Г. А., Применение метода Соболева к изучению связи спектра эллиптического дифференциального оператора второго порядка и геометрий многообразия без края, Диф. уравнения, 11, № 2 (1975), 358—365.

[5] Бабич В. М., О коротковолновой асимптотике решения задачи о точечном источнике в неоднородной среде, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, № 5 (1965), 949—911.

[6] Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М., «Наука», 1978

[7] К у р а н т Р., Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1968.

[8] B u r e a u F. J., Asymptotic Representation of the spectral function of self adjoint elliptic operators of the second order with variable coefficients II, J. Math. Analysis Appl., **4** (1962), 181—192.

[9] Б а б и ч В. М., Л е в и т а н Б. М., Задача о фокусировке и асимптотика спектральной функции оператора Лапласа — Бельтрами, Докл. АН СССР, **230**, № 5 (1976), 1017—1020.