В. Г. Пузаренко, О вычислимости над моделями разрешимых теорий,
Алгебра и логика, 2000, том 39, номер 2, 170–197

Алгебра и логика, 39, N 2 (2000), 170—197

УДК 510.5

О ВЫЧИСЛИМОСТИ НАД МОДЕЛЯМИ РАЗРЕШИМЫХ ТЕОРИЙ*)

В. Г. ПУЗАРЕНКО

Моему учителю
Юрию Леонидовичу Ершову
ко дню 60-летия

Естественным обобщением вычислимости на $\mathbf{N}$ можно считать теорию рекурсии на наследственно конечных надстройках односортных моделей при естественном отождествлении понятий Δ- и Σ-предикатов с рекурсивными и рекурсивно перечислимыми предикатами.

В этой работе рассматриваются только модели конечных сигнатур.

В § 1 вводятся понятия, обозначения и вспомогательные конструкции, используемые при доказательстве основных результатов. Терминология согласована с терминологией монографии [1].

В § 2 приводится критерий Σ-определимости подмножеств наследственно конечных надстроек над моделями конечных сигнатур. Он состоит в том, что любой Σ-предикат на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ произвольной модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры определяется некоторой вычислимой последовательностью множеств, состоящих из гёделевых номеров $\exists$-формул сигнатуры модели $\mathfrak{M}$. Критерий Σ-определимости лежит в основе доказательства бóльшей части результатов настоящей работы.

В § 3 дается характеризация простых теорий (в смысле определения

*)Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы "Интеграция", проект 274, и Российским фондом фундаментальных исследований, проект 99-01-00600.

из [1]) в терминах наследственно конечных надстроек над моделями данной теории.

В § 4 развивается идея нестандартной теории рекурсии (см. [2]): рассматривается обобщение понятия относительной рекурсивности подмножеств натуральных чисел, при этом роль оракула играет модель $\mathfrak{M}$, а натуральные числа отождествляются с ординалами надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

В § 5 приводится алгебраическое описание полурешетки $m\Sigma$-степеней подмножеств наследственно конечной надстройки с точки зрения обычной (классической) теории рекурсии.

§ 1. Понятия, обозначения, конструкции

Напомним некоторые понятия теории рекурсии на допустимых множествах. Пусть $\mathbb{A}$ — произвольная KPU-модель.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $\mathbb{A}$-*нумерацией множества* S называется произвольное отображение ν некоторого Σ-подмножества $B \subseteq A$ на множество $S(\nu : B \overset{\text{на}}{\to} S)$; при этом B будем называть *областью определения* $\mathbb{A}$-нумерации ν и обозначать δ_ν.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $S \subseteq \Sigma(A)$ — некоторое семейство Σ-подмножеств множества A, то $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to S$ назовем *вычислимой*, если предикат $\{\langle a, b\rangle \mid b \in B, a \in \nu(b)\}$ является Σ-предикатом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to S$ назовем *разрешимой*, если предикат $\{\langle b_0, b_1\rangle \in B^2 \mid \nu(b_0) = \nu(b_1)\}$ является Δ_B-предикатом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to S$ назовем *однозначной*, если отображение ν взаимно однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\nu : B \to M$ является $\mathbb{A}$-нумерацией. Предикат $P \subseteq M^n$ на M назовем

Σ_ν-*предикатом*, если $\{\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \mid \bar{b} \in B^n, \langle \nu b_1, \ldots, \nu b_n\rangle \in P\}$ является Σ-предикатом;

Δ_ν-*предикатом*, если P и $M^n \setminus P$ являются Σ_ν-предикатами.

Функцию $F : M^n \to M$ назовем Σ_ν-*функцией*, если график Γ_F функции F является Σ_ν-предикатом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{M}}, F_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, F_k^{\mathfrak{M}}, c_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}}\rangle$ — модель сигнатуры $\langle P_0^{l_0}, \ldots, P_n^{l_n}, F_0^{m_0}, \ldots, F_k^{m_k}, c_0, \ldots, c_p\rangle$. $\mathbb{A}$-нумерацию $\nu : B \to M$ носителя модели $\mathfrak{M}$ назовем $\mathbb{A}$-*конструктивизацией* модели $\mathfrak{M}$, если предикат равенства и предикаты $P_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, P_n^{\mathfrak{M}}$ являются Δ_ν-предикатами, а $F_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, F_k^{\mathfrak{M}}, c_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}}$ — Σ_ν-функциями (выделенные элементы рассматриваем как 0-местные функции).

Пару $(\mathfrak{M}, \nu)$, где $\nu : B \to M$ является $\mathbb{A}$-конструктивизацией модели $\mathfrak{M}$, назовем $\mathbb{A}$-*конструктивной* моделью.

Пусть φ — формула сигнатуры σ и $\mathrm{P}^1 \notin \sigma$ — одноместный предикатный символ. Определим формулу φ^{P} индукцией по построению формулы φ:

если φ — атомарная формула, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \varphi$;

если $\varphi = \varphi_0 \circ \varphi_1$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \varphi_0^{\mathrm{P}} \circ \varphi_1^{\mathrm{P}}$, где $\circ \in \{\to, \wedge, \vee\}$;

если $\varphi = \neg\varphi_0$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \neg\varphi_0^{\mathrm{P}}$;

если $\varphi = \forall v \varphi_0$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \forall v(\mathrm{P}(v) \to \varphi_0^{\mathrm{P}})$;

если $\varphi = \exists v \varphi_0$, то $\varphi^{\mathrm{P}} = \exists v(\mathrm{P}(v) \wedge \varphi_0^{\mathrm{P}})$, где v — переменная.

Заметим, что если σ — вычислимая сигнатура, то преобразование $\varphi \longmapsto \varphi^{\mathrm{P}}$ будет эффективным.

Пусть $(\mathfrak{M}, \nu)$ — это $\mathbb{A}$-конструктивная модель, где $\mathfrak{M} = \langle M, P_0^{\mathfrak{M}}, \ldots$ $\ldots, P_n^{\mathfrak{M}}, F_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, F_k^{\mathfrak{M}}, c_0^{\mathfrak{M}}, \ldots, c_p^{\mathfrak{M}}\rangle$ является моделью сигнатуры $\langle P_0^{l_0}, \ldots, P_n^{l_n}, F_0^{m_0}, \ldots, F_k^{m_k}, c_0, \ldots, c_p\rangle$, $\mathbb{A}$ — некоторая KPU-модель сигнатуры σ^*. По определению существуют Σ-формулы φ_{M}, $\varphi_=$, $\varphi_{\neq}$, φ_{P_0}, $\varphi_{\neg P_0}, \ldots, \varphi_{P_n}$, $\varphi_{\neg P_n}$, $\varphi_{F_0}, \ldots, \varphi_{F_k}$, $\varphi_{c_0}, \ldots, \varphi_{c_p}$, определяющие носитель модели, соответствующие отношения и их дополнения, функции и выделенные элементы в KPU-модели $\mathbb{A}$.

В качестве атомарных формул сигнатуры σ можно рассматривать только формулы вида $(x = F(y_1, \ldots, y_m))$, $(x = c)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$, где $x, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ — любые переменные языка, причем для произвольной атомарной формулы φ существуют $\exists$- и $\forall$-формулы φ_0 и φ_1, эквивалентные формуле φ и содержащие в качестве атомарных подформул только формулы вида $(x = F(y_1, \ldots, y_m))$, $(x = c)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$ (см. лемму 1.2.2 [1]). Кроме того, используя эквивалентности

$$\neg(x = F(y_1, \ldots, y_m)) \Leftrightarrow \exists z((z = F(y_1, \ldots, y_m)) \wedge \neg(z = x)),$$

$$\neg(x = c) \Leftrightarrow \exists z((z = c) \wedge \neg(x = z)),$$

можно показать, что любая формула эквивалентна формуле, в которой отрицания встречаются только при атомарных формулах вида $P(x_1, \ldots, x_n)$ и $(x = y)$, где $x, x_1, \ldots, x_n, y$ — переменные языка. Оформим вышеприведенные конструкции в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 1. 1. *Пусть заданы* KPU-*модель* $\mathbb{A}$ *и* $\mathbb{A}$-*конструктивизация* ν *модели* $\mathfrak{M}$ *сигнатуры* σ. *Тогда для любой формулы* φ *сигнатуры* σ *и для любого означивания* $\gamma : FV(\varphi) \to \varphi_M^{\mathbb{A}}[x_0]$ *выполняется следующее соотношение*

$$\mathbb{A} \models (\varphi^P)^{P,P_0,\ldots,P_n,F_0,\ldots,F_k,c_0,\ldots,c_p,=}_{\varphi_M,\varphi_{P_0},\ldots,\varphi_{P_n},\varphi_{F_0},\ldots,\varphi_{F_k},\varphi_{c_0},\ldots,\varphi_{c_p},\varphi_=}[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi[\nu\gamma].$$

Если же $\varphi(x_0, \ldots, x_{l-1})$ *является* $\exists$-*формулой, то*

$$((\varphi^P)^{P,P_0,\ldots,P_n,F_0,\ldots,F_k,c_0,\ldots,c_p,=}_{\varphi_M,\varphi_{P_0},\ldots,\varphi_{P_n},\varphi_{F_0},\ldots,\varphi_{F_k},\varphi_{c_0},\ldots,\varphi_{c_p},\varphi_=})^{\mathbb{A}}[x_0, \ldots, x_{l-1}]$$

будет Σ_A-*предикатом.*

2. *Пусть заданы* KPU-*модель* $\mathbb{A}$ *и транзитивное* Σ-*подмножество* P, *для которого* $\mathbb{A} \upharpoonright P$ *является* KPU-*моделью. Тогда любое* Σ-*подмножество* $\mathbb{A} \upharpoonright P$ *будет* Σ-*подмножеством* $\mathbb{A}$. *Если же* P *является* Δ-*подмножеством* $\mathbb{A}$, *то любое* Σ_n-*подмножество* $\mathbb{A} \upharpoonright P$ *будет* Σ_n-*подмножеством* $\mathbb{A}$, $n \geqslant 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathbb{A}$ — некоторая KPU-модель. Подмножество $B \subseteq \mathbb{A}$ назовем *чистым*, если $B \subseteq \{x \in A \mid \mathrm{sp}(x) = \varnothing\}$. Если $\mathbb{A}$ — наследственно конечная надстройка, то чистую часть такой KPU-модели будем обозначать $\mathrm{HF}_\varnothing$.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ — *наследственно конечная надстройка произвольной модели* $\mathfrak{A}$. *Тогда произвольный* Σ_n-*предикат на множестве натуральных чисел является* Σ_n-*предикатом на наследственно конечной надстройке* $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ *при естественном отождествлении натуральных чисел и ординалов надстройки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из теоремы 2.1.1 [1] и леммы 1. □

Рассмотрим наследственно конечную надстройку $\mathbb{D} = \mathbb{HF}(\omega)$, множеством праэлементов которой является множество ω натуральных чисел. Определим конструктивизацию ε этой надстройки (см. [3]):

$$\varepsilon(n) \leftrightharpoons \begin{cases} k(\in \omega), & \text{если } n = 2k+1, \\ \varnothing, & \text{если } n = 0, \\ \{\varepsilon(k_i) \mid n = 2(2^{k_0} + \ldots + 2^{k_s}),\ k_0 < \ldots < k_s\} \\ & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

По теореме о Σ-рекурсии функция ε является Σ_D-функцией. Естественным образом с функцией ε связана однозначная конструктивизация δ множества термов $T = \{t_\varkappa \mid \varkappa \in \omega\}$. Определение терма $t_\varkappa$ дано в [1]. Как там показано, это семейство термов определимо формулой в произвольной наследственно конечной надстройке (более того, Δ-определимо). Сама конструктивизация термов отождествляется с Σ-функцией на $\mathbb{HF}(\omega)$, которая каждому числу n сопоставляет элемент $\delta(n)$ такой, что $\mathrm{sp}(\delta(n))$ — начальный сегмент натуральных чисел. Обозначим через $n_\varkappa$ число элементов множества $\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa))$. Нетрудно убедиться в том, что функция $\varkappa \mapsto n_\varkappa$ рекурсивна. Более того, для надстройки $\mathbb{HF}(\omega)$ справедлива

ЛЕММА 3. $P \subseteq (\mathrm{HF}(\omega))^n$ *является Σ-предикатом на* $\mathbb{HF}(\omega)$ $\Leftrightarrow$ *предикат* $\varepsilon^{-1}(P) \leftrightharpoons \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in \mathbb{N} \mid \langle \varepsilon(a_1), \ldots, \varepsilon(a_n)\rangle \in P\}$ *рекурсивно перечислим. Кроме того, последовательность* $A_n \leftrightharpoons \{m \in \mathbb{N} \mid \varepsilon(m) \in^{\mathbb{D}}$ $\in^{\mathbb{D}} \varepsilon(n)\}$ *сильно вычислима.*

В этой работе неоднократно используется следующая

ЛЕММА 4. *Пусть* $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)$, $\mathbb{B} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M}_1)$ — *наследственно конечные надстройки над моделями* $\mathfrak{M}_0 = \langle M_0, \sigma_0\rangle$, $\mathfrak{M}_1 = \langle M_1, \sigma_1\rangle$ *соответственно, а* $X_0 \subseteq M_0$, $X_1 \subseteq M_1$ — *произвольные равномощные подмножества. Тогда любой изоморфизм f между множествами X_0 и X_1 продолжается, причем единственным образом, до изоморфизма* $f^\#$ *наследственно конечных надстроек* $\mathrm{HF}(X_0)(\subseteq A))$ *и* $\mathrm{HF}(X_1)(\subseteq B))$.

Более того, если $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ *и* f *является* Σ_A*-функцией, то и* $f^{\#}$ *также будет* Σ_A*-функцией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть леммы 4 доказывается индукцией по рангу, а вторая — методом Σ-рекурсии. □

Пусть $\mathbb{C}$ — KPU-модель и $\mathrm{FUN}(C)$ — множество всех C-конечных функций. Для функций f и g обозначим через $\mathrm{comp}(f,g) \rightleftharpoons g \circ f$ операцию композиции. Эта операция является Σ-функцией (более того, она определима Δ_0-формулой).

ЛЕММА 5. *Пусть* $\mathbb{A}_0 = \mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ *— произвольная наследственно конечная надстройка. Тогда существует четырехместное* Δ*-отношение* Un *на* $\mathbb{A}_0$ *такое, что*

$$\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \models (x_0 = t_\varkappa(x_1,\ldots,x_k))[\gamma_{g_0'}], \\ \mathbb{HF}(\omega) \models (x_0 = t_\varkappa(x_1,\ldots,x_k))[\gamma_{\varepsilon\circ g_1'}], \end{cases}$$

где $g_0' = g_0 \cup \{\langle 0, a\rangle\}$, $g_1' = g_1 \cup \{\langle 0, \varkappa\rangle\}$; g_0 *и* g_1 *— взаимно однозначные отображения между начальным сегментом натуральных чисел и* $\mathrm{sp}(a)$, $\varepsilon^{-1}(\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa)))$ *соответственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим Σ-формулу $\Phi(x_0, x_1, x_2, x_3)$, выражающую следующее:

$$\begin{aligned}&(U(x_0) \wedge N'(x_1) \wedge (x_2 = \{\langle 1, x_0\rangle\}) \wedge (x_3 = \{\langle 1,\ x_1\rangle\})) \vee (\neg U(x_0) \wedge \\ &\neg N'(x_1) \wedge N(x_1)) \wedge \exists f(\mathrm{fun}(f) \wedge (f : \langle TC(x_0),\ \in^{\mathbb{A}_0}\rangle \overset{\sim}{\to} \langle TC(\varepsilon(x_1)), \\ &\in^{\mathbb{HF}(\omega)}\rangle) \wedge (\rho(f \restriction x_0) = \varepsilon(x_1)) \wedge (x_2 : ((n_{x_1} + 1) \setminus \{\varnothing\}) \longrightarrow \qquad (*) \\ &\mathrm{sp}(x_0)) \wedge (x_3 : ((n_{x_1}+1) \setminus \{\varnothing\}) \longrightarrow \varepsilon^{-1}\mathrm{sp}(\varepsilon(x_1))) \wedge (x_2 - \text{биекция}) \wedge \\ &(x_3 - \text{биекция}) \wedge (\mathrm{comp}(x_3, \varepsilon \restriction \rho x_3) = \mathrm{comp}(x_2, f)))),\end{aligned}$$

где N и N' — множество ординалов и “нечетных” ординалов соответственно. Нетрудно убедиться в том, что формула Φ эквивалентна некоторой П-формуле, поэтому предикат $\Phi^{\mathbb{A}_0}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ является Δ-определимым.

Докажем индукцией по построению терма $t_\varkappa$, что этот предикат удовлетворяет условию леммы.

a) Если $\varepsilon(\varkappa) \in \mathrm{HF}_\varnothing$, то $(\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un} \Leftrightarrow ((a = \varepsilon(\varkappa)) \wedge (g_0 = g_1) \wedge (g_0 = \varnothing)))$. Действительно, если $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, то индукцией по рангу элемента $\varepsilon(\varkappa)$ легко показать, что $a = \varepsilon(\varkappa)$. Выполнимость условия $g_0 = g_1 = \varnothing$ следует из существования биекции между $\mathrm{sp}(a)$ и $\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa))$.

b) Если $\varepsilon(\varkappa) \in \omega$, то $(\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un} \Leftrightarrow ((a = t_\varkappa(a)) \wedge (\varepsilon(\varkappa) = t_\varkappa(\varepsilon(\varkappa))) \wedge (g_0 = \{\langle 1, a\rangle\}) \wedge (g_1 = \{\langle 1, \varkappa\rangle\})))$.

c) Рассмотрим случай, когда $\varepsilon(\varkappa) = \{\varepsilon(\varkappa')\}$ и $\varepsilon(\varkappa') \notin \omega$. Если $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, то $\langle a', \varkappa', g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$ и $a = \{a'\}$. Тогда из индукционного предположения и определения терма $t_\varkappa$ заключаем, что $a = t_\varkappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\varkappa))$ и $\varepsilon(\varkappa) = t_\varkappa(\varepsilon(g_1(1)), \ldots, \varepsilon(g_1(n_\varkappa)))$. Покажем достаточность. Если $a = t_\varkappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\varkappa))$ и $\varepsilon(\varkappa) = t_\varkappa(\varepsilon(g_1(1)), \ldots \ldots, \varepsilon(g_1(n_\varkappa)))$, то по индукционному предположению $\langle a', \varkappa', g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, а из определения предиката Un следует, что найдется A_0-конечная функция f_0, осуществляющая изоморфизм между $\langle TC(a'), \in\rangle$ и $\langle TC(\varepsilon(\varkappa')), \in\rangle$, причем $\varepsilon \circ g_1 = f_0 \circ g_0$. Тогда $f(\leftrightharpoons f_0 \cup \{\langle a', \varkappa'\rangle\})$ — функция из $(*)$ такая, что кортеж $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle$ удовлетворяет предикату Un.

d) Случай $\varepsilon(\varkappa) = \{\varepsilon(\varkappa')\} \subset \omega$ рассматривается аналогично п. *b*.

e) Рассмотрим случай, когда $\varepsilon(\varkappa) = \varepsilon(\varkappa_0) \cup \varepsilon(\varkappa_1)$. Установим сначала необходимость. Так как $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$, то найдется A_0-конечная функция f_0, осуществляющая изоморфизм между $\langle TC(a), \in\rangle$ и $\langle TC(\varepsilon(\varkappa)), \in\rangle$ такая, что $\varepsilon \circ g_1 = f_0 \circ g_0$. Рассмотрим $a_0 \leftrightharpoons f_0^{-1}(\varepsilon(\varkappa_0))$ и $a_1 \leftrightharpoons f_0^{-1}(\varepsilon(\varkappa_1))$. Из определения функции TC следует, что $TC(a) = TC(a_0) \cup TC(a_1)$, вследствие чего $\langle a_i, \varkappa_i, g_0^i, g_1^i\rangle \in \mathrm{Un}$, в качестве функции f можно взять функцию $f_0 \restriction TC(a_i)$, при этом элементы g_0 и g_1 определяются следующим образом: $g_0^i \leftrightharpoons g_0 \circ \varphi_i$, где φ_i — это A_0-конечная биекция начального сегмента натуральных чисел без нуля на $g_0^{-1}(\mathrm{sp}(a_i))$; $g_1^i \leftrightharpoons \varepsilon^{-1} \circ f_0 \circ g_0^i$, $i = 0, 1$. Тогда по предположению индукции и определению терма $a = t_{\varkappa_0}(g_0^0(1), \ldots \ldots, g_0^0(n_{\varkappa_0})) \cup t_{\varkappa_1}(g_0^1(1), \ldots, g_0^1(n_{\varkappa_1})) = t_\varkappa(g_0(1), \ldots, g_0(n_\varkappa))$.

Покажем достаточность. Если $a = t_\varkappa(u_1, \ldots, u_{n_\varkappa})$, то $a = a_0 \cup a_1$ и $a_i = t_{\varkappa_i}(u_1^i, \ldots, u_{n_{\varkappa_i}}^i)$, $i = 0, 1$. По индукционному предположению $\langle a_i, \varkappa_i, g_0^i, g_1^i\rangle \in \mathrm{Un}$ для подходящих функций g_0^i, g_1^i, $i = 0, 1$, причем функции f_0 и f_1, участвующие в определении предиката, можно выбрать такими, что $f_0 \cup f_1$ будет функцией. Рассмотрим функции $h_0 \leftrightharpoons \varepsilon \circ g_1^0 \circ (g_0^0)^{-1}$ и $h_1 \leftrightharpoons \varepsilon \circ g_1^1 \circ (g_0^1)^{-1}$. Тогда $h_0 : \mathrm{sp}(a_0) \overset{1-1}{\to} \mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa_0))$ и $h_1 : \mathrm{sp}(a_1) \overset{1-1}{\to} \mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa_1))$. По определению терма $t_\varkappa$ функция $h \leftrightharpoons h_0 \cup h_1$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{sp}(a)$ на $\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa))$. Тогда существует единственный изоморфизм $h^{\#}$ между $\mathrm{HF}(\mathrm{sp}(a))$ и $\mathrm{HF}(\mathrm{sp}(\varepsilon(\varkappa)))$, продолжающий изоморфизм h. Отсюда $f_0 = h^{\#} \upharpoonright TC(a_0)$, $f_1 = h^{\#} \upharpoonright TC(a_1)$, $f \leftrightharpoons f_0 \cup f_1$ — функция из $(*)$ и такая, что $\langle a, \varkappa, g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Un}$ для подходящих функций g_0, g_1. □

Для модели $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, \{\mathrm{P}_i^{\mathfrak{M}}\}_{i\in I}, \{\mathrm{F}_j^{\mathfrak{M}}\}_{j\in J}, \{c_k^{\mathfrak{M}}\}_{k\in K}\rangle$ сигнатуры $\sigma = \langle \{\mathrm{P}_i^{n_i}\}_{i\in I}, \{\mathrm{F}_j^{n_j}\}_{j\in J}, \{c_k^{n_k}\}_{k\in K}\rangle$ будем использовать обозначение $\langle \mathrm{M}, \sigma\rangle$, а через $\langle \mathrm{HF}(\mathrm{M}), \sigma^*\rangle$ обозначим надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над моделью $\mathfrak{M}$.

§ 2. Критерий Σ-определимости и его следствия

HF-язык является определимой (в некотором смысле) частью языка $\mathrm{L}_{\omega_1,\omega}$. В данном параграфе содержится ответ на вопрос о том, какие формулы бесконечного языка соответствуют Σ-формулам.

Для простоты изложения результатов этого параграфа будем различать два сорта переменных: прапеременные и общие переменные. Прапеременные обозначим символами $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, а общие переменные — символами $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Прежде чем перейти к изложению основного результата, приведем пример надстроек, в котором каждая формула языка $\mathrm{L}_{\omega_1,\omega}$ эквивалентна некоторой конечной формуле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\mathfrak{M}_0 = \langle \mathrm{M}_0, \sigma_0\rangle$ — модель ω-категоричной теории T и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) = \langle \mathrm{HF}(\mathrm{M}_0), \sigma_0^*\rangle$ — наследственно-конечная надстройка над моделью $\mathfrak{M}_0$. Тогда для любой формулы $\Phi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$, $m \geqslant 0$, (если $m = 0$, то Φ является предложением) сигнатуры σ_0^* (возможно с параметрами из M_0) существует формула $\varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ сигнатуры σ_0 (с теми же параметрами) такая, что*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0) \models \Phi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})[\gamma] \Leftrightarrow \mathfrak{M}_0 \models \varphi(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})[\gamma]$$

для любого означивания $\gamma : \{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\} \longrightarrow \mathrm{M}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.4.5 [1] и теореме 3.4.1 [1] для элементов $\bar a\ (= a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $\bar b\ (= b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathrm{M}$ выполняется следующее соотношение:

$$(t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)}(\bar a) = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)}(\bar b)) \Leftrightarrow (t^{\mathfrak{M}_0}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = t^{\mathfrak{M}_0}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})).$$

По теореме Рылль-Нардзевского (см. [4]) любая формула сигнатуры σ_0 T-эквивалентна конечной дизъюнкции полных формул теории T. Рассматривая всевозможные полные формулы, выполнимые в $\mathfrak{M}_0$ на кортежах $\bar a$, для которых $\Phi \in t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}_0)}(\bar a)$, получаем требуемое. □

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathrm{M}, \sigma\rangle$, $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) = (\mathrm{HF}(\mathrm{M}), \sigma^*)$ — произвольная модель конечной сигнатуры и наследственно конечная надстройка над этой моделью соответственно.

Рассмотрим произвольную формулу $\Phi(x_0)$ от одной переменной (возможно, с параметрами из M) сигнатуры σ^*. Тогда существуют формулы $\Phi_\varkappa$, $\varkappa \in \mathrm{HF}(\omega)$, такие, что имеет место эквивалентность:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0)^{x_0}_{t_\varkappa(u_0,\ldots,u_{n_\varkappa-1})}[\gamma] \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa-1})[\gamma] \qquad (2)$$

для любого означивания $\gamma : \{u_0, \ldots, u_{n_\varkappa-1}\} \to \mathrm{M}$. Формулу $\Phi_\varkappa$ по формуле Φ и номеру $\varkappa$ можно найти эффективно.

ЛЕММА 6. *Существует рекурсивная функция* $G : \mathrm{RQFor}^1_{\sigma^*} \times \times \mathrm{HF}(\omega) \longrightarrow \mathrm{RQFor}_{\sigma^*}$ (RQFor^1 — *это* RQ-*формулы с одной свободной переменной*) *такая, что для любого означивания* γ *выполняется*:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models (G(\Phi, \varkappa)(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa-1}) \leftrightarrow \Phi_\varkappa(u_0, \ldots, u_{n_\varkappa-1}))[\gamma].$$

Пусть $\mathrm{nt}(n) \leftrightharpoons 2n+1, n \in \mathbb{N}$. Обозначим через T_ω предикат

$$\{\langle a, b, c\rangle \mid \mathrm{Un}(a, \varepsilon^{-1}\delta(b), c, (\mathrm{nt} \restriction (|\mathrm{sp}(\delta(b))| \setminus \{\langle 0, 1\rangle\})) \cup \{\langle |\mathrm{sp}(\delta(b))|, 1\rangle\}\}.$$

Заметим, что T_ω является Δ-предикатом и для него справедливо

$$(a, \delta^{-1}\varepsilon(\varkappa), g) \in T_\omega \Leftrightarrow (a = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}_\varkappa(g_1, \ldots, g_{n_\varkappa})).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть f и g — две конечные функции, определенные на начальных сегментах натуральных чисел. Определим операцию *конкатенации* $\mathrm{concat}(f, g)$ следующим образом:

$$\mathrm{concat}(f,g)(n) \leftrightharpoons \begin{cases} f(n), & \text{если } n \in \delta f; \\ g(k), & \text{если } n = \delta f + k, k \in \delta g; \\ \text{не определена} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Применяя метод Σ-рекурсии, легко установить, что эта операция Σ-определима. Будем использовать следующие обозначения:

если $s_0, s_1, \ldots, s_{m-1} \in \mathrm{M}$, то $\hat{s} \leftrightharpoons \{\langle i, s_i\rangle \mid i < m\}$;

если g — конечная функция с областью определения δg, не содержащей 0, то $\tau(g) \leftrightharpoons \{\langle i-1, g(i)\rangle \mid i \in \delta g\}$ (нетрудно убедиться в том, что операция τ является Σ-определимой).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ *— наследственно конечная надстройка произвольной модели* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma\rangle$. *Тогда подмножество* $A \subseteq \mathrm{HF(M)}$ *определимо некоторой* Σ*-формулой* $\Phi(x_0, u_0, \ldots, u_{m-1})$ *с параметрами* $s_0, \ldots, s_{m-1}$ *в том и только в том случае, если существует вычислимая последовательность* A_n^Φ *гёделевых номеров* $\exists$*-формул сигнатуры* σ *такая, что*

$$A = \{a \mid \exists n \exists g(T_\omega(a,n,g) \wedge \exists\varphi((\varphi \in A_n^\Phi) \wedge\ (\mathfrak{M} \models \varphi[\gamma_{\mathrm{concat}(\tau(g),\hat{s})}])))\}.$$

При этом существует эффективная процедура перехода от Σ*-формулы (вычислимой последовательности) к некоторой вычислимой последовательности* (Σ*-формуле*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку предикат Tr_Σ истинности Σ-формул Σ-определим, то A является Σ-предикатом. Покажем достаточность. По лемме 6 найдется рекурсивная функция G, осуществляющая эффективный переход к формуле от прапеременных с определенными свойствами. Согласно принципу Σ-рефлексии (предложение 2.3.1 [1]) существует эффективная процедура ζ перехода от Σ-формулы к некоторой эквивалентной ей Σ_1-формуле. Таким образом, $G' \rightleftharpoons \zeta G(\Phi, \varepsilon^{-1}\delta(n))$ является рекурсивной функцией. Из конструкции, описанной в [1, § 3.4], следует наличие рекурсивной функции $H(\Phi, k)$ с областью определения $\mathrm{Dom}(H) = \{\langle \Phi, k\rangle \mid k \in \mathbb{N}, \Phi$ — Σ_1-формула от прапеременных сигнатуры $\sigma^*\}$ и с областью значений $\mathrm{Range}(H) \subseteq \mathrm{For}_\sigma$, причем имеет место следующее соотношение:

$$\Phi \equiv \bigvee_{k \in \omega} H(\Phi, k).$$

Для завершения доказательства осталось только заметить, что вычислимая последовательность $A_n^\Phi \leftrightharpoons \{m \in \omega \mid \exists k(m = H(G'(\Phi, n), k)\}$ удовлетворяет условию теоремы. □

Для случая Σ-формул над праэлементами теорема 1 была доказана Вайценавичюсом [5].

Слабым вариантом свойства униформизации является свойство редукции. К сожалению, как свойство униформизации, так и свойство редукции не имеют места в общем случае. Однако при наложении на теорию естественных условий в наследственно конечной надстройке над моделью этой теории свойство редукции будет выполняться.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Теорию T назовем *регулярной*, если она разрешима и модельно полна.

При доказательстве следующей леммы введем в рассмотрение ряд рекурсивных конструкций.

ЛЕММА 7. *Последовательность конечных множеств S_n, состоящая из перестановок множества $\mathrm{sp}(\delta(n))$, продолжение которых действует тождественно на $\delta(n)$, сильно вычислима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим естественную нумерацию ρ всех конечных подмножеств допустимого множества $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\omega)$, состоящих из упорядоченных пар элементов из ω:

$$\rho(k) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } k = 0; \\ \{\langle \varepsilon(\mathrm{nt}(l(x_0))), \varepsilon(\mathrm{nt}(r(x_0)))\rangle, \ldots, \langle \varepsilon(\mathrm{nt}(l(x_s))), \varepsilon(\mathrm{nt}(r(x_s)))\rangle\}, \\ \quad \text{если } k = 2^{x_0} + \ldots + 2^{x_s}, \ x_0 < \ldots < x_s. \end{cases}$$

Эту нумерацию можно определить Σ-рекурсией, а поэтому она Σ-определима, вследствие чего бинарное отношение $\rho(k) \in S(n)$ рекурсивно, где $S(n)$ — множество всех перестановок множества $[n] = \{0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1\}$ ($[0] = \varnothing$). Действительно, Σ-формула $\Phi(y, z)$, выражающая следующее:

$$\mathrm{fun}(\rho(y)) \wedge \forall x \in \mathrm{dom}(\rho(y))(x < z) \wedge \exists g(\mathrm{fun}(g) \wedge (g \text{ — инъекция})$$
$$\wedge (g : z \longrightarrow \mathrm{dom}(\rho(k)))) \wedge \mathrm{Ord}(z) \wedge (\mathrm{dom}(\rho(k)) = \mathrm{range}(\rho(k))),$$

эквивалентна некоторой Π-формуле (в определении используется тот факт, что "отождествление" элементов из ω и ординалов является

Σ-функцией), поэтому предикат $\Phi^{\mathbb{HF}(\omega)}[y,z]$ Δ-определим, а следовательно, рекурсивен. Отсюда (учитывая, что номера всех перестановок из $S(n)$ ограничены рекурсивной функцией $n\cdot 2^{c(n,n)}$) $\Pi = \{S(n) \mid n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})\}$ является Δ_A-подмножеством, а $n \longmapsto S(n)$ будет Σ_A-функцией.

Пусть $\mathrm{csk}(n)$ — мощность множества $\mathrm{sp}(\delta(n))$ и S_n — множество номеров всех перестановок, лежащих в $S(\mathrm{csk}(n))$, продолжение которых действует тождественно на $\delta(n)$. Тогда

$$k \in S_n \Leftrightarrow ((\rho(k) \in S(\mathrm{csk}(n)))\wedge$$
$$\mathrm{Un}(\delta(n),\varepsilon^{-1}\delta(n),\tau^{-1}(\rho(k)),\tau^{-1}(\mathrm{nt}\restriction \mathrm{csk}(n))),$$

откуда следует, что отношение $k \in S_n$ рекурсивно, и аналогично (с рекурсивной мажорантой $\mathrm{csk}(n)\cdot 2^{c(\mathrm{csk}(n),\mathrm{csk}(n))}$) получаем, что $\Pi_\omega \leftrightharpoons \{S_n \mid n \in \mathrm{Ord}(\mathbb{A})\}$ является Δ_A-подмножеством, а $s : n \longmapsto S_n$ будет Σ_A-функцией. Осталось только заметить, что рекурсивная функция $\gamma^{-1}s$ сводит нумерацию s к нумерации γ, т. е. последовательность S_n действительно является сильно вычислимой. □

Пусть $\varphi \in \mathrm{For}_\sigma$, $\pi \in \bigcup\Pi = (\bigcup\Pi_\omega)$, где For_σ — множество гёделевых номеров формул некоторой конечной фиксированной сигнатуры σ, а Π_ω — множество из доказательства леммы 7. Тогда обозначим через φ^π результат преобразования формулы φ путем замены переменных по следующему правилу:

$$\pi^*(u_i) = \begin{cases} u_{\pi(i)}, & i \in \delta\pi, \\ u_i, & i \notin \delta\pi. \end{cases}$$

Функция $(\varphi,\pi) \longmapsto \varphi^\pi$ может быть определена Σ-рекурсией, а поэтому является частично рекурсивной функцией с областью определения $\mathrm{For}_\sigma \times \times(\bigcup\Pi_\omega)$.

ТЕОРЕМА 2 (о редукции). *Пусть $\mathbb{A} = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечная надстройка модели $\mathfrak{M}$ регулярной теории T. Тогда для любых $R_0, R_1 \in \Sigma(A)$ существуют Σ_A-подмножества $F_0 \subseteq R_0$ и $F_1 \subseteq R_1$ такие, что $F_0 \cup F_1 = R_0 \cup R_1$, $F_0 \cap F_1 = \varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R_0 и R_1 — некоторые Σ-подмножества (не ограничивая общности, можно считать, что они определяются формулами от одних и тех же параметров). Пусть A_n и B_n — вычислимые последовательности из теоремы 1, определяющие R_0 и R_1 соответственно. Тогда существуют сильно вычислимые последовательности возрастающих по s множеств A_n^s и B_n^s, удовлетворяющие следующим условиям:

$$A_n^0 = B_n^0 = \varnothing,\ |A_n^{s+1} \setminus A_n^s| \leqslant 1,\ |B_n^{s+1} \setminus B_n^s| \leqslant 1,\ A_n = \cup A_n^s,\ B_n = \cup B_n^s.$$

Обозначим символом e рекурсивную функцию, которая номеру формулы сигнатуры σ сопоставляет номер эквивалентной ей $\exists$-формулы. Существование этой функции следует из разрешимости и модельной полноты теории T. Ниже приводится построение вычислимых последовательностей C_n и D_n, которые и будут определять множества F_0 и F_1 из условия.

КОНСТРУКЦИЯ. Шаг 0. $C_n^0 \leftrightharpoons D_n^0 \leftrightharpoons \varnothing$.

Шаг $s+1$. Если существует $\varphi_0 \in A_n^{s+1} \setminus A_n^s$, то $C_n^{s+1} \rightleftharpoons C_n^s \cup \{e(\varphi_0 \wedge \wedge \bigwedge\limits_{\varphi \in C_n^s} \bigwedge\limits_{\pi \in S_n} \neg\varphi^\pi \wedge \bigwedge\limits_{\psi \in D_n^s} \bigwedge\limits_{\pi \in S_n} \neg\psi^\pi)\}$; $C_n^{s+1} \rightleftharpoons C_n^s$, в противном случае.

Если существует $\psi_0 \in B_n^{s+1} \setminus B_n^s$, то $D_n^{s+1} \rightleftharpoons D_n^s \cup \{e(\psi_0 \wedge \wedge \bigwedge\limits_{\varphi \in C_n^{s+1}} \bigwedge\limits_{\pi \in S_n} \neg\varphi^\pi \wedge \bigwedge\limits_{\psi \in D_n^s} \bigwedge\limits_{\pi \in S_n} \neg\psi^\pi)\}$; $D_n^{s+1} \rightleftharpoons D_n^s$, в противном случае.

Описание конструкции завершено.

Легко проверить, что построенные вычислимые последовательности удовлетворяют теореме 1. Покажем, что множества F_0 и F_1, определенные вычислимыми последовательностями C_n и D_n соответственно, удовлетворяют условиям теоремы.

Включения $F_0 \subseteq R_0$ и $F_1 \subseteq R_1$ справедливы, поскольку все элементы вычислимых последовательностей заменяются мѐньшими относительно естественного порядка на алгебре Линденбаума-Тарского $\langle F_n(T)/_\equiv, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$.

Из конструкции следует, что любые две формулы, принадлежащие $C_n \cup D_n$, либо совпадают, либо не пересекаются с точностью до перестановки, продолжение которой действует тождественно на элементе $\delta(n)$, поэтому $F_0 \cap F_1 = \varnothing$.

Выполняется равенство $F_0 \cup F_1 = R_0 \cup R_1$. Действительно, пусть $a \in R_0 \cup R_1$. Тогда $a = t_\varkappa^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(u_0, u_1, \ldots, u_{n_\varkappa - 1})$, и существует формула $\varphi \in A_n \cup B_n$, $n = \delta^{-1}\varepsilon(\varkappa)$, такая, что $\mathfrak{M} \models \varphi[\gamma_{\mathrm{concat}(g,\hat{s})}]$, где $g = \{\langle 0, u_0\rangle, \langle 1, u_1\rangle, \ldots, \langle n_\varkappa - 1, u_{n_\varkappa - 1}\rangle\}$ и $\hat{s}$ — некоторые параметры. Выберем наименьший номер i_0 такой, что формула $\bar{\varphi}$, для которой выполняется вышеприведенное условие, принадлежит множеству $A_n^{i_0} \cup B_n^{i_0}$. Если $\bar{\varphi} \in A_n^{i_0}$, то $a \in F_0$; в противном случае, $a \in F_1$. $\square$

В заключение этого параграфа приведем пример равномерно определенного (в некотором смысле) неуниформизуемого предиката на наследственно конечной надстройке над моделью регулярной ω-категоричной теории. Известно [6], что надстройка над моделью регулярной теории T обладает свойством униформизации в том и только в том случае, если T имеет Σ-определимые скулемовские функции.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечная модель разрешимой модельно полной ω-категоричной теории. Тогда в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ не имеет места теорема об униформизации.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим несколько свойств.

$\langle 1\rangle$ *Для каждой полной формулы $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ теории $Th(\mathfrak{M})$ существует полная формула $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ той же теории, для которой выполняется следующее соотношение:*

$$\mathfrak{M} \models \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}((\psi \leftrightarrow \exists x_n \varphi) \wedge (\exists x_n \varphi \to \exists^\infty x_n \varphi)).$$

Свойство $\langle 1\rangle$ непосредственно следует из ω-категоричности и полноты теории $Th(\mathfrak{M})$ (существует лишь конечное число полных формул от переменных $x_0, \ldots, x_{n-1}$, неэквивалентных в теории $Th(\mathfrak{M})$).

$\langle 2\rangle$ *Существует бинарный Σ-предикат* NegUnif, *который не униформизуем.*

Рассмотрим следующее выражение от переменных x и u:

$$\begin{aligned}&\exists n \exists h((x = \langle n, h\rangle) \wedge (n \text{ — номер } \exists\text{-формулы}) \wedge (\rho h \subset M)\\ &\wedge (h \text{ - инъекция}) \wedge \exists h_1 \exists h_2((h_1 \neq h_2) \wedge (\delta h_1 = \delta h_2)\\ &\wedge (\delta h_1 = \delta h + 1) \wedge (h_1 \restriction \delta h = h_2 \restriction \delta h) \wedge (h_1 \restriction \delta h = h)\\ &\wedge Tr_\Sigma(n, h_1) \wedge Tr_\Sigma(n, h_2) \wedge Tr_\Sigma(n, h \cup \{\langle \delta h, u\rangle\}))).\end{aligned}$$

Это выражение может быть записано Σ-формулой. Докажем, что предикат, определяемый этой формулой, не униформизуем. Предположим противное, т. е. пусть существует Σ-функция nuf, униформизующая этот предикат. Пусть $\psi(x_0, x_1, s_0, \ldots, s_{k-1})$ — формула с параметрами из M, определяющая функцию nuf. Согласно свойству $\langle 1\rangle$ функция nuf определена, в частности, на элементе $\bar{x} = \langle \varphi, h_0\rangle$, где φ — полная $\exists$-формула, $h_0 \leftrightharpoons \{\langle i, s_i\rangle \mid i < k\}$ такие, что $\mathfrak{M} \models \exists x_k \varphi[\gamma_{h_0}]$, и, кроме того, формула φ удовлетворяет свойству $\langle 1\rangle$. Предположим, что $\mathrm{nuf}(\bar{x}) = u_0$. Согласно определению предиката существует элемент $u_0' \neq u_0$ такой, что

$$t^{\mathfrak{M}}(u_0, s_0, \ldots, s_{k-1}) = t^{\mathfrak{M}}(u_0', s_0, \ldots, s_{k-1}).$$

Тогда по предложению 3.4.5 [1] и теореме 3.4.1 [1] выполняется

$$t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(\mathrm{nuf}(\bar{x}), s_0, \ldots, s_{k-1}) = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}(\mathrm{nuf}(\bar{x})^{u_0}_{u_0'}, s_0, \ldots, s_{k-1}),$$

что противоречит тому, что nuf — определимая функция. □

§ 3. О характеризации простых теорий

Наследственно конечная надстройка не только является объектом исследования вычислимых свойств модели, но и позволяет описывать в ряде случаев свойства самой теории этой модели. Один из таких примеров приводится в данном параграфе. Прежде, чем перейти к основному объекту изучения, приведем несложный результат из теории конструктивных моделей.

ЛЕММА 8. *Пусть T — разрешимая ω-категоричная теория. Тогда T имеет разрешимое множество полных формул в том и только в том случае, если существует сильно вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n\in\omega}$, где A_n — множество, содержащее все с точностью до T-эквивалентности полные формулы от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Теорию T назовем *простой*, если она регулярна, полна, ω-категорична и имеет разрешимое множество полных формул.

Теорема 3 является своеобразной характеризацией простых теорий в терминах наследственно конечных надстроек над моделями таких теорий.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть T — полная ω-категоричная теория. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *теория T разрешима и для произвольных модели $\mathfrak{M} \models T$ и вычислимого семейства всех типов $\{p_n \mid n \in \omega\}$ теории T предикат*

$$\{\langle n, a\rangle \mid a \in \mathrm{M}^k \textit{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

$\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$*-определим;*

2) *для некоторых модели $\mathfrak{M} \models T$ и вычислимого семейства всех типов $\{p_n \mid n \in \omega\}$ теории T предикат*

$$\{\langle n, a\rangle \mid a \in \mathrm{M}^k \textit{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

$\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$*-определим;*

3) *теория T разрешима и для произвольных вычислимого семейства всех типов $\{p_n \mid n \in \omega\}$ теории T и модели $\mathfrak{M} \models T$ предикат*

$$\eta_{\mathfrak{M}} \leftrightharpoons \{\langle n, m, x\rangle \mid \exists a \in \mathrm{M}^{n\varkappa}((x = t_\varkappa(a)) \wedge (\mathfrak{M} \models p_n(a))) \textit{ для } \varkappa = \varepsilon^{-1}\delta(m)\}$$

$\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$*-определим;*

4) *существуют обогащение σ' сигнатуры σ конечным числом констант $c_0, \ldots, c_{n-1}$ и полная формула $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ такие, что T' ($\leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons$ $Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\})$) — простая теория.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация ($1 \Rightarrow 2$) и эквивалентность ($1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3$) очевидны. Установим сначала импликацию ($2 \Rightarrow 4$). Разрешимость теории T следует из вычислимости семейства всех типов теории T (замкнутые формулы, принадлежащие типу p_0, образуют теорию T) и полноты теории (полная перечислимо аксиоматизируемая теория разрешима). Отсюда для любой полной формулы $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ теория $Th(T \cup \{\varphi_0(c_0, \ldots, c_{n-1})\})$ сигнатуры σ' является разрешимой полной ω-категоричной теорией.

Пусть $\Psi(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ — это Σ-формула, определяющая предикат

$$\{\langle n, a\rangle \mid a \in \mathrm{M}^k \text{ реализует тип } p_n(x_0, \ldots, x_{k-1})\}$$

и $s_0, \ldots, s_{n-1}$ — параметры из M, участвующие в определении. По теореме Рылль-Нардзевского существует полная формула $\varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$

такая, что $\mathfrak{M} \models \varphi_0(x_0, \ldots, x_{n-1})[\gamma_g]$, где $g = \{\langle i, s_i\rangle \mid i < n\}$. По теореме 1 существует соответствующая вычислимая последовательность B_n гёделевых номеров $\exists$-формул сигнатуры σ. Рассмотрим вычислимую последовательность $C_n \leftrightharpoons B'_n \setminus \{\varphi \mid \mathfrak{M} \models \neg\varphi\}$, где $B'_n \leftrightharpoons \{\exists x_k \ldots \exists x_{k+n-1}(\varphi \wedge \wedge(\varphi_0)^{x_0,\ldots,x_{n-1}}_{x_k,\ldots,x_{k+n-1}}) \mid \varphi \in B_n\}$. Из теоремы Рылль-Нардзевского следует, что элементами множеств C_n являются номера полных $\exists$-формул, вследствие чего множество

$$C \leftrightharpoons \left\{\varphi \,\middle|\, \exists\varphi_0 \left((T \vdash (\varphi_0 \leftrightarrow \varphi)) \wedge \left(\varphi_0 \in \bigcup_{n\in\omega} C_n\right)\right)\right\}$$

состоит из полных формул, и, очевидно, перечислимо, а перечислимость для множества полных формул разрешимой теории равносильна разрешимости. Последнее влечет разрешимость множества полных формул теории T'. Модельная полнота следует из определения семейства множеств B_n и теоремы Рылль-Нардзевского (любая выполнимая формула эквивалентна конечной дизъюнкции полных формул).

Осталось установить импликацию ($4 \Rightarrow 1$). Теории T разрешима, поскольку разрешимой является и теория T'. Пусть $\mathfrak{M} \models T$ — модель теории T и $\{p_n \mid n \in \omega\}$ — вычислимое семейство всех типов теории T. Рассмотрим вспомогательную Σ-формулу $\Psi(x_0, x_1)$, выражающую следующее:

$$\exists\varphi\exists\varphi'((\varphi \in p_{x_0}) \wedge (\varphi' \in \mathrm{ComFor}_{\sigma'}) \wedge (T' \vdash (\varphi \leftrightarrow \varphi')) \wedge Tr_\Sigma(\varphi', \mathrm{concat}(x_1, \hat{s})),$$

где $\mathrm{ComFor}_{\sigma'}$ — множество всех $\exists$-формул сигнатуры σ', эквивалентных некоторым полным формулам теории T (оно разрешимо, поскольку разрешимо множество полных формул теории T'), а $\hat{s} \leftrightharpoons \{\langle i, s_i\rangle \mid i < n\}$. Тогда Σ-формула $\Psi'(x_0, x_1)$, для которой выполняется эквивалентность

$$\Psi'(n, \langle g(0), \ldots, g(\delta g - 1)\rangle) \Leftrightarrow \Psi(n, g),$$

определяет предикат из условия. □

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, предикат $\eta_{\mathfrak{M}}$ из последней теоремы определяет "кодировку" типов, реализующихся в надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ элементами некоторого двуместного Δ-предиката на $\mathbb{N}$. К тому же, используя следующее соотношение

$$\langle n, m, a\rangle \notin \eta_{\mathfrak{M}} \Leftrightarrow \forall g \in (n_{\varkappa}+1) \times \mathrm{sp}(a) \urcorner T_{\omega}(a, m, g)$$

$$\vee \exists g (T_{\omega}(a, m, g) \wedge \forall \pi \in S_m \exists \varphi \in p_n \exists \varphi_0 \in \mathrm{ComFor}_{\sigma'}((T' \vdash (\varphi \leftrightarrow \urcorner \varphi_0))$$

$$\wedge (\mathfrak{M}' \models \varphi_0^{\pi}[\gamma_{\tau(g)}])))$$

(где $\varkappa = \varepsilon^{-1}\delta(m)$, $\mathfrak{M}' \models T'$ — обогащение модели $\mathfrak{M}$), заключаем, что $\eta_{\mathfrak{M}}$ является Δ-предикатом.

§4. О нестандартной теории рекурсии

В данном параграфе рассматривается вопрос о взаимосвязях вычислимости на множестве натуральных чисел (что эквивалентно, как показано в [1], вычислимости на $\mathbb{HF}(\varnothing)$) и на наследственно конечных надстройках. Основным результатом является теорема о соответствии между подполями поля вещественных чисел и семейством идеалов верхней полурешетки $\mathbb{L}_T \leftrightharpoons \langle \mathrm{L}_T, \leq\rangle$ тьюринговых степеней.

Из леммы 2 следует, что $\Sigma_n(\mathbb{HF}(\varnothing)) \subseteq \Sigma_n(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$. Обратное утверждение в общем случае не выполняется (примеры таких моделей приведены в основной теореме данного параграфа). Тем не менее, для надстроек над моделями специального класса теорий имеет место

ЛЕММА 9. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель разрешимой категоричной в некоторой бесконечной мощности теории. Тогда*

а) *любое чистое $\Delta_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-подмножество является Δ-подмножеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$;*

б) *любое чистое Σ_n-подмножество на $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ является Σ_n-подмножеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$, $n \geqslant 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если модель $\mathfrak{M}$ ω-насыщенна, то по предложению 3.4.5 [1] и теореме 3.4.2 [1] выполняется соотношение $f : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \preccurlyeq \preccurlyeq \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ для разрешимой насыщенной модели $\mathfrak{M}'$. Далее, если множество $A \subseteq \mathrm{HF}_{\varnothing}$ определяется формулой $\Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ с параметрами $s_0, \ldots, s_{k-1}$ из M и $\langle n_0, \ldots, n_{k-1}\rangle$ — кортеж элементов M′, элементарно эквивалентный кортежу $\langle s_0, \ldots, s_{k-1}\rangle$, то согласно теореме 3.4.1 [1] имеет место следующее соотношение:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})[\gamma_{\mathrm{concat}(g,\hat{s})}] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}') \models \Phi(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})[\gamma_{\mathrm{concat}(g,\hat{n})}]$$

при $g = \langle 0, a\rangle$, $a \in \mathrm{HF}_{\varnothing}$.

Осталось применить принцип Σ-рефлексии и следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Любая Δ_0-формула в надстройке $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')$ разрешимой модели $\mathfrak{M}'$ эквивалентна некоторым Σ-формуле и Π-формуле в надстройке $\mathbb{HF}(\varnothing)$.

Если же модель $\mathfrak{M}$ не ω-насыщенна, то по теореме из [7] она сильно конструктивизируема, и данное утверждение следует из замечания 2. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Модель $\mathfrak{M}$ назовем *локально конструктивизируемой*, если при любых кортежах $\bar{a} \in \mathrm{M}^{\omega}$ $\exists$-теории $Th_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{a})$ являются перечислимыми.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ следующие условия эквивалентны:*

а) *модель $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема;*

б) *любое чистое $\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-подмножество является Σ-подмножеством $\mathbb{HF}(\varnothing)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация а)$\Rightarrow$б) является следствием теоремы 1 и определения локальной конструктивизируемости. В обратную сторону, достаточно заметить, что предикат

$$A \leftrightharpoons \{n \mid (n - \text{номер } \exists\text{-формулы}) \wedge Tr_{\Sigma}(n, g)\},$$

где $g(i) = a_i$ — элементы произвольного фиксированного кортежа из M, будет Σ-определимым. □

Введем обобщение понятия локальной конструктивизируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Модель $\mathfrak{M}$ назовем *локально конструктивизируемой с оракулом A*, если $\exists$-теории $Th_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{a})$ являются A-перечислимыми при любых кортежах $\bar{a} \in \mathrm{M}^{\omega}$.

Имеет место следующий релятивизованный вариант последнего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для модели $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры σ эквивалентны следующие условия:*

а) *модель $\mathfrak{M}$ локально конструктивизируема с оракулом A;*

б) *любое чистое $\Sigma_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-подмножество является Σ-подмножеством $(\mathbb{HF}(\varnothing), P)$, где $\gamma^*(P) = A$ и*

$$\gamma^*(x) \leftrightharpoons \begin{cases} 0, & \text{если } x = \varnothing, \\ \sum\limits_{i=0}^{s} 2^{\gamma^*(x_i)}, & \text{если } x = \{x_0, \dots x_s\}, x_{j_0} \neq x_{j_1} \text{ при } j_0 \neq j_1 \end{cases} \tag{3}$$

является Σ-определимой биекцией между $\mathbb{HF}(\varnothing)$ и $\mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть $\mathbb{L} = \langle L, \leq, 0 \rangle$ — верхняя полурешетка с нулем (наименьшим элементом). Подмножество $I \subseteq L$ назовем *идеалом*, если выполняются следующие условия:

1) $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$;

2) $a \in I, b \leq a \Rightarrow b \in I$.

Обозначим символом $\mathfrak{J}(\mathbb{L})$ семейство всех идеалов верхней полурешетки $\mathbb{L}$ со следующими операциями на нем:

$I \leq^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} J \Leftrightarrow I \subseteq J$; $I \wedge^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} J \leftrightharpoons I \cap J$;

$I \vee^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} J \leftrightharpoons \{c \mid \exists a \in I \exists b \in J (c \leqslant^{\mathbb{L}} a \vee b)\}$; $0^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} \leftrightharpoons \{0\}$; $1^{\mathfrak{J}(\mathbb{L})} \leftrightharpoons L$.

Тогда относительно введенных операций семейство $\mathfrak{J}(\mathbb{L})$ образует решетку с наибольшим и наименьшим элементами. К тому же, верхняя полурешетка $\mathbb{L}$ изоморфно вкладывается в решетку $\mathfrak{J}(\mathbb{L})$ (если рассматривать ее как верхнюю полурешетку). При этом в качестве изоморфного вложения выбирается отображение $a \in \mathrm{L} \mapsto \hat{a} \in \mathrm{J}(\mathrm{L})$ между элементами полурешетки $\mathbb{L}$ и главными идеалами полурешетки $\mathbb{L}$, порожденными соответствующими элементами.

В дальнейшем множество натуральных чисел отождествляется с множеством $\mathrm{Ord}(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ ординалов наследственно конечной надстройки над моделью $\mathfrak{M}$. Для любого множества $A \subseteq \mathbb{N}$ обозначим через $d_T(A)$ *тьюрингову степень*, содержащую множество A в качестве элемента.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $\mathbb{A}_0 = \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ — наследственно конечная надстройка над моделью $\mathfrak{M}$. Тогда множество* $\mathrm{Ideal}(\mathfrak{M}) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \{d_T(B) \mid B \in \Delta(\mathbb{A}_0) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ *образует идеал верхней полурешетки $\mathbb{L}_T$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [8] выполняется соотношение $d_T(A \oplus B) = d_T(A) \vee d_T(B)$, где $A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\}$. Очевидно, что если A и B являются $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножествами, то и $A \oplus B$ будет $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножеством.

Пусть A образует $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножество и $B \leq_T A$. Покажем, что B является $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножеством. Воспользуемся формализацией из [8]. Поскольку B рекурсивно относительно оракула A, существует регулярное рекурсивно перечислимое множество W, для которого выполняется следующее соотношение:

$$\chi_B(x) = y \Leftrightarrow \exists u \exists v(\langle x, y, u, v\rangle \in W \wedge (D_u \subseteq A) \wedge (D_v \subseteq \bar{A})), \tag{4}$$

где χ_B — характеристическая функция множества B, а D_u — конечное подмножество натуральных чисел с номером u в стандартной нумерации. Из соотношения 4 и леммы 1 следует, что χ_B является $\Sigma_{\mathbb{A}_0}$-функцией, а B будет $\Delta_{\mathbb{A}_0}$-подмножеством. □

Определим нумерацию множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел следующим образом:

$$\nu_{\mathbb{Q}}(c(n,m)) \leftrightharpoons (-1)^{\mathrm{odd}((n,m+1))}\frac{n}{m+1},$$

где $c(n,m)$ — канторовская нумерация упорядоченных пар, (n,m) — наибольший общий делитель, а $\mathrm{odd}(n)$ — характеристическая функция нечетных чисел.

ЛЕММА 10. *Нумерация $\nu_{\mathbb{Q}}$ является конструктивизацией модели $\langle \mathbb{Q}, +, *, -, \leqslant, 0, 1\rangle$. Кроме того, существует частично рекурсивная функция h_1 с областью определения $\delta h_1 = \{n \mid \nu_{\mathbb{Q}}(n) \neq 0\}$ такая, что*

$$\forall n \in \delta h_1(\nu_{\mathbb{Q}}(h_1(n)) = (\nu_{\mathbb{Q}}(n))^{-1}).$$

Для произвольного действительного числа $a \in \mathbb{R}$ определим *сечение* $B_a|C_a$ следующим образом:

$$B_a \leftrightharpoons \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_{\mathbb{Q}}(n) \leqslant a\},\ C_a \leftrightharpoons \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_{\mathbb{Q}}(n) > a\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Число $a \in \mathbb{R}$ назовем *конструктивным* (*A-конструктивным*), если сечение $B_a|C_a$ состоит из рекурсивных (относительно оракула A) множеств.

Следующий результат является релятивизованным вариантом аналога для конструктивных элементов.

ЛЕММА 11. *A-конструктивные элементы образуют вещественно замкнутое подполе поля $\mathbb{R}$.*

Для любого $x \in [0;1)$ определим множество $A_x \leftrightharpoons \{n \in \mathbb{N} \mid [2 \cdot \{2^n x\}] = 1\}$. Отметим, что отображение $x \mapsto A_x$ является однозначной вычислимой $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$-нумерацией семейства всех кобесконечных подмножеств натуральных чисел (семейство всех коконечных подмножеств натуральных чисел, очевидно, обладает такой нумерацией). Для введенных понятий имеет место следующая

ЛЕММА 12. $A_x \equiv_T B_x$.

СЛЕДСТВИЕ. *A_x рекурсивно (относительно оракула A) $\Leftrightarrow$ число x конструктивно (относительно оракула A).*

Для каждого идеала $I \in \mathrm{J}(\mathrm{L}_T)$ обозначим через $\mathbb{R}_I$ вещественное замыкание множества $\widetilde{I} \leftrightharpoons \{x \in [0;1) \mid d_T(A_x) \in I\}$. По лемме и последнему следствию $\mathbb{R}_I = \mathbb{Z} + \widetilde{I}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел.

Теперь покажем, что поле $\mathbb{R}_{\hat{a}}$ для $a = d_T(A)$ локально конструктивизируемо относительно оракула A. Так как локальная конструктивизируемость модели $\mathfrak{M}$ относительно оракула A равносильна условию "для любого $n \geqslant 0$ и любых элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ из $\mathfrak{M}$ существует A-конструктивизируемая модель $\mathfrak{M}'$ такая, что для некоторых элементов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ из $\mathfrak{M}'$ выполняется следующее соотношение $Th_\exists(\mathfrak{M}, \bar{a}) = Th_\exists(\mathfrak{M}', \bar{b})$," достаточно убедиться в том, что для любых элементов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ из $\mathbb{R}_{\hat{a}}$ поле $\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ ($\preccurlyeq \mathbb{R}_{\hat{a}}$, что следует из модельной полноты и критерия Робинсона) A-конструктивизируемо ($\mathbb{Q}_{\mathbb{R}}(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ — алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$ с помощью элементов $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ в поле вещественных чисел). Последнее утверждение является следствием релятивизации теоремы о ядре (см. [9]).

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 4. 1) *Решетки $\langle \mathrm{J}(\mathrm{L}_T), \subseteq \rangle$ и $\langle \{\mathbb{R}_I \mid I \in \mathrm{J}(\mathrm{L}_T)\}, \preccurlyeq \rangle$ изоморфны, при этом выполняются следующие условия:*

а) $\mathbb{R}_{\{0\}}$ — *поле, состоящее из конструктивных элементов*;

б) $\mathbb{R}_{L_T} = \mathbb{R}$;

в) $\mathbb{R}_{I \wedge J} = \mathbb{R}_I \cap \mathbb{R}_J$;

г) $\mathbb{R}_I = \cup\{\mathbb{R}_{\hat{a}} \mid a \in I\}$.

2) $\mathrm{Ideal}(\mathbb{R}_I) = I$.

3) *Пусть* $\mathbb{R}'$ — *произвольное вещественно замкнутое подполе поля* $\mathbb{R}$. *Тогда* $\mathbb{R}' \preccurlyeq \mathbb{R}_I \Leftrightarrow \mathrm{Ideal}(\mathbb{R}') \subseteq I$. *В частности,* $\mathbb{R}' \preccurlyeq \mathbb{R}_{\mathrm{Ideal}(\mathbb{R}')}$.

4) *Пусть* $\mathbf{A}_I \leftrightharpoons \mathbb{HF}(\mathbb{R}_I)$. *Тогда существует разрешимая (даже однозначная) вычислимая* $\mathbf{A}_I$*-нумерация семейства* $\Delta(\mathbf{A}_I) \cap \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $A \subseteq \mathbb{N}$ и $a = d_T(A)$. Тогда поле $\mathbb{R}_{\hat{a}}$, состоящее из A-конструктивных элементов, не является A-конструктивным.

§ 5. Алгебраические свойства $m\Sigma$-степеней

В этом параграфе изучаются свойства $m\Sigma$-степеней. Понятие $m\Sigma$-степени является обобщением понятия m-степени на случай произвольной KPU-модели $\mathbf{A}$. Одна из основных проблем, с которой пришлось столкнуться при изучении полурешеток $m\Sigma$-степеней надстроек над моделями простых теорий, чья теория вычислимости совпадает с классической теорией рекурсии, — наличие в несчетном случае несчетного семейства атомов полурешетки $\mathbb{L}(\mathrm{S})$ (S — множество без структуры; по праву можно считать, что такая модель имеет самую простую структуру), причем каждое подсемейство можно поместить в некоторый главный идеал. Из указанного свойства следует отсутствие изоморфизма между полурешетками m-степеней и $m\Sigma$-степеней для надстроек над несчетными моделями простых теорий. Тем не менее, вопрос об изоморфизме полурешеток перечислимых и определимых степеней для моделей таких теорий решается положительно. Сначала введем понятия, касающиеся общей теории $m\Sigma$-степеней произвольной KPU-модели $\mathbf{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что B *$m\Sigma$-сводится* к C ($B \leq_{m\Sigma} C$), если существует Σ-предикат $R \subseteq A^2$ такой, что $\delta R = A$ и для любой пары $\langle a_0, a_1 \rangle \in R$ выполняется $(a_0 \in B) \Leftrightarrow \Leftrightarrow (a_1 \in C)$.

Как и в классическом случае, дадим определение $m\Sigma$-сводимости, используя понятие сводимости нумераций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Будем говорить, что $\mathbb{A}$-нумерация $\nu : B \to S_0$ *сводится* к $\mathbb{A}$-нумерации $\mu : B' \to S_1$ (и обозначать $\nu \le \mu$), если существует Σ-предикат $R \subseteq A^2$ такой, что $\delta R = B_0$ и для любой пары $\langle a_0, a_1 \rangle \in R$ выполняется $\nu(a_0) = \mu(a_1)$.

Легко заметить, что $B \le_{m\Sigma} C \Leftrightarrow \chi_B \le \chi_C$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В качестве предиката сводимости R можно рассматривать предикат с прежним условием на пары такой, что δR — Δ-предикат, содержащий B.

Естественным образом определяются понятия $m\Sigma$-эквивалентности, $m\Sigma$-степени и порядка $\le$ на $m\Sigma$-степенях, индуцированного предпорядком $\le_{m\Sigma}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Пусть $B, C \subseteq A$. Будем говорить, что B *$m\Sigma$-эквивалентно* C ($B \equiv_{m\Sigma} C$), если $B \le_{m\Sigma} C$ и $C \le_{m\Sigma} B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Пусть $\varnothing \ne B \subset A$, *$m\Sigma$-степенью* множества B назовем

$$\mathbf{b} = d_{m\Sigma}(B) \leftrightharpoons \{B' \subset A \mid B' \equiv_{m\Sigma} B\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Пусть $\varnothing \ne B, C \subset A$. Тогда $d_{m\Sigma}(C) \le \le d_{m\Sigma}(B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} C \le_{m\Sigma} B$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Множество $m\Sigma$-степеней $\langle L_m(\mathbb{A}), \le \rangle$ произвольной* KPU-*модели* $\mathbb{A}$ *образует дистрибутивную верхнюю полурешетку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1, предл. 2.8.1] показано, что $L_m(\mathbb{A})$ является верхней полурешеткой, причем $d_{m\Sigma}(B) \vee d_{m\Sigma}(C) = d_{m\Sigma}(B \oplus C)$.

Покажем, что $L_m(\mathbb{A})$ дистрибутивна. Пусть $\varnothing \ne B, C_0, C_1 \subset A$ такие, что $B \le_{m\Sigma} C_0 \oplus C_1$. Тогда существует бинарный Σ_A-предикат R из определения. Обозначим $\Phi(x_0, x_1)$ Σ-формулу такую, что $R = \Phi^{\mathbb{A}}[x_0, x_1]$.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\mathbf{A} \models \forall x_0 \forall x_1 (\Phi(x_0, x_1) \to \exists x_2((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle))).$$

Действительно, пусть $a \in A \setminus C_0$. Тогда Σ-формула

$$\begin{gathered}(\exists x_2((x_1 = \langle x_2, 0\rangle) \vee (x_1 = \langle x_2, 1\rangle)) \wedge \Phi(x_0, x_1))\\ \vee \exists x_3 \forall x_2 \in TC(x_3)(x_3 \neq \langle x_2, 0\rangle) \wedge (x_3 \neq \langle x_2, 1\rangle) \wedge \Phi(x_0, x_3) \wedge (x_1 = \langle a, 0\rangle))\end{gathered}$$

обладает этим свойством.

По принципу Σ-рефлексии существует Δ_0-формула такая, что $\Phi(x_0, x_1) \equiv_{\mathrm{KPU}} \exists x_2 \Phi'(x_0, x_1, x_2)$. Покажем, что для множеств

$$B_i \leftrightharpoons \{\langle a, b, c\rangle \mid \Phi'(a, b, \langle c, i\rangle) \text{ для некоторого } c \in C_i\},\ i = 0, 1,$$

выполняются условия из определения дистрибутивной полурешетки, а именно, $B_0 \oplus B_1 \equiv_{m\Sigma} B$ и $B_i \leq_{m\Sigma} C_i, i = 0, 1$. Зафиксируем произвольные элементы $b' \notin B$, $c_0' \notin C_0$, $c_1' \notin C_1$. Тогда предикат

$$F \leftrightharpoons \left\{\langle a, b\rangle \,\middle|\, \bigvee_{i=0}^{1} \exists u \exists c (\Phi'(u, a, \langle c, i\rangle) \wedge (b = \langle\langle u, a, c\rangle, i\rangle))\right\}$$

осуществляет $m\Sigma$-сводимость множества B к множеству $B_0 \oplus B_1$.

Также легко убедиться в том, что предикаты

$$\begin{gathered}R_i \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid \exists u \exists c((a = \langle u, c, b\rangle) \wedge \Phi'(u, c, \langle b, i\rangle))\\ \vee \exists d((a = \langle u, c, d\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, c, \langle d, i\rangle) \wedge (b = c_i'))\\ \vee \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, c, d\rangle) \wedge (b = c_i'))\},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Q_i \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid \exists u \exists c((a = \langle u, b, c\rangle) \wedge \Phi'(u, b, \langle c, i\rangle))\\ \vee \exists d((a = \langle u, d, c\rangle) \wedge \neg\Phi'(u, d, \langle c, i\rangle) \wedge (b = b'))\\ \vee \forall u \in TC(a) \forall c \in TC(a) \forall d \in TC(a)((a \neq \langle u, c, d\rangle) \wedge (b = b'))\}\end{gathered}$$

осуществляют $m\Sigma$-сводимость множества B_i к C_i и B соответственно, где $i = 0, 1$. □

В дальнейшем будем использовать обозначение $L_m(\mathfrak{M})$ для верхней полурешетки $L_m(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ $m\Sigma$-степеней наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

ЛЕММА 13. *Пусть γ^* является Σ-определимой биекцией между* $\mathbb{HF}(\varnothing)$ *и* $\mathbb{N}(3)$, *а* $A, B \subset \mathrm{HF}(\varnothing)$. *Тогда выполняются следующие условия:*

а) $((A \leq_{m\Sigma} B) \Leftrightarrow (\gamma^*(A) \leq_m \gamma^*(B)))$;

б) $\gamma^*(A) \equiv_{m\Sigma} A$.

ЛЕММА 14. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель простой теории T и Q — произвольное формульное подмножество* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. *Тогда $Q \equiv_{m\Sigma} Q_0$ для некоторого подмножества $Q_0 \subseteq \mathrm{HF}_\varnothing$ $(\subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M}))$ того же класса в иерархии, что и множество Q.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi(x_0, s_0, \ldots, s_{k-1})$ — формула с параметрами из M такая, что $Q = \Phi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0]$. Рассмотрим обогащение $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, c_0, \ldots, c_{k-1}\rangle$ модели $\mathfrak{M}$. По теореме 3 и замечанию 1 предикат $\eta_{\mathfrak{M}'}$ является $\Delta_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')}$-предикатом. Из определения Δ-предиката сразу следует, что предикат $\eta_{\mathfrak{M}'}$ будет $\Delta_{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}$-определим. Тогда множество

$$Q_0 \rightleftharpoons \{\langle n, m\rangle \in \mathrm{N}^2 \mid \langle n, m, x, \rangle \in \eta_{\mathfrak{M}'} \text{ для некоторого } x \in Q\} \tag{5}$$

удовлетворяет условию леммы, причем предикат $\eta_{\mathfrak{M}'}^{-1}$ осуществляет $m\Sigma$-сводимость множества Q к множеству Q_0; эквивалентность следует из замечаний 3 и 1. То, что множества лежат в одном классе иерархии, следует из определения $m\Sigma$-сводимости. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 (об идеале). *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель простой теории и $\mathcal{HF}_\varnothing$ — множество всех $m\Sigma$-степеней, содержащих подмножества $\mathrm{HF}_\varnothing$ $(\subseteq \mathrm{HF}(\mathrm{M}))$. Тогда $\mathcal{HF}_\varnothing$ является идеалом полурешетки $m\Sigma$-степеней допустимого множества* $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{HF}_\varnothing$ справедливо $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \in \mathcal{HF}_\varnothing$.

Проверим, что второе условие определения идеала также выполняется. Предположим, что $\mathbf{b} \in \mathcal{HF}_\varnothing$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Необходимо показать, что существует множество $Q_0 \in \mathcal{P}(\mathrm{HF}_\varnothing) \cap \mathbf{a}$. Пусть Q — произвольное множество, принадлежащее степени $\mathbf{a}$, и $H_0 \subseteq \mathrm{HF}_\varnothing$ — множество, принадлежащее степени $\mathbf{b}$. Тогда согласно определению существует Σ-предикат R, который сводит множество Q к множеству H_0. Пусть $\Phi(x_0, x_1)$ — это Σ-формула с параметрами $s_0, \ldots, s_{m-1}$ из M, для которой выполняется соотношение

$R = \Phi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M})}[x_0, x_1]$. Рассмотрим обогащение $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, c_0, \ldots, c_{k-1} \rangle$ модели $\mathfrak{M}$. Нетрудно убедиться в том, что если $x \in Q$ и $t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')}(x) = t^{\mathbb{HF}(\mathfrak{M}')}(y)$, то $y \in Q$. Тогда в силу замечания 1 и последнего факта множество Q_0, построенное по правилу (5), принадлежит $\mathcal{P}(\mathrm{HF}_{\varnothing}) \cap \mathbf{a}$ (дальнейшие рассуждения совпадают с доказательством леммы 14). □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. Пусть $\mathbb{A}$ — некоторая KPU-модель и $\mathbf{b} \in L_m(\mathbb{A})$. Будем говорить, что $\mathbf{b}$ — *перечислимая* (*определимая*) $m\Sigma$-степень, если существует Σ_A-подмножество (формульное подмножество) $B \in \mathbf{b}$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель простой теории. Тогда выполняются следующие условия:*

а) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ (посредством отождествления натуральных чисел с ординалами надстройки) индуцирует изоморфизм между полурешетками L_m^0 рекурсивно перечислимых m-степеней и $L_m^0(\mathfrak{M})$ перечислимых $m\Sigma$-степеней допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;*

б) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ индуцирует изоморфизм между полурешетками L_m' арифметических m-степеней и $L_m'(\mathfrak{M})$ определимых $m\Sigma$-степеней допустимого множества $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$;*

в) *естественное вложение натуральных чисел в наследственно конечную надстройку $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ индуцирует изоморфизм множества m-степеней на идеал $\mathcal{HF}_{\varnothing}$ множества $m\Sigma$-степеней наследственно конечной надстройки $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из предложения 7, лемм 9, 12, 14 и 13. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. Л. Ершов*, Определимость и вычислимость, Новосибирск, Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.

2. *В. А. Руднев*, О существовании неотделимой пары в рекурсивной теории допустимых множеств, Алгебра и логика, **27**, N 1 (1988), 48–56.

3. *В.А. Руднев*, Универсальная рекурсивная функция на допустимых множествах, Алгебра и логика, **25**, N 4 (1986), 425—435.

4. *Г. Кейслер , Ч. Ч. Чен*, Теория моделей, М., Мир, 1977.

5. *Р. Ю. Вайценавичюс*, Вычислимые нумерации вычислимых функционалов на RL-допустимых множествах, Матем. логика и ее прим., Вильнюс, Ин-т мат. и киб. АН Лит. ССР, N 5, 1987, 123—132.

6. *А. И. Стукачев*, Теорема об униформизации в наследственно конечных надстройках, в сб.: "Обощенная вычислимость и определимость" (Вычислительные системы, **161**), Новосибирск, Ин-т матем. СО РАН, 1998, 3—14.

7. *Н. Г. Хисамиев*, О сильно конструктивизируемых моделях разрешимой теории, Изв. Акад. наук Каз. ССР, сер. физ.-матем., N 1, 1974, 83—84.

8. *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.

9. *Ю. Л. Ершов*, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

Адрес автора:

Поступило 14 мая 1999 г.

ПУЗАРЕНКО Вадим Григорьевич,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
просп. акад. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН.
e-mail: vagrig@math.nsc.ru