Б. В. Винницкий, О представлении целых функций рядами $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$,

Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 361–372

https://www.mathnet.ru/mzm6520

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$

Б. В. Винницкий

А. Ф. Леонтьевым [1] показано, что если $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция типа $\sigma < \infty$ порядка ρ, $a_n \neq 0$ при всех $n = 0, 1, \ldots$, и $\varlimsup_{n\to\infty} n\,|a_n|^{\rho/n} > 0$, то каждую целую функцию $F(z)$ можно представить во всей плоскости рядом $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$. В настоящей заметке мы распространим это утверждение А. Ф. Леонтьева на случай, когда $f(z)$ — функция произвольного порядка ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. В основе наших доказательств будет лежать следующая

ТЕОРЕМА Л (см. [1]). *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$
$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ —}$$

целые функции, причем $L(z)$ имеет бесконечное множество нулей $\{\lambda_n\}$ и все они простые, и при любом $\rho \in [0; \infty)$ выполняется

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left(\left| \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \right| + \rho \left| \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} \right| + \ldots + \rho^{n-1} \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \right) < \infty. \tag{0.1}$$

Тогда

$$F(z) - \sum_{n=1}^{k} \frac{\omega_L(\lambda_n; F)}{L'(\lambda_n)} f(\lambda_n z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{(k)}(z)/a_n,$$

где

$$\omega_L(z;F)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}+z\frac{b_{n-2}}{a_{n-2}}+\ldots+z^{n-1}\frac{b_0}{a_0}\right),$$

$A_n^{(k)}(z)$ — *тейлоровские коэффициенты целой функции* $\Phi(\lambda, z, k)$ (*как функции от* λ), *определяемой для* λ, *лежащих внутри* Γ_k *посредством равенства*

$$\Phi(\lambda, z, k)=(L(\lambda)/2\pi i)\int_{\Gamma_k}(f(z\mu)/((\mu-\lambda)L(\mu)))\,d\mu,$$

а Γ_k — *замкнутые контуры, внутри которых лежит* k *нулей* $L(z)$.

1. Пусть целая функция $f(z)$ такая, что: а) $a_n\neq 0$ при всех $n=0, 1, \ldots$; б) последовательность $\varkappa_n = |a_{n-1}/a_n|$ не убывает при $n\geqslant n_0$; д) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\varkappa_n/\varkappa_{n+1}=p>0$. Пусть, далее $\beta(x)\uparrow\infty$, $x\to\infty$,— положительная и непрерывная на $[x_0;\infty)$ функция такая, что $\eta_1(x)=x/\beta(x)\uparrow\infty$, $x\to\infty$, при любом $c\in(1;\infty)$ выполняется

$$\varlimsup_{x\to\infty}\beta(cx)/\beta(x)<\infty \tag{1.1}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,\beta(\varkappa_n)=0. \tag{1.2}$$

Обозначим через A_β класс целых функций $F(z)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|b_n|}\,\beta(\varkappa_n)=0. \tag{1.3}$$

ЛЕММА 1. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет условиям* а) *и* б), $\eta(x)$ — *функция, обратная к* $\eta_1(x)$, *а* $L(z)$ *такая, что*

в) $$\varlimsup_{r\to\infty}\exp(\Phi_f^*(\ln M_L(r)))/\eta(r)=\tau<\infty,$$

где $M_f(r)=\max\{|f(z)|: |z|=r\}$, *а* $\Phi_f^*(x)$ — *функция, обратная к* $\ln M_f(e^x)$. *Тогда, если* $F\in A_\beta$, *то при любом* $\rho\in[0;\infty)$ *выполняется* (0.1).

Доказательство. Пусть $\mu_f(r)$ и $\nu_f(r)$ — соответственно максимальный член и центральный индекс ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. Для всяких $\sigma > 0$ и $r > 0$ имеем

$$\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} \leqslant \frac{\mu_L((1+\sigma)r)}{|a_n| r^{n+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} (1+\sigma)^{-k} \leqslant$$
$$\leqslant M_L((1+\sigma)r)/(|a_n|((1+\sigma)r)^n \sigma r), \qquad (1.4)$$

откуда, учитывая в), при $\sigma \geqslant \sigma_0(\tau_1, r)$, $\tau_1 > \tau$, находим

$$\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_L(\tau_1\eta((1+\sigma)r))}{\sigma r |a_n| (\tau_1(1+\varepsilon)\eta((1+\sigma)r))^n} \left(\frac{\tau_1(1+\varepsilon)\eta((1+\sigma)r)}{(1+\sigma)r}\right)^n.$$

Известно (см. [2, стр. 17]), что $\mu_f(r) = |a_n| r^n$ при $r \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1}]$. Поэтому, замечая, что при $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ выполняется

$$M_f(r) \leqslant K(\varepsilon)\mu_f((1+\varepsilon), r), \qquad K(\varepsilon) = (1+\varepsilon)/\varepsilon, \qquad (1.5)$$

из (1.4), взяв $\sigma = \sigma_n$ так, чтобы $\tau_1(1+\varepsilon)\eta((1+\sigma_n)r) = \varkappa_n$, при $n \geqslant n_0(\varepsilon, r)$ находим

$$\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} \leqslant K(\varepsilon)\left[\frac{\varkappa_n}{\eta_1(\varkappa_n/(1+\varepsilon)\tau_1)}\right]^n \leqslant$$
$$\leqslant [K_1\beta(\varkappa_n)]^n. \qquad (1.6)$$

Поскольку $F \in A_\beta$, то отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left(\left|\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}\right| + \ldots + r^{n-1}\left|\frac{b_0}{a_0}\right|\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} < \infty$$

при любом $r \in [0; \infty)$. Поэтому лемма 1 доказана.

Предположим, что: г) $L(z)$ имеет бесконечное множество нулей $\{\lambda_n\}$ и все они простые. Если выполнены условия а) б), в), г) и $F \in A_\beta$, то $\omega_L(\lambda_k; F) = O(1)$ при $k \to \infty$. Действительно, обозначая $l_k(z) = L(z)/(z-\lambda_k)$, имеем (см. [1])

$$\omega_L(\lambda_k; F) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n c_n^{(k)}/a_n, \quad l_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n.$$

Так как $M_{l_k}(r) \leqslant M_L(r+1)$ при всех $r > 0$ и $k \geqslant 1$, то по неравенствам Коши находим

$$\left|\frac{c_n^{(k)}}{a_n}\right| \leqslant \frac{M_L(r+1)}{|a_n| r^n} \leqslant \frac{M_f(\tau_1\eta(r+1))}{|a_n|((1+\varepsilon)\tau_1\eta(r+1))^n}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{(1+\varepsilon)\tau_1\eta(r+1)}{r}\right)^n.$$

Положив в этих соотношениях $r=r_n$ так, чтобы $(1+\varepsilon)\tau_1\eta(r_n+1)=\varkappa_n$, при всех $n\geqslant 0$ и $k\geqslant 1$ найдем $|c_n^{(k)}/a_n|\leqslant(K\beta(\varkappa_n))^n$, где $K>0$ — постоянная. Отсюда следует требуемое утверждение.

Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z)$ сходится регулярно в $\mathbf{C}$, если при любом $r\in[0;\ \infty)$ выполняется $\sum_{n=1}^{\infty}|d_n|\,M_f(r\,|\lambda_n|)<\infty$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть целые функции $f(z)$ и $L(z)$ такие, что выполнены условия* а), б), в), г), д). *Тогда для того, чтобы каждую целую функцию $F\in A_\beta$ можно было представить рядом*

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} d_n f(\lambda_n z),\quad d_n=\omega_L(\lambda_n;\ F)/L'(\lambda_n),\qquad (1.7)$$

регулярно сходящимся во всей плоскости, необходимо и достаточно выполнения условий:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} M_f(r\,|\lambda_n|)/|L'(\lambda_n)|<\infty$ *при* $r\in[0;\ \infty)$;

2) *при любых $\lambda\in\mathbf{C}$ и $n\geqslant 0$ имеет место представление*

$$\lambda^n=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^n L(\lambda)/((\lambda-\lambda_k)L'(\lambda_k)).$$

Доказательство. Достаточность. Поскольку $\omega_L(\lambda_n;\ F)=O(1)$, то из 1) следует регулярная сходимость ряда (1.7) во всей плоскости. Поэтому, поскольку (см. [1]) $\omega_L(\lambda_n;\ F)=L(\lambda)/(\lambda-\lambda_n)$ при $F(z)=f(\lambda z)$, из 2) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(\lambda)f(\lambda_n z)}{(\lambda-\lambda_n)L'(\lambda_n)}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L(\lambda)\lambda_n^k}{(\lambda-\lambda_n)L'(\lambda_n)}\right)z^k=f(\lambda z),\qquad (1.8)$$

т. е. при любом $\lambda\in\mathbf{C}$ функцию $F(z)=f(\lambda z)$ можно представить рядом (1.7). Пусть теперь $F(z)$ —

произвольная функция из A_β. Так как

$$\Phi(\lambda, z, k) = f(\lambda z) - \sum_{n=1}^{k} \frac{L(\lambda) f(\lambda_n z)}{(\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n)}, \qquad (1.9)$$

то при $|z| \leqslant \rho$, $|\lambda| \leqslant r$ и всех $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$ по неравенствам Коши находим

$$\left| \frac{A_n^{(k)}(z)}{a_n} \right| \leqslant \frac{M_f(\rho r) + K(\rho) M_L(r+1)}{|a_n| r^n}, \qquad K(\rho) > 0, \ (1.10)$$

откуда в силу в) при $r \geqslant r_0$ находим

$$\left| \frac{A_n^{(k)}(z)}{a_n} \right| \leqslant K_1(\rho) \frac{M_f(a\eta(r))}{|a_n| (a(1+\varepsilon)\eta(r))^n} \cdot \left(\frac{a(1+\varepsilon)\eta(r)}{r} \right)^n,$$

где $a = a(\rho)$ и $K_1(\rho)$ — постоянные. Положив в последнем соотношении $r = r_n$ так, чтобы $a(1+\varepsilon)\eta(r_n) = \varkappa_n$ при всех $k \geqslant 1$ и $n \geqslant 0$, имеем $|A_n^{(k)}(z)/a_n| \leqslant (K_2(\rho)\beta(\varkappa_n))^n$. Так как $F \in A_\beta$, то отсюда следует, что при $|z| \leqslant \rho$ и всех $k = 1, 2, \ldots$, выполняется

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{(k)}(z)/a_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| (K_2(\rho)\beta(\varkappa_n))^n \leqslant K(\rho),$$

где $K(\rho)$ не зависит от k. Далее, из (1.8) следует, что $\Phi(\lambda, z, k) \to 0$ при $k \to \infty$, причем стремление равномерно по λ и z, когда $|\lambda| \leqslant r$, $|z| \leqslant \rho$, $0 \leqslant r$; $\rho < \infty$. Поэтому последовательность $\sum_{n=0}^{\infty} b_n A_n^{(k)}(z)/a_n$ равномерно в любом круге стремится к 0 при $k \to \infty$. Следовательно, согласно теореме Л, справедливо представление (1.7) и достаточность доказана.

Необходимость условий 1) и 2) следует из (1.8), если учесть, что из д) вытекает существование числа $b < \infty$ такого, что при $r \geqslant r_0(b)$ выполняется

$$r M_f(r) \leqslant M_f(br). \qquad (1.11)$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Для всякой целой функции $f(z)$, удовлетворяющей условиям* а), б), д) *и всякой непрерывно дифференцируемой и положительной на $[x_0; \infty)$ функции $\beta(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, такой, что*

$$x\beta'(x)/\beta(x) \to 0, \quad x \to \infty, \qquad (1.12)$$

существует целая функция $L(z)$ такая, что условия в), г), 1) *и* 2) *выполняются.*

Доказательство. Из (1.12) следует, что функция $\eta_1(x) = x/\beta(x)$ монотонно стремится к ∞ при $x \to \infty$ и что (ср. [3, пример 410]) при любом $c \in (0; \infty)$ при $x \to \infty$ выполняется

$$\beta(cx) \sim \beta(x), \quad \eta_1(cx) \sim c\eta(x), \quad \eta(cx) \sim c\eta(x), \tag{1.13}$$

где $\eta(x)$ — функция, обратная к $\eta_1(x)$.

Пусть $\{n_k\}$ — множество значений, принимаемых функцией $\nu_f(r)$ при $r > \varkappa_{n_1}$, т. е. в силу б), это—последовательность, для которой $\varkappa_{n_1} < \varkappa_{n_1+1} = \varkappa_{n_1+2} = \ldots = \varkappa_{n_2} < \varkappa_{n_2+1} = \varkappa_{n_2+2} = \ldots = \varkappa_{n_3} < \ldots < \varkappa_{n_k+1} = \varkappa_{n_k+2} = \ldots = \varkappa_{n_{k+1}} < \ldots$, а $\varkappa_{n_k}$ — точки скачка $\nu_f(r)$. Пусть, далее, $\bar\rho_1 = \varkappa_{n_1}$ и

$$\bar\rho_j = \varkappa_{n_{k_j}} \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{\varkappa_{n_k} : 8/p \leqslant \varkappa_{n_k}/\bar\rho_{j-1}\}, \qquad j > 1,$$

где p, $0 < p \leqslant 1$, определено в условии д). Поскольку $\varkappa_{n_{k+1}} = \varkappa_{n_k+1}$, то

$$\varliminf_{k\to\infty} \varkappa_{n_k}/\varkappa_{n_{k+1}} = p, \tag{1.14}$$

и

$$8/p \leqslant \bar\rho_j/\bar\rho_{j-1} \leqslant (\varkappa_{n_{k_j}}/\varkappa_{n_{k_{j-1}}})(8/p) \leqslant 9/p^2, \qquad j \geqslant j_0.$$

Положив $\rho_n = \bar\rho_{j_0+n}$, $n \geqslant 0$, имеем

$$8/p \leqslant \rho_{n+1}/\rho_n \leqslant 9/p^2, \qquad n \geqslant 0. \tag{1.15}$$

Далее, согласно (1.13), при $n \to \infty$ выполняется $\eta(\rho_{n+1})/\eta(p_n) \geqslant \eta((8/p)\rho_n)/\eta(\rho_n) \sim 8/p$, и в силу (1.14) заключаем, что при любом достаточно большом m найдется n_k такое, что $\eta(\rho_m) < \varkappa_{n_k} < \eta(\rho_{m+1})$. Поэтому $\Delta_n \overset{\mathrm{df}}{=} \nu_f(\eta(\rho_n)) - \nu_f(\eta(\rho_{n-1})) \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$. Для простоты изложения будем считать, что $\Delta_n \geqslant 1$ при всех $n \geqslant 1$ и положим

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - (z/\rho_n)^{\Delta_n}). \tag{1.16}$$

Покажем, что это — искомая целая функция. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — все нули $L(z)$, $m_L(r) = \min\{|L(z)| : |z| = r\}$,

$$n(r) = \sum_{|\lambda_n| = r} 1, \quad N(r) = \int_0^r n(t)\,\mathrm{d}\ln t,$$

$$L_n(z) = L(z)/(1 - (z/\rho_n)^{\Delta_n}), \quad r_n = (\rho_n + \rho_{n+1})/2.$$

Учитывая (1.15) и обозначая $m=\max\{n\colon \rho_n\leqslant r\}$, имеем

$$\ln M_L(r)\leqslant\sum\nolimits_{\rho_n\leqslant r}\Delta_n\ln\frac{r}{\rho_n}+\sum\nolimits_{\rho_n\leqslant r}\ln\left(1+\left(\frac{\rho_n}{r}\right)^{\Delta_n}\right)+$$
$$+\sum\nolimits_{\rho_n>r}\ln\left(1+\left(\frac{r}{\rho_n}\right)^{\Delta_n}\right)\leqslant N(r)+\sum\nolimits_{n=1}^{m}\ln\left(1+\frac{\rho_n}{\rho_m}\right)+$$
$$+\sum\nolimits_{n=m+1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\rho_{m+1}}{\rho_n}\right)=N(r)+O(1),\quad r\to\infty. \tag{1.17}$$

Аналогично,

$$\ln m_L(r_n)\geqslant\sum\nolimits_{k=1}^{n}\Delta_k\ln\frac{r_n}{\rho_k}+O(1)=N(r_n)+O(1),\quad n\to\infty, \tag{1.18}$$

$$\ln m_{L_n}(\rho_n)\geqslant\sum\nolimits_{k=1}^{n-1}\Delta_k\ln\frac{\rho_n}{\rho_k}+O(1)=N(\rho_n)+O(1),\quad n\to\infty. \tag{1.19}$$

Далее, при $\rho_n\leqslant r<\rho_{n+1}$ и $r\to\infty$ находим

$$n(r)=\nu_f(\eta(\rho_n))+O(1)\leqslant\nu_f(\eta(r))+O(1), \tag{1.20}$$

и, в силу (1.15),

$$n(r)=\nu_f\left(\eta\left(\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\rho_{n+1}\right)\right)+O(1)\geqslant\nu_f(\eta((8/p)r))+O(1). \tag{1.21}$$

Используя (1.12) и известное соотношение между $\nu_f(r)$ и $\mu_f(r)$, в силу (1.11) получаем

$$N(r)\leqslant\int_{\eta(r_0)}^{\eta(r)}\frac{\nu_f(r)}{t}\left(1-t\frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\right)\mathrm{d}t+O(\ln r)\leqslant$$
$$\leqslant\ln M_f(\tau\eta(r)),\qquad r\geqslant r_0.$$

Отсюда и из (1.17) следует в). Далее, поскольку $\eta(x)/x\to\infty$ при $x\to\infty$, то для любого $q\in(0;\infty)$ из (1.21), (1.11) и (1.5) при больших r находим

$$N(r)\geqslant\int_{r_0}^{r}\frac{\nu_f(\eta((8/p)t))}{t}\,\mathrm{d}t+O(\ln r)\geqslant\ln M_f(qr). \tag{1.22}$$

Так как имеются такие $\varphi_k\in[0;2\pi)$, что при $\nu_f(\eta(\rho_n))-\nu_f(\eta(\rho_1))<k\leqslant\nu_f(\eta(\rho_{n+1}))-\nu_f(\eta(\rho_1))$,

$n > 1$, выполняется

$$|L'(\lambda_k)| = \frac{\Delta_{n+1}}{\rho_{n+1}} |L_{n+1}(\rho_{n+1}e^{i\varphi_k})|, \qquad |\lambda_k| = \rho_{n+1},$$

то для доказательства свойства 1) достаточно показать сходимость при любом $r \in [0; \infty)$ ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n M_f(\rho_n r)/m_{L_n}(\rho_n).$$

Из (1.22), (1.19) и (1.11) следует существование постоянных $a > 1$ и $b > 1$ таких, что при фиксированном r и больших n выполняется

$$\frac{\rho_n M_f(\rho_n r)}{m_{L_n}(\rho_n)} \leqslant \frac{M_f(a\rho_n)}{M_f(ab\rho_n)} \leqslant \frac{1}{\rho_n},$$

откуда в силу (1.15) следует 1).

И наконец, в силу 1) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k L(\lambda)/((\lambda - \lambda_n) L'(\lambda_n))$$

сходится абсолютно. С другой стороны, из (1.19) и (1.22) получаем

$$\left| \lambda^k - \sum_{m:\, |\lambda_m| \leqslant r_n} \frac{\lambda_m^k L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_m) L'(\lambda_m)} \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r_n} \frac{t^k L(\lambda)\, \mathrm{d}t}{(\lambda - t) L(t)} \right| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

т. е. теорема 1.2 доказана.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет условиям* а), б), д). *Тогда для всякой целой функции* $F(z)$ *найдется целая функция* $L(z)$, *все нули* $\{\lambda_n\}$ *которой простые и такая, что* $F(z)$ *разлагается в ряд* (1.7), *регулярно сходящийся во всей плоскости.*

Для доказательства теоремы 1.3 согласно выше приведенным утверждениям достаточно показать, что для всякой целой функции $F(z)$ найдется функция $\beta(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$, такая, что выполняются условия (1.2), (1.3) и (1.12). Такую функцию $\beta(x)$ можно построить следующим образом. Пусть $\gamma_n = |a_n| + |b_n|$. Имеем $\sqrt[n]{\gamma_n} \to 0$, $n \to \infty$. Поэтому существует последовательность $u_n \uparrow \infty$ такая, что $\sqrt[n]{\gamma_n u_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $0 < \varphi(x) \uparrow \infty$, $x \to \infty$,

— непрерывно дифференцируемая на $[x_0; \infty)$ функция со свойством: $\varphi(\varkappa_n) \leqslant u_n$. Очевидно, функция $\beta(x) = \varphi(x)$ удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3) Далее, условию (1.12) удовлетворяют все непрерывно дифференцируемые функции $\beta(x)$, для которых функция $\ln \beta(x)$ выпуклая к верху относительно $\ln x$ и удовлетворяет условию: $\ln \beta(x) = o(\ln x)$, $x \to \infty$. Поэтому нетрудно построить функцию $\beta(x)$, $0 < \beta(x) \uparrow \infty$, такую, чтобы $\beta(x) \leqslant \varphi(x)$ и выполнялось (1.12).

Замечание. Можно убедиться, что утверждение теоремы 1.3 остается в силе, если условия б) и д) заменить на такое: для функции $f(z)$ существует целая функция $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ такая, что последовательность $\varkappa_n(f_1) = |A_{n-1}/A_n|$ не убывает и

$$0 < \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n/a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|A_n/a_n|} < \infty, \qquad \varliminf_{n\to\infty} \varkappa_n/\varkappa_{n+1} > 0.$$

2. Здесь мы рассмотрим случай, когда

б′) $$\lim_{n\to\infty} \varkappa_n/\varkappa_{n+1} = 0.$$

Очевидно, что из б′) следует б) и что д) не выполняется.

Пусть $\beta_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$,— последовательность положительных чисел таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,\beta_n = 0, \tag{2.1}$$

а $A(\beta)$ — класс целых функций $F(z)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}\,\beta_n = 0. \tag{2.2}$$

Пусть, далее,

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_n)$$

— целая функция такая, что: в′) $M_L(\varkappa_n) \leqslant |a_n| (\tau\beta_n\varkappa_n)^n$, $\tau \in (0, \infty)$; г′) $\arg \lambda_n = \mathrm{const}$ и $|\lambda_n| \neq |\lambda_k|$ при $n \neq k$.

Предположим, что выполняются условия а), б′), в′), г′) и $F \in A(\beta)$. Тогда легко проверить, что выполняется условие (0.1) теоремы Л и, поскольку в силу г′) при всех $r > 0$ и $k \geqslant 1$ выполняется $M_{l_k}(r) \leqslant M_L(r)/|\lambda_k|$, $\omega_L(\lambda_k; F) = O(1/\lambda_k)$ при $k \to \infty$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть целые функции* $f(z)$ *и* $L(z)$ *такие, что выполняются условия* а), б′), в′), г′). *Тогда для того, чтобы каждую целую функцию* $F \in A(\beta)$ *можно было представить рядом* (1.7), *регулярно сходящимся во всей плоскости, необходимо и достаточно выполнения условий* 2) *и*

3) $\sum_{n=1}^{\infty} M_f(r|\lambda_n|)/|\lambda_n L'(\lambda_n)| < \infty$ при $r \in [0; \infty)$.

Доказательство. Достаточность. Из 3) следует регулярная сходимость ряда (1.7), а из 2) — представление (1.8). Далее, для функции $\Phi(\lambda, z, k)$ имеем оценку $|\Phi(\lambda, z, k)| \leqslant M_f(\rho r) + K(\rho) M_L(r)$ при $|\lambda| \leqslant r$, $|z| \leqslant \rho$ и всех $k \geqslant 1$, где $K(\rho)$ не зависит от r и k. Поэтому по неравенствам Коши находим

$$|A_n^{(k)}(z)/a_n| \leqslant (M_f(\rho r) + K(\rho) M_L(r))/(|a_n| r^n). \qquad (2.3)$$

Ниже мы воспользуемся следующим утверждением: Если выполняется условие б′), то при любом ρ, $1 < \rho < \infty$, и всех $n \geqslant 0$ имеем $M_f(\rho\varkappa_n) \leqslant K_1(\rho)\,|a_n|\,(\rho\varkappa_n)^n$. Это утверждение не совсем в такой форме имеется в работах Валирона (см., например, [4]). Его легко получить, оценивая сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$ через максимальный член, учитывая, что $\mu_f(r) = |a_n|\, r^n$ при $r \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1}]$, в частности, в силу б′) при $r = \rho\varkappa_n$, и что $|a_k/a_n| \leqslant \varkappa_n^{n-k}$, $|a_k/a_n| \leqslant \varkappa_{n+1}^{n-k}$.

Положив в (2.3) $r = \varkappa_n$ и учтя в′), имеем $|A_n^{(k)}(z)/a_n| \leqslant K(\rho)(\rho^n + (\beta_n\tau)^n)$. Отсюда, как и раньше, получаем требуемый результат.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет условиям* а), б′), *а* $\beta_n \uparrow \infty$ — *последовательность положительных чисел со свойствами*:

$$t_n \overset{\mathrm{df}}{=} \beta_n^n/\beta_{n-1}^{n-1} \to \infty, \quad n \to \infty, \qquad (2.4)$$

$$t_n \varkappa_{n-1}/\varkappa_n \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (2.5)$$

Тогда существует целая функция $L(z)$, *удовлетворяющая условиям* в′), г′), 3), 2).

Доказательство. Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\varkappa_n t_{n+1}/(\varkappa_{n+1} t_n) \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (2.5')$$

и что при $n \geqslant n_0$ выполняется

$$\varkappa_{n-1} < \varkappa_n/t_n < \varkappa_n. \qquad (2.5'')$$

Пусть $\lambda_n = \varkappa_n/t_n$ при $n \geqslant n_0$ и $\lambda_n = \lambda_{n_0} n/n_0$ при $0 < n < n_0$, а $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/\lambda_n)$. Покажем, что это — искомая целая функция. Поскольку в силу (2.5′) $\lambda_n/\lambda_{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то $L(z)$ — целая функция. Далее, используя (2.5′) и (2.5″), при $n \to \infty$ имеем

$$\ln M_L(\varkappa_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\varkappa_n/\lambda_k) + \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \lambda_k/\varkappa_n) + $$
$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln(1 + \varkappa_n/\lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(\varkappa_n/\lambda_k) + O(1) =$$
$$= \ln(O(1)\,|a_n|\,(\beta_n\varkappa_n)^n),$$

т. е. в′) доказано.

Аналогичным образом, при $n \to \infty$ находим

$$\ln m_L(2\lambda_n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(2\lambda_n/\lambda_k) + O(1) =$$
$$= \ln(O(1)\,|a_n|\,\beta_n^n(2\lambda_n)^n) = \ln(O(1)\,\mu_{f_2}(2\lambda_n)), \qquad (2.6)$$

где $\mu_{f_2}(r)$ — максимальный член ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta_n^n z^n = f_2(z)$, так как в силу (2.5) $2\lambda_n \in [\varkappa_n(f_2);\ \varkappa_{n+1}(f_2)]$, $\varkappa_n(f_2) = |\,a_{n-1}\beta_{n-1}^{n-1}/a_n\beta_n^n\,|$.

Далее, при $n \to \infty$ выполняется

$$\ln|\lambda_n L'(\lambda_n)| =$$
$$= (\ln|L(z)/(1 - z/\lambda_n)|)\,|_{z=\lambda_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\lambda_n/\lambda_k)^n +$$
$$+ O(1) = \ln(O(1)\ |\,a_n\,|\ (\beta_n\varkappa_n/t_n)^n). \qquad (2.7)$$

Так как $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то в силу (2.5″) при любом $r \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0(r)$ имеем $r\lambda_n \in [\varkappa_{n-1};\ \varkappa_n]$. Поэтому, используя (1.5), находим $M_f(r\lambda_n) \leqslant K(\varepsilon)\,|a_{n-1}|\,((1+\varepsilon)r\lambda_n)^{n-1}$ при больших n. В силу этого в (2.7) получаем

$$M_f(r\lambda_n)/|\,\lambda_n L'(\lambda_n)\,| \leqslant K(\varepsilon)\,((1+\varepsilon)\,r/\beta_{n-1})^{n-1}, \qquad n \geqslant n_0(r),$$

так что условие 3) выполнено. Далее, из (2.6), в силу трансцендентности $f_2(z)$ и равенства

$$\left|\lambda^m - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^m L(\lambda)}{(\lambda - \lambda_k)\,L'(\lambda_k)}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=2\lambda_n} \frac{L(\lambda)\,t^m\,dt}{(\lambda - t)\,L(t)}\right|,$$

справедливого при больших n, получаем 2). Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что если $f(z)$ такая, что выполняются условия а), б$'$), то для любой целой функции $F(z)$ существует последовательность $\beta_n \uparrow \infty$ со свойствами (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5). Такую последовательность β_n строим следующим образом. Пусть $0 < u_n \uparrow \infty$ — последовательность такая, что $(|a_n| + |b_n|)^{1/n} u_n \to 0$ при $n \to \infty$, так что любая $\{\beta_n\}$, $\beta_n \leqslant u_n$, удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2). Далее, из б$'$) следует существование последовательности $\{t_n^*\}$ такой, что $\varkappa_{n-1} t_n^* / \varkappa_n \to 0$, $0 < t_n^* \uparrow \infty$, $n \to \infty$. Построим мажоранту Ньютона $f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/u_n^*)^n z^n$ целой функции $f_*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1/u_n)^n z^n$. Имеем $\bar{t}_n \overset{\mathrm{df}}{=} \overset{\mathrm{df}}{=} (u_n^*)^n / (u_{n-1}^*)^{n-1} \to \infty$, $u_n^* \to \infty$, $u_n^* \leqslant u_n$. Пусть $t_n = \min(t_n^*, \bar{t}_n)$ и $\beta_0 = u_0^*$, а $\beta_n^n = \beta_{n-1}^{n-1} t_n$. Имеем $t_n \leqslant t_n^*$, $\beta_n \leqslant u_n^*$, $t_n \to \infty$, $\beta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Так что построенная последовательность β_n искомая. Поэтому из теорем 2.1 и 2.2 вытекает

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть целая функция* $f(z)$ *удовлетворяет условиям* а), б$'$). *Тогда для всякой целой функции* $F(z)$ *можно указать целую функцию* $L(z)$, *все нули* $\{\lambda_n\}$ *которой простые и такую, что* $F(z)$ *разлагается в ряд* (1.7), *регулярно сходящийся во всей плоскости.*

Автор благодарит М. Н. Шеремета за внимание к работе.

Львовский государственный университет

Поступило 7.III.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Леонтьев А. Ф., Представление функций обобщенными рядами Дирихле, Успехи матем. наук, 24, № 2 (1969), 97—164.
[2] Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа, т. 2, М., ГИТТЛ, 1956.
[3] Евграфов М. А. и др., Сборник задач по теории аналитических функций, М., «Наука», 1972.
[4] Valiron G., Fonctions entières d'ordre fini et fonctions méromorphes, Enseign. Math., 4, № 4 (1958), 229—271.