Б.А.Розенфельд, Л.В.Антонова, А.Т.Вольховская

КОМПЛЕКСЫ ПРЯМЫХ В КВАЗИСИМПЛЕКТИЧЕСКОМ, КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОМ И КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ 3-ПРОСТРАНСТВАХ*

§ I. Метрики в многообразиях прямых 3-пространства

Квазиэллиптическое 3-пространство S_3' и квазигиперболическое 3-пространство ${}^{01}S_3'$ [I, с.285] представляют собой пространство P_3 с проективными метриками, абсолюты которых состоят из пары мнимо-сопряженных плоскостей и из пары точек на прямой пересечения этих плоскостей, называемой абсолютной прямой, причем, эти точки мнимо сопряжены в случае пространства S_3' и вещественны в случае пространства ${}^{01}S_3'$; многообразия эллиптических прямых пространств S_3' и ${}^{01}S_3'$, т.е. прямых, не пересекающих абсолютную прямую, допускают интерпретации в виде, соответственно, евклидовой плоскости $R_2(e)$ над алгеброй двойных чисел и комплексной евклидовой плоскости $R_2(i)$ [2; I, с.375,384], причем, группы движений пространств S_3' и ${}^{01}S_3'$ соответственно изоморфны группам движений плоскостей $R_2(e)$ и $R_2(i)$.

Группы движений пространств S_3' и ${}^{01}S_3'$ являются подгруппами группы симплектических преобразований квазисимплектического пространства Sp_3' [I, с.366], т.е. пространства P_3 с выделенной прямой, за фундаментальную группу которого принимается 10-параметрическая подгруппа 11-параметрической группы всех коллинеаций пространства P_3, переводящих в себя выделенную прямую; эти группы изоморфны, соответственно, группе движений и группе подобий псевдоевклидова пространства ${}^2R_4$ и

---

* § I написан Б.А.Розенфельдом, § 2 - совместно Л.В.Антоновой и А.Т.Вольховской, § 3 - Л.В.Антоновой, § 4 - А.Т.Вольховской.

в многообразии прямых пространства Sp_3^1, не пересекающих выделенную прямую, можно ввести метрику пространства ${}^2R_4$ инвариантную относительно фундаментальной группы пространства Sp_3^1 [I, с.388-389]. С другой стороны, многообразия эллиптических прямых пространств S_3^1 и ${}^{ol}S_3^1$ являются базисными симметрическими пространствами групп движений этих пространств, являющихся квазипростыми группами Ли [I, с.467], в метрике которых они изометричны, соответственно, пространствам R_4 и ${}^2R_4$ [I, с.469]. Определенные нами метрики в многообразиях эллиптических прямых пространств S_3^1 и ${}^{ol}S_3^1$ можно получить из двойной и комплексной метрик плоскостей $R_2(e)$ и $R_2(i)$ в этих многообразиях следующим образом: если $\delta = \delta_0 + \theta\delta_1$ $(\theta = e, i)$, где δ_0 и δ_1 - стационарные расстояния двух прямых пространств S_3^1 и ${}_{ol}S_3^1$ - двойное или комплексное расстояние между двумя точками плоскостей $R_2(\theta)$, изображающими эти прямые, то $\delta^2 = \delta_0^2 + \theta^2\delta_1^2 + 2\theta\delta_0\delta_1$, и если мы обозначим $\delta^2 = \Delta^2 + \theta\nabla^2$, то

$$\Delta^2 = \delta_0^2 + \theta\delta_1^2, \qquad \nabla^2 = 2\delta_0\delta_1. \tag{I}$$

Нетрудно проверить, что расстояние Δ совпадает с расстоянием двух прямых пространств S_3^1 и ${}^{ol}S_3^1$ в метриках базисного симметрического пространства, расстояние ∇ - с расстоянием двух прямых пространства Sp_3^1 в метрике пространства ${}^2R_4$. Формула (I) показывает, что группа движений плоскости $R_2(\theta)$ изоморфна пересечению группы движений пространства R_4 или ${}^2R_4$ с расстоянием Δ и группы движений пространства ${}^2R_4$ с расстоянием ∇.

Если характеризовать точки плоскости $R_2(\theta)$ координатами $\hat{X}^1 = X^1 + \theta X^2$, $\hat{X}^2 = X^3 + \theta X^4$, то расстояние δ прямой, изображаемой точкой $(\hat{X}^1, \hat{X}^2)$, от прямой, изображаемой точкой $(0, 0)$, определяется по формуле :

$$\delta^2 = (\hat{X}^1)^2 + (\hat{X}^2)^2 = (X^1)^2 + \theta^2(X^2)^2 + (X^3)^2 + \theta^2(X^4)^2 + 2\theta(X^1X^2 + X^3X^4), \tag{2}$$

откуда получаем, что

$$\Delta^2 = (X^1)^2 + \theta^2(X^2)^2 + (X^3)^2 + \theta^2(X^4)^2, \quad \nabla^2 = 2(X^1X^2 + X^3X^4). \tag{3}$$

В бесконечно удаленных гиперплоскостях пространств R_4 и ${}^2R_4$ при их дополнениях до пространства P_4 метрики пространств R_4 и ${}^2R_4$ определяют метрики пространств S_3 и ${}^2S_3$, левые части уравнений абсолютов которых имеют вид (3), откуда видно, что абсолют пространства ${}^2S_3$ с уравнением $\nabla^2 = 0$ является в случае пространства S_3' эквидистантой прямой пространства S_3, а в случае пространства ${}^{01}S_3'$ эквидистантой пары взаимно полярных мнимо сопряженных прямых пространства ${}^2S_3$ с абсолютом $\Delta^2 = 0$.

Составляя плюккеровы координаты p^{ij} прямых пространств S_3' и ${}^{01}S_3'$ и уравнение $a_{ij}p^{ij} = 0$ линейного комплекса, мы найдем, что линейные комплексы этих пространств изображаются гиперсферами пространства ${}^2R_4$ с метрикой ∇, а в случае, когда линейный комплекс содержит абсолютную прямую, – гиперплоскостью пространств R_4 и ${}^2R_4$. Составляя уравнения $a_{ij}p^{ij} = b_{ij}p^{ij} = 0$ линейной конгруэнции тех же пространств, мы найдем, что линейные конгруэнции пространств S_3' и ${}^{01}S_3'$ изображаются 2-сферами пространства ${}^2R_4$ с метрикой ∇, а в случае, когда линейная конгруэнция содержит абсолютную прямую,- 2-плоскостью пространств R_4 и ${}^2R_4$. Составляя уравнения $a_{ij}p^{ij} = b_{ij}p^{ij} = c_{ij}p^{ij} = 0$ семейства прямолинейных образующих квадрики тех же пространств, мы найдем, что семейства прямолинейных, образующих квадрики пространств S_3' и ${}^{01}S_3'$, изображаются окружностями пространства ${}^2R_4$ с метрикой ∇, а в случае, когда это семейство содержит абсолютную прямую, прямыми пространств R_4 и ${}^2R_4$.

§ 2. Комплексы прямых в квазисимплектическом 3-пространстве

Произвольный комплекс прямых пространств S_3', ${}^{01}S_3'$ и Sp_3' изображается в пространствах R_4 и ${}^2R_4$ гиперповерхностью $x = x(u^1, u^2, u^3)$ этих пространств; будем рассматривать такие комплексы прямых, которые изображаются главными гиперповерхностями.

В частности, комплекс прямых пространства Sp_3' изображается гиперповерхностью пространства ${}^2R_4$ с метрикой ∇. Так как на гиперповерхности пространства ${}^2R_4$ можно определить I-ю и 2-ю основные квадратичные дифференциальные формы:

$$I = ds^2 = a_{ij}\,du^i du^j, \qquad a_{ij} = x_i x_j , \tag{5}$$

$$\mathrm{II} = b_{ij}\,du^i du^j, \qquad b_{ij} = n x_{ij} = -n_i x_j = -n_j x_i , \tag{6}$$

эти формы можно определить и на комплексе прямых пространства Sp_3'.

Так как условие $\nabla = 0$ равносильно условию пересечения двух прямых пространства Sp_3', условие $ds^2 = 0$ для кривой $x = x(t)$ равносильно тому, что линейчатая поверхность пространства Sp_3', изображаемая этой кривой, является развертывающейся поверхностью. В общем случае конусы $a_{ij}X^iX^j = 0$ и $b_{ij}X^iX^j = 0$ в касательной гиперплоскости к поверхности имеют 4 общих прямолинейных образующих; точки пересечения прямой комплекса с ребрами возврата развертывающихся поверхностей комплекса, изображающихся кривыми, касательными к этим 4 прямолинейным образующим, являются инфлекционными центрами этой прямой комплекса [3, с.27], а линии кривизны гиперповерхности изображают главные линейчатые поверхности комплекса (инфлекционные точки и главные линейчатые поверхности комплекса инвариантны относительно коллинеаций пространства P_3, изображающихся в пространстве ${}^2R_4$ с метрикой ∇ конформными преобразованиями, при которых формы (5) и (6) умножаются на множители).

Так как формы (5) и (6) определяют гиперповерхность пространств R_n и ${}^tR_n$ с точностью до движения этих пространств [4, с.466], а группа движений пространства ${}^2R_4$ изображает фундаментальную группу пространства Sp_3', формы (5), (6) определяют комплекс прямых пространства Sp_3' с точностью до преобразования фундаментальной группы этого пространства. Так как в основном случае тензор b_{ij} формы (6) в пространствах R_n и ${}^tR_n$ при $n>3$ выражается через тензор a_{ij} формы (5) и его производные [4, с.467], то в основном случае комплексы прямых пространства определяются с точностью до преобразования фундаментальной группы этого пространства одной формой (5).

Главные кривизны гиперповерхности являются инвариантами прямых комплекса относительно фундаментальной группы пространства Sp_3'.

§ 3. Комплексы прямых в квазиэллиптическом 3-пространстве

Так как на гиперповерхности пространства R_4 также можно определить I-ю и 2-ю основные квадратичные дифференциальные формы

$$I = ds^2 = g_{ij}\,du^i du^j, \qquad g_{ij} = x_i x_j , \tag{7}$$

$$\mathrm{II} = h_{ij}\,du^i du^j, \quad h_{ij} = n x_{ij} = -n_i x_j = -n_j x_i , \tag{8}$$

где скалярные произведения векторов – скалярные произведения пространства R_4, эти формы можно определить и на комплексе прямых пространства S_3^1. Так как тензоры b_{ij} и h_{ij} являются частными случаями асимптотического тензора гиперповерхности аффинного пространства E_4 [5, с.128], определенного с точностью до множителя, тензор h_{ij} отличается от тензора b_{ij} только скалярным множителем.

Так как формы (7) и (8) определяют гиперповерхность пространства R_4 с точностью до движения этого пространства, а группа движений пространства S_3^1 изоморфна пересечению групп движений пространства R_4 и пространства ${}^2R_4$ с расстоянием ∇, формы (5), (6), (7) и (8) определяют комплекс прямых пространства S_3^1 с точностью до движения этого пространства. Так как в основном случае тензоры b_{ij} и h_{ij} выражаются через тензоры a_{ij} и g_{ij} и их производные, в основном случае комплекс прямых пространства S_3^1 определяется с точностью до движения этого пространства формами (5) и (7).

Линии кривизны гиперповерхности изображают линейчатые поверхности комплекса, которые можно назвать метрическими главными линейчатыми поверхностями комплекса. Главные кривизны гиперповерхности пространства R_4, наряду с определенными выше квазисимплектическими инвариантами прямых комплекса, являются метрическими инвариантами прямых комплекса.

Пара форм (5) и (7) определяет параметр распределения прямой комплекса в направлении, определяемом дифференциалами du^i; так как параметр распределения можно определить по формуле :

$$p = \lim_{\delta_1,\delta_2 \to 0} \frac{\delta_1}{\delta_2} , \tag{9}$$

то

$$\frac{a_{ij}du^i du^j}{g_{ij}du^i du^j} = \lim_{\delta_0,\delta_1\to 0}\frac{2\delta_0\delta_1}{\delta_0^2+\delta_1^2} = \frac{2p}{1+p^2}\,. \qquad (10)$$

Формы (5) и (7) определяют распределительные линейчатые поверхности комплекса, соответствующие стационарным значениям параметра распределения.

Заметим, что формы (7) и (5) в случае пространства представляют собой вещественную и чисто двойную часть двойной метрической формы

$$G_{ij}du^i du^j = g_{ij}du^i du^j + \theta a_{ij}du^i du^j \qquad (11)$$

$(\theta = e)$ вещественной 3-поверхности двойной плоскости $R_2(e)$, изображающей комплекс прямых пространства S_3^1, и, следовательно, в основном случае комплекс прямых пространства S_3^1 определяется с точностью до движения одной двойной формой (II).

Комплексы прямых в пространстве S_3^1 обладают также инвариантом, определяемым дифференциальной окрестностью первого порядка прямой комплекса - углом между нормалями к касательной гиперплоскости к гиперповерхности, изображающей комплекс в пространствах R_4 и ${}^2R_4$, в метрике пространства R_4; этот инвариант может быть выражен через "кривизну" комплекса в пространстве S_3^1, определяемую аналогично "кривизне" комплекса в эллиптическом пространстве S_3 [4, с.260].

§ 4. Комплексы прямых в квазигиперболическом 3-пространстве

Формы (7) и (8), где скалярные произведения векторов - скалярные произведения пространства ${}^2R_4$ с расстоянием Δ, определяются и на комплексах прямых пространства ${}^{01}S_3^1$. Так же, как и в случае пространства S_3^1, показывается, что в случае пространства ${}^{01}S_3^1$ тензор h_{ij} отличается от тензора b_{ij} только скалярным множителем, формы (5), (6), (7), (8) определяют комплекс прямых пространства ${}^{01}S_3^1$ с точностью до движения этого пространства, и, в основном случае, комплекс прямых пространства ${}^{01}S_3^1$ определяется с точностью до движения этого пространства формами (5) и (7), а также определяются метрические главные линейчатые поверхности комплекса и метрические инварианты прямых комплекса. Так как в

случае пространства $^{01}S_3^1$ обе формы (7) и (8) знаконеопределенные, в общем случае конусы $g_{ij}X^iX^j=0$ и $h_{ij}X^iX^j=0$ (последний из которых совпадает с конусом $b_{ij}X^iX^j=0$) в касательной гиперплоскости к гиперповерхности имеют 4 общих прямолинейных образующих; на каждой прямой комплекса пространства $^{01}S_3^1$ определены 4 точки, являющиеся горловыми точками линейчатых поверхностей комплекса, изображающихся кривыми, касательными к этим 4 прямым. Эти точки, являющиеся аналогами инфлекционных центров прямых комплекса, можно назвать метрическими центрами прямых комплекса.

Пара форм (5) и (7) в случае пространства $^{01}S_3^1$ также определяет параметр распределения прямой комплекса в направлении, определяемом дифференциалами du^i, в этом случае формула (10) заменяется формулой

$$\frac{a_{ij}du^idu^j}{g_{ij}du^idu^j}=\lim_{\delta_0,\delta_1\to 0}\frac{2\delta_0\delta_1}{\delta_0^2-\delta_1^2}=\frac{2p}{1-p^2}. \qquad (12)$$

В случае пространства $^{01}S_3^1$ конусы $a_{ij}X^iX^j=0$ и $g_{ij}X^iX^j=0$ в касательной гиперплоскости к гиперповерхности также имеют 4 общих прямолинейных образующих, поэтому на каждой прямой комплекса пространства $^{01}S_3^1$ определены еще 4 точки пересечения с ребрами возврата соответственных развертывающихся поверхностей комплекса; для этих направлений $\delta_0=\delta_1=0$, т.е. метрические инварианты прямолинейных образующих этих поверхностей являются бесконечно малыми высших порядков; будем называть эти точки распределительными центрами прямых комплекса. Формы (5) и (7) в случае пространства $^{01}S_3^1$ также определяют распределительные линейчатые поверхности комплекса, соответствующие стационарным значениям параметра распределения.

Заметим, что формы (7) и (5) в случае пространства $^{01}S_3^1$ представляют собой вещественную и мнимую части комплексной метрической формы (11) ($\theta=i$) вещественной 3-поверхности комплексной плоскости $R_2(i)$, изображающей комплекс прямых пространства $^{01}S_3^1$, и, следовательно, в основном случае, комплекс прямых пространства $^{01}S_3^1$ определяется с точностью до движения одной комплексной формой (11).

Комплексы прямых в пространстве $^{01}S_3^1$ также обладают

инвариантом, определяемым дифференциальной окрестностью первого порядка прямой комплекса – углом между нормалями к касательной гиперплоскости к гиперповерхности, изображающей комплекс в обоих пространствах $^2R_4$ в метрике пространства $^2R_4$ с расстоянием Δ ; этот инвариант может быть выражен через "кривизну" комплекса в пространстве $^{01}S_3^1$, определяющейся аналогично"кривизне" комплекса ь пространстве Лобачевского $^1S_3$ [4, с.281].

Литература

I. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М., "Наука", I969.

2. Железина И. И. Линейчатая геометрия вырожденных неевклидовых пространств. – Доклады АН СССР, т.I06, № 6, I956, с.959-962.

3. Кованцов Н. И. Теория комплексов.Киев, Изд-во Киевск.ун-та, I963.

4. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., "Наука", I966.

5. Широков П. А., Широков А. П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., ГИТТЛ, I959.

Б.А. Розенфельд, Т.А. Степашко

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ОБРАЗОВ ПРОСТОТЫ

Образы простоты [I] – важнейшие, наряду с образами симметрии, геометрические образы однороцных пространств. В случае, когда фундаментальная группа однороцного пространства является простой вещественной или комплексной группой Ли, эти образы, вместе с более общими образами полупростоты, характеризуются тем, что их стационарные подгруппы являются параболическими подгруппами фундаментальных групп; в случае образов простоты эти подгруппы определяются одним простым корнем группы, а в случае образов полупростоты – несколькими простыми