УДК 51

БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

Е. Б. Яновская

Предметом теории игр является изучение конфликтных ситуаций. Самым простым случаем конфликта является антагонистичность, понимаемая в теории игр как ситуация, в которой имеются два участника с прямо противоположными интересами. Связь теоретико-игрового понятия антагонистичности с философским и их различие обсуждается в статье Н. Н. Воробьева [8].

Настоящая статья содержит обзор работ, касающихся бесконечных антагонистических игр в нормальной форме, т. е. антагонистических игр с бесконечными множествами стратегий игроков, в которых стратегии игроков являются элементами некоторых абстрактных множеств. В статье не рассматриваются динамические и дифференциальные игры, за исключением некоторых игр с выбором момента времени, по своему содержанию непосредственно связанных с материалом § 6. Формально антагонистическая игра в нормальной форме определяется как тройка

$$\Gamma = \langle A, B, K \rangle,$$

где A, B — произвольные множества, являющиеся соответственно множествами стратегий игроков I и II, K — вещественная функция, заданная на множестве $A \times B$ всех ситуаций, называемая функцией выигрыша или ядром игры.

Существование оптимальных (ε-оптимальных) стратегий у игроков в антагонистической игре равносильно выполнению следующих равенств:

$$\max_{a \in A} \inf_{b \in B} K(a, b) = \min_{b \in B} \sup_{a \in A} K(a, b) = v, \qquad (1)$$

$$\left(\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} K(a, b) = \inf_{b \in B} \sup_{a \in A} K(a, b) = v\right). \qquad (2)$$

Величина v называется значением*) игры.

*) В некоторой литературе на русском языке значение игры называется также ценой игры (перевод английского термина value). С целью унификации терминологии в Реферативном журнале «Математика» принят термин значение игры.

Однако равенства (1) и (2) уже в самых простых случаях имеют место далеко не всегда. Доказательство их справедливости требует наложения на множества стратегий A, B и функцию K достаточно сильных алгебраических (типа вогнутости по a и выпуклости по b) и топологических (множества A и B являются топологическими пространствами, функция K обладает свойствами типа непрерывности) условий.

Поэтому естественно расширить множества стратегий игроков таким образом, чтобы функция выигрыша, определенная уже на новом, расширенном множестве ситуаций, удовлетворила нужным условиям. Такие множества стратегий должны быть выпуклыми и содержать обычные стратегии.

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества A, содержащая все одноэлементные подмножества, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра подмножеств множества B, и функция K ограничена и измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{S}$, порожденной множествами вида $M \times N$, $M \in \mathfrak{A}$, $N \in \mathfrak{B}$. Смешанной стратегией игрока I (II) называется вероятностная мера, определенная на $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$). Если F — смешанная стратегия игрока I, G — смешанная стратегия игрока II, то функция выигрыша $K(F, G)$ в условиях смешанной ситуации (F, G) определяется как интеграл

$$K(F, G) = \int\limits_{A \times B} K(a, b) F(da) G(db).$$

В случае, если множество чистых стратегий игрока бесконечно (и более чем счетно), то в выборе множества его смешанных стратегий имеется некоторый произвол, зависящий от выбора σ-алгебры подмножеств множества чистых стратегий игрока, на которой определяется вероятностная мера. Изучение различных рандомизаций множеств чистых стратегий имеется в работах Вальда [7] и Бирлейна [74]. Например, в качестве $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) можно рассматривать σ-алгебру всех подмножеств множества A (B), а смешанную стратегию игрока I (II) определить как вероятностную меру, состоящую из конечных смесей на A (B). Однако далеко не всегда такое определение смешанных стратегий оказывается удовлетворительным и, как будет далее показано, для установления существования значения игры требуется рассмотрение более богатого множества смешанных стратегий. Очевидно, множества смешанных стратегий выпуклы, и, если обычные стратегии, называемые чистыми, рассматривать как соответствующие вырожденные меры, содержат множества чистых стратегий игроков. Функция выигрыша в условиях смешанных стратегий оказывается линейной по каждой из переменных.

Смешанным расширением игры Г называется игра

$$\Gamma^* = \langle \Xi, \mathrm{H}, K(\xi, \eta)_{\xi \in \Xi, \eta \in \mathrm{H}} \rangle,$$

где Ξ, H — множества смешанных стратегий игроков I и II,

$$K(\xi, \eta) = \int_{A \times B} K(a, b)\, \xi(da)\, \eta(db).$$

Если для смешанного расширения Γ^* справедливо равенство (1) или (2), то общая величина их частей также называется значением игры Γ, а оптимальные (ε-оптимальные) стратегии игроков в Γ^* называются оптимальными смешанными стратегиями игроков в игре Γ. Легко показать, что оптимальные чистые стратегии игроков (если они существуют) являются и оптимальными смешанными стратегиями игроков.

Если множества чистых стратегий обоих игроков конечны (m стратегий у игрока I, n стратегий у игрока II), то множества смешанных стратегий являются соответственно симплексами S_m и S_n. Из теории матричных игр известно, что для любой $m \times n$ матрицы A

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} XAY^T = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} XAY^T. \tag{3}$$

Равенство (3) означает, что в матричной игре каждый игрок имеет оптимальные смешанные стратегии. Однако для бесконечных антагонистических игр оптимальные (и даже ε-оптимальные) стратегии существуют далеко не всегда.

Теоремы, устанавливающие справедливость равенств (1) или (2) для исходной игры или ее смешанного расширения, называются теоремами существования (или теоремами о минимаксе). Доказательство теорем существования, т. е. выяснение классов игр, для которых существует (или не существует) значение игры, является одной из основных задач теории бесконечных антагонистических игр.

Пара оптимальных стратегий каждого из игроков в антагонистической игре (или совокупность ε-оптимальных стратегий для каждого из игроков), а также процесс их нахождения называется решением игры.

Следующими проблемами теории антагонистических игр являются вопрос о единственности решения игры (если оно существует), а также нахождение решений и выяснение их свойств для некоторых классов игр.

Эти основные вопросы и будут рассматриваться в статье. В обзор включены основные работы по теории бесконечных антагонистических игр, прореферированные в РЖМат в 1953—1971 гг., а также написанные в предыдущие годы.

Весьма полная классификация бесконечных антагонистических игр и обзор методов решения отдельных классов игр имеется в монографии Карлина [32]. Поэтому при обсуждении в статье отдельных классов конкретных игр будут в основном излагаться более поздние результаты, не вошедшие в упомянутую монографию. Обзоры теории бесконечных антагонистических игр имеются в статьях Н. Н. Воробьева [9], Джиллиса и Хейбрехтс [91].

§ 1. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом параграфе будут рассматриваться теоремы существования для игр

$$\Gamma = \langle X, Y, K \rangle,$$

где X, Y — линейные топологические пространства.

Фон Нейманом [100] была получена первая теорема существования для бесконечных антагонистических игр: Если X, Y — компактные подмножества евклидовых пространств, определенная на $X \times Y$ функция $K(x, y)$ непрерывна по обеим переменным, вогнута по x для каждого $y \in Y$, выпукла по y для каждого $x \in X$, то

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y). \qquad (1.1)$$

В дальнейшем справедливость равенства (1.1) доказывалась многими авторами, ослаблявшими в различных направлениях условия теоремы фон Неймана.

Функция $K(x, y)$ называется квазивогнутой по x, если из равенств

$$K(x_1, y) \geqslant \lambda, \quad K(x_2, y) \geqslant \lambda$$

следует

$$K(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2, y) \geqslant \lambda \quad \text{для всех } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Аналогично, функция $K(x, y)$ называется квазивыпуклой по y, если из неравенств

$$K(x, y_1) \leqslant \mu, \quad K(x, y_2) \leqslant \mu$$

следует

$$K(x, \beta y_1 + (1-\beta) y_2) \leqslant \mu \quad \text{для всех } 0 \leqslant \beta \leqslant 1.$$

Никайдо [103, 104] доказал следующую теорему:

Теорема 1.1. Если X, Y — выпуклые компактные множества в линейных топологических пространствах, функция $K(x, y)$, определенная на $X \times Y$, непрерывна по каждой из переменных, квазивогнута по x, квазивыпукла по y, то

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y).$$

В работе [103] при доказательстве применяется теорема Брауэра о неподвижной точке; в [104] Никайдо использовал метод, аналогичный методу Брауна—Неймана решения матричных игр.

Следствием этой теоремы является обобщение теоремы Вилля [114]. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на произведении бикомпактных хаусдорфовых пространств $G \times H$.

Пусть далее P и Q — множества вероятностных мер, определенных соответственно на борелевских подмножествах G и H. Тогда

$$\max_{\xi \in P} \min_{\eta \in Q} \int_H \int_G f(x, y)\, d\xi d\eta = \min_{\eta \in Q} \max_{\xi \in P} \int_H \int_G f(x, y)\, d\xi d\eta$$

(Вилль доказал эту теорему лишь для случая $G = H = [0, 1]$).

В случае вогнуто-выпуклых функций $K(x, y)$ Кнезер [99], Фань Цзи [56], Берж [70], Хершфелд [94] доказали теорему существования при более слабых топологических условиях, налагаемых на функцию $K(x, y)$, требуя полунепрерывности сверху по x и полунепрерывности снизу по y.

В доказательствах применяется теорема об отделимости выпуклых множеств.

Сайон [50] объединил эти результаты и доказал теорему существования для функции, которая является квазивогнутой и полунепрерывной сверху по x, а также квазивыпуклой и полунепрерывной снизу по y. Доказательство Сайона использует теорему Хелли и следующее свойство выпуклых множеств:

Лемма 1.1. Пусть $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — выпуклые компактные множества в R^n. Если для любого i $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$$\bigcap_{\substack{1 \leqslant j \leqslant m \\ j \neq i}} C_j \neq \varnothing$$

и, кроме того,

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant m} C_i = \varnothing,$$

то множество $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ не является выпуклым.

Доказательство этой леммы использует лемму Шпернера из комбинаторной топологии. Берж]71] получил доказательство теоремы Сайона, применяя только общую топологию. Далее, Гуйла-Ури [90] доказал лемму 1.1, используя лишь простые комбинаторные свойства выпуклых множеств.

В отличие от приведенных теорема существования У Вень-цзюня [55] требует от функции $K(x, y)$ выполнения условий чисто топологического характера. Пусть Y — компактное сепарабельное пространство, а пространство X линейно связно. Отображение $K: X \times Y \to R$ называется сильно связным в X, если

1) для любых $a, b \in X$ существует такое непрерывное отображение $h:[\bar{a}, \bar{b}] \to X$, что $h(\bar{a})=a$, $h(\bar{b})=b$, и для произвольных $y \in Y$ и $\lambda \in R$ множество $h^{-1}K_y^{-1}$ $(z \geqslant \lambda)$, где $K_y(x)=K(x, y)$, является связным или пустым.

2) Для любого конечного числа точек $x_1, \ldots, x_k \in X$ и произвольного $\lambda \in R$ множество $K_{x_1}^{-1}(z<\lambda) \cap \ldots \cap K_{x_k}^{-1}(z<\lambda)$ связно или пусто.

Теорема 1.2. Если отображение $K: X \times Y \to R$ сильно связно в X, а функция $K(x, y)$ непрерывна по каждой из переменных, то

$$\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y)=\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y).$$

Если функция $K(x, y)$ квазивогнута по x и квазивыпукла по y, то отображение $K: X \times Y \to R$ оказывается сильно связным в X. Таким образом, в предположении сепарабельности пространства Y теорема У Вень-цзюня охватывает теорему Никайдо.

Дальнейшее ослабление топологических условий, налагаемых на функцию выигрыша, было произведено Пеком и Далмиджем [46]. Основной полученный ими результат содержится в следующей теореме:

Если X, Y — выпуклые подмножества линейных пространств, X компактно в такой топологии, в которой вогнуто-выпуклая функция $K(x, y)$ полунепрерывна сверху по x для любого $y \in Y$, то

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y)=\inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

Из этой теоремы вытекает следствие о существовании значения игры в смешанных стратегиях.

Если X — бикомпактное хаусдорфово пространство, Y — любое множество, $K(x, y)$ непрерывна по x при любом y, то

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} K(\xi, \eta)=\inf_{\eta} \sup_{\xi} K(\xi, \eta),$$

где ξ пробегает семейство вероятностных мер, определенных на борелевских подмножествах пространства X, η пробегает все конечные смеси $\eta=\sum_k \eta_k y_k$, $\sum_k \eta_k=1$, $\eta_k \geqslant 0$, $y_k \in Y$, а

$$K(\xi, \eta)=\sum_k \eta_k \int_X K(x, y_k)\, d\xi(x).$$

Карлин [97, 98] разработал теорию бесконечных антагонистических игр, стратегиями игроков в которых являются сечения замкнутых конусов в банаховых пространствах. Пусть R, S — банаховы пространства, R^*, S^* — сопряженные им,

$K \subset R$, $L \subset S$ — замкнутые конусы, обладающие внутренними точками u, v соответственно, $Q \subset K^*$, $P \subset L^*$ — также замкнутые конусы, $P_v = \{f \in P | (v, f) = 1\}$, $Q_u = \{g \in Q | (u, g) = 1\}$, A, B — ограниченные линейные операторы из S^* в R. Рассматривается игра

$$\Gamma = \langle P_v, Q_u, K \rangle,$$

где

$$K(f, g) = \frac{(g, Af)}{(g, Bf)}, \quad f \in P_v, \quad g \in Q_u,$$

и для нее доказывается теорема существования. В частности, выбирая подходящим образом пространства стратегий и операторы A, B, можно получить некоторые теоремы существования для игр на единичном квадрате.

Существование ситуаций равновесия (ξ-равновесия) для игр, разыгрываемых на произведении выпуклых подмножеств евклидовых пространств с вогнуто-выпуклыми полунепрерывными, соответственно сверху и снизу, функциями выигрыша, исследовалось В. Н. Лебедевым и Н. Т. Тынянским [37, 38, 54] сведением к двойственным задачам выпуклого программирования. Аналогичные вопросы рассматривались Кансадо [77] и Форго [87]. Определение ситуаций равновесия для вогнуто-выпуклых игр и сопряженных им сводится к решению двойственных задач математического программирования.

Карлин [33] предложил в качестве дальнейшего расширения множеств стратегий рассматривать в качестве смешанных стратегий неотрицательные конечно-аддитивные меры. Однако для конечно-аддитивных мер не выполняется теорема Фубини, и возникает проблема определения функции выигрыша при условии выбора игроками конечно-аддитивных стратегий. Е. Б. Яновской [67] предложен рекурсивный подход к этой проблеме. Тем самым оказывается возможным определить конечно-аддитивное расширение игры. Доказано, что любая антагонистическая игра $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$, где X, Y — любые множества, K — ограниченная функция выигрыша, имеет значение в конечно-аддитивном расширении. В случае, если X, Y — топологические пространства, функция K непрерывна на $X \times Y$, значение игры Γ совпадает со значением конечно-аддитивного расширения игры.

§ 2. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ УСЛОВНО КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ СТРАТЕГИЙ В ЕСТЕСТВЕННОЙ ТОПОЛОГИИ

Пусть $K(x, y)$ — ограниченная функция, определенная на произведении двух произвольных множеств X и Y. На множествах X и Y можно ввести метрики, порожденные функцией

$K(x, y)$, следующим образом:

$$\rho(x_1, x_2) = \sup_{y \in Y} |K(x_1, y) - K(x_2, y)|, \quad x_1, x_2 \in X,$$

$$\rho(y_1, y_2) = \sup_{x \in X} |K(x, y_1) - K(x, y_2)|, \quad y_1, y_2 \in Y.$$

Эти метрики называются естественными метриками или метриками Хелли (использованные им в связи с линейными пространствами), а топологии, порожденные ими, называются естественными топологиями соответственно в множествах X и Y. В общем случае эти топологии псевдометрические. Однако переходом к классам эквивалентности псевдометрический характер этих топологий может быть устранен.

Естественные метрики на множествах стратегий X и Y игроков I и II в антагонистической игре с функцией выигрыша $K(x, y)$ рассматривались Вальдом [118].

Пусть Ξ — множество всех вероятностных мер ξ, определенных на σ-алгебре борелевских в естественной топологии множеств в X. Аналогично, H — множество всех вероятностных мер η на σ-алгебре борелевских в естественной топологии множеств в Y. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \int_Y \int_X K(x, y) \xi(dx) \eta(dy).$$

Вальдом [7] была доказана следующая

Теорема 2.1. Если одно из пространств X или Y условно компактно в естественной метрике, то

$$\sup_\xi \inf_\eta K(\xi, \eta) = \inf_\eta \sup_\xi K(\xi, \eta).$$

Условная компактность также использовалась Фань Цзи [56], хотя он определял ее иначе, применяя понятие почти периодических функций в следующем смысле.

Ограниченная функция $K(p, q)$, определенная на произведении двух произвольных множеств P и Q, называется почти периодичной слева, если существует такое подмножество $\{p_1, \ldots, p_n\} \subset P$, что для любого $p \in P$ найдется некоторое p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, так, что

$$|K(p, q) - K(p_i, q)| < \varepsilon \text{ для всех } q \in Q.$$

Аналогичное определение можно дать для функций, почти периодичных справа. Можно доказать, что если функция почти периодична слева, то она почти периодична справа, и наоборот. Легко видеть, что определение левой почти периодичности функции эквивалентно определению условной компактности метрического пространства P с естественной метрикой.

Функция $K(x, y)$, определенная на $X \times Y$, называется вогнутообразной по x (выпуклообразной по y), если для любых $x_1, x_2 \in X$ $(y_1, y_2 \in Y)$, $\lambda \in [0,1]$ $(\mu \in [0,1])$, найдется такое $x_0 \in X$ $(y_0 \in Y)$, что для всех $y \in Y$ $(x \in X)$

$$\lambda K(x_1, y) + (1-\lambda) K(x_2, y) \leqslant K(x_0, y),$$

$$(\mu K(x, y_1) + (1-\mu) K(x, y_2) \geqslant K(x, y_0).$$

Функция $K(x, y)$ называется вогнуто-выпуклообразной, если она вогнутообразна по x и выпуклообразна по y.

Фань Цзи [56] доказал следующую теорему:

Теорема 2.2. Если функция $K(p, q)$ определена на произведении двух произвольных множеств $P \times Q$ и почти периодична (слева), то для того, чтобы

$$\sup_p \inf_q K(p, q) = \inf_q \sup_p K(p, q),$$

необходимо и достаточно, чтобы функция K была вогнуто-выпуклообразной.

Очевидно, что утверждение достаточности в теореме 2.2 является алгебраическим обобщением теоремы 2.1, так как в теореме 2.2 требование линейности функции $K(p, q)$ заменено более слабым условием вогнуто-выпуклообразности.

Де [113] и Партасарати [105, 106] обобщили теоремы 2.1 и 2.2, отказавшись от метрических пространств и используя понятие условной компактности лишь в топологическом смысле.

Рассмотрим подмножества X и Y:

$$U(x_0, a) = \left\{x \mid x \in X, \sup_y [K(x, y) - K(x_0, y)] < a, a > 0, x_0 \in X\right\},$$

$$V(y_0, b) = \left\{y \mid y \in Y, \sup_x [K(x, y_0) - K(x, y)] < b, b > 0, y_0 \in Y\right\},$$

причем функция $K(x, y)$ не предполагается ограниченной. Можно доказать, что подмножества $U(x, a)$, $a > 0$, $x \in X$, образуют базис для топологии в X, аналогично $V(y, b)$, $b > 0$, $y \in Y$, образуют базис для топологии в Y. Топологии в X и Y, для которых подмножества $U(x, a)$ и $V(y, b)$ соответственно образуют базис, называются (S)-естественными топологиями.

Де принадлежат следующие теоремы:

Теорема 2.3. Пусть $K(x, y)$ — ограниченная функция, определенная на произведении условно компактных в (S)-естественной топологии множеств X и Y, $\Xi(\mathrm{H})$ — множество всех вероятностных мер на σ-алгебре в $X(Y)$, порожденной открытыми множествами в $X(Y)$. Тогда

$$\sup_{\xi \in \Xi} \inf_{\eta \in \mathrm{H}} \int_Y \int_X K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y) =$$

$$= \inf_{\eta \in H} \sup_{\xi \in \Xi} \int_Y \int_X K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y).$$

Теорема 2.4. Пусть $K(p, q)$ — функция, определенная на произведении двух произвольных множеств P и Q, ограничена снизу для каждого фиксированного $p \in P$ и вогнуто-выпуклообразна, P условно компактно в (S)-естественной топологии. Тогда

$$\sup_{p \in P} \inf_{q \in Q} K(p, q) = \inf_{q \in Q} \sup_{p \in P} K(p, q). \tag{2.1}$$

Следующая теорема является очевидным следствием теоремы 2.4.

Теорема 2.5. Если X условно компактно в (S)-естественной топологии, $K(x, y)$ ограничена по y для каждого $x \in X$,

$$\int_Y \int_X K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y) = \int_X \int_Y K(x, y)\, d\eta(y)\, d\xi(x),$$

то

$$\sup_{\xi \in \Xi} \inf_{\eta \in H} \int_Y \int_X K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y) =$$

$$= \inf_{\eta \in H} \sup_{\xi \in \Xi} \int_Y \int_X K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y).$$

Партасарати [106] заменил условие вогнуто-выпуклообразности функции K в теореме 2.4 более слабым условием конечной вогнуто-выпуклообразности. Функция $K(x, y)$ называется конечно вогнуто-выпуклообразной, если для любых конечных множеств $A \subset X$, $B \subset Y$ и для любых x_1, $x_2 \in X$, y_1, $y_2 \in Y$, λ, $\mu \in [0, 1]$ найдутся такие $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, что для всех $y \in B$, $x \in A$

$$\lambda K(x_1, y) + (1 - \lambda) K(x_2, y) \leqslant K(x_0, y),$$

$$\mu K(x, y_1) + (1 - \mu) K(x, y_2) \geqslant K(x, y_0).$$

Близкими по идеям к изложенным в этом параграфе результатам являются доказанные И. В. Романовским [49] теоремы о минимаксе для игр с неточной передачей информации.

Фенстад [84] доказал, что если пространство стратегий одного из игроков условно компактно в естественной топологии, то справедлив конечно-аддитивный аналог теоремы Фубини и существуют оптимальные конечно-аддитивные стратегии у обоих игроков.

§ 3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ИГР НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

Наиболее простым и достаточно хорошо изученным классом бесконечных антагонистических игр является класс, в котором множества чистых стратегий игроков представляют собой некоторые континуальные множества, обычно рассматриваемые как сегменты [0, 1]. Так как множеством ситуаций (в чистых стратегиях) в таких играх является квадрат, они называются играми на единичном квадрате. В качестве смешанных стратегий игроков в играх на единичном квадрате рассматриваются лебеговские меры на отрезке [0, 1] или соответствующие им функции распределения. Функция выигрыша предполагается ограниченной и измеримой по Лебегу по обеим переменным.

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы существования для игр на единичном квадрате, т. е. условия, налагаемые на функцию выигрыша $K(x, y)$ $(x, y \in [0, 1])$, при которых выполняется равенство

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y) = \inf_{\eta} \sup_{\xi} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y), \tag{3.1}$$

где ξ, η — функции распределения на отрезке [0, 1].

Если функция $K(x, y)$ непрерывна по обеим переменным, то справедливость (3.1) следует, например, из теоремы Вилля (§ 1), причем sup и inf можно заменить соответственно на max и min.

Если же функция $K(x, y)$ непрерывна только по одной из переменных, например, по x, то равенство (3.1) следует из теоремы Пека и Далмиджа (см. § 1). Этот же результат был получен Карлином [33].

Что касается функций $K(x, y)$, не являющихся непрерывными ни по одной из переменных, то равенство (3.1), вообще говоря, не имеет места. Например (Вилль [114]), для функции $K(x, y)$, равной

$$K(x, y) = \begin{cases} -1, & x < y \neq 1, \quad \text{и} \quad x = 1, \quad y \neq 1, \\ 0, & x = y, \\ 1, & y < x \neq 1, \quad \text{и} \quad y = 1, \quad x \neq 1, \end{cases}$$

мы имеем

$$\sup_{\xi} \inf_{\eta} \int_0^1 \int_0^1 K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y) = -1,$$

$$\inf_{\eta}\sup_{\xi}\int_0^1\int_0^1 K(x, y)\, d\xi(x)\, d\eta(y) = 1.$$

Примеры игр, не обладающих значением, имеются также у Вальда [7] и Сайона и Вулфа [51].

Однако для некоторых классов разрывных функций выигрыша удается доказать справедливость равенства (3.1). Весьма общие результаты в этом направлении были получены Карлином [33] при помощи рассмотрения оператора

$$T\eta = \int_0^1 K(x, y)\, d\eta(y),$$

и изучении различных условий, налагаемых на оператор T, при которых справедливо равенство (3.1). Часть результатов Карлина перекрывается теоремой Пека и Далмиджа [46], поэтому мы приведем результаты, касающиеся именно разрывных функций выигрыша.

Пусть P — множество смешанных стратегий игрока I, состоящее из конечных смесей чистых стратегий, т. е. множество ступенчатых функций распределения с конечным числом скачков.

Оператор T называется квазислабо вполне непрерывным, если для любой последовательности $\eta_n \in \mathrm{H}$ существует такая подпоследовательность η_{n_k} и $\eta_0 \in \mathrm{H}$, что для всех $x \in [0, 1]$, кроме, быть может, конечного их числа

$$(\xi, T\eta_{n_k}) \to (\xi, T\eta_0), \tag{3.2}$$

где

$$(\xi, T\eta) = \int_0^1 d\xi(x) \int_0^1 K(x, y)\, d\eta(y).$$

Оператор T называется плотно слабо сепарабельным, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность $\{\xi_i\}$, $\xi_i \in X$, что для любых $\xi \in P$ и $\eta \in \mathrm{H}$ существует элемент ξ_{i_0}, для которого

$$|(\xi, T\eta) - (\xi_{i_0}, T\eta)| \leqslant \varepsilon, \tag{3.3}$$

и если из ξ_i удалить конечное число тех ξ_{i_k}, для которых соотношение (3.2) нарушается, то элемент ξ_{i_0} из неравенства (3.3) можно выбрать из последовательности $\{\xi_i\} \setminus \{\xi_{i_k}\}$.

Теорема 3.1. Если оператор T квазислабо вполне непрерывен и плотно слабо сепарабелен, то

$$\sup_{\xi}\inf_{\eta}(\xi, T\eta) = \inf_{\eta}\sup_{\xi}(\xi, T\eta).$$

Примером функции $K(x, y)$, определенной на единичном квадрате и удовлетворяющей условиям теоремы 3.1, является следующая:

$$K(x, y) = \begin{cases} M(x, y), & x \leqslant y, \\ L(x, y), & x > y, \end{cases}$$

где функции M и L непрерывны в областях своего определения. Условие квазислабо полной непрерывности оператора T в теореме 3.1 можно ослабить, требуя вместо (3.2) выполнения лишь одностороннего условия

$$(\xi, T\eta_0) - (\xi, T\eta_{n_k}) \leqslant \varepsilon.$$

При помощи такого обобщения можно показать, что для функции

$$K(x, y) = \begin{cases} M(x, y), & x < y, \\ \varphi(x), & x = y, \\ L(x, y), & x > y, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $M(x, y)$, $\varphi(x)$, $L(x, y)$ непрерывны соответственно в областях $x \leqslant y$, $x = y$, $x \geqslant y$,

$$\min\{L(x, x), M(x, x)\} \leqslant \varphi(x) \leqslant \max\{L(x, x), M(x, x)\}$$
$$\text{для всех } x \in [0, 1], \tag{3.5}$$

справедливо равенство (3.1) с заменой sup на max и inf на min.

Таким образом доказано существование оптимальных стратегий в играх с выбором момента времени (см. § 6), функции выигрыша которых удовлетворяют условиям (3.4) и (3.5).

Е. Б. Яновская [62, 64] рассматривала игры на единичном квадрате с квазиинвариантными функциями выигрыша, причем ограниченность функций выигрыша не предполагалась.

Функция $K(x, y)$ называется квазиинвариантной относительно семейств Φ и Ψ отображений единичного интервала в себя, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$, что для всех $x, y \in [0, 1]$

$$|K(\varphi(x), y) - K(x, \psi(y))| < \varepsilon.$$

Теорема 3.2. Пусть функция выигрыша $K(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Интегралы

$$\int_0^1 K(x, y)\,dx, \quad \int_0^1 K(x, y)\,dy$$

сходятся равномерно соответственно относительно y и x.

2. Существуют семейства отображений отрезка $[0,1]$ в себя $\Phi_{\delta_1\delta_2}=\{\varphi_\delta\}_{\delta\in[\delta_1,\delta_2]}$, $\Psi_{\delta_1\delta_2}=\{\psi_\delta\}_{\delta\in[\delta_1,\delta_2]}$, относительно которых функция $K(x,y)$ квазиинвариантна и для которых при всех $\delta',\delta''\in[\delta_1,\delta_2]$, $x\in[0,1]$ выполняются неравенства

$$|\varphi_{\delta'}(x)-\varphi_{\delta''}(x)|>C|\delta'-\delta''|,$$
$$|\psi_{\delta'}(x)-\psi_{\delta''}(x)|>C|\delta'-\delta''|.$$

3. Интегралы

$$\int\limits_S K(x,y)\,dy,\quad \int\limits_S K(x,y)\,dx$$

являются непрерывными функциями соответственно x и y для любого измеримого множества $S\subset[0,1]$. Тогда для функции $K(x,y)$ справедливо равенство (3.1).

При помощи этой теоремы можно доказать существование значения игры для игр с функциями выигрыша следующего вида:

$$K(x,y)=\begin{cases}h_1(x,y)\ln(x-y), & x>y,\\ \varphi(x), & x=y,\\ h_2(x,y)\ln(y-x), & x<y,\end{cases}$$

$$K(x,y)=\begin{cases}h(x,y)\ln(|x-a|+|y-b|), & |x-a|+|y-b|\neq 0,\\ \alpha, & x=a,\ y=b,\end{cases}$$

где φ, h, h_1, h_2 — непрерывные функции соответственно на множествах $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant x$, $y\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$, h_1 и h_2 монотонно возрастают по x и монотонно убывают по y, $0<a$, $b<1$. Также можно показать справедливость равенства (3.1) для функции вида (3.4), предполагая выполнение условия (3.5) лишь в точках $(0,0)$ и $(1,1)$.

Партасарати [107] доказал теорему существования для функций выигрыша, имеющих лишь конечное число линий разрыва на единичном квадрате, при условии что множество смешанных стратегий одного из игроков состоит только из абсолютно непрерывных функций распределения.

§ 4. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ АНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ИГР

Боненбласт, Карлин и Шепли [4] показали, что множество матриц данного размера, определяющих игру с единственным решением, является открытым и плотным подмножеством пространства всех матриц данного размера с метрикой $\rho(A,B)=\sup\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}|a_{ij}-b_{ij}|$ (A, B — матрицы размера $m\times n$).

Для бесконечных игр теоремы единственности были сначала установлены для некоторых специальных классов игр.

на единичном квадрате: игры с выбором момента времени, колоколообразные игры ([32], гл. 13—15).

Что касается общих теорем о единственности решения, то теорема Боненбласта, Карлина и Шепли не допускает прямого обобщения на бесконечные игры, так как легко можно показать, что множество непрерывных функций на единичном квадрате, определяющих игру с единственным решением, не является открытым в пространстве непрерывных функций.

Однако второе утверждение теоремы Боненбласта, Карлина и Шепли, как показал Карлин [32] (см. также Г. Н. Дюбин [29]), справедливо и для игр на единичном квадрате.

Игра называется игрой с конечным спектром, если спектр (т. е. носитель меры) всех оптимальных стратегий игроков конечен.

Пусть $C(X \times Y)$ — пространство непрерывных функций на единичном квадрате ($X = Y = [0, 1]$).

Теорема 4.1. Множество функций $K \in C$, определяющих игру с единственным решением и конечным спектром, является плотным подмножеством C.

Г. Н. Дюбину [29] удалось выяснить структуру множества игр на единичном квадрате с единственным решением. Им была доказана следующая

Теорема 4.2. Множество функций $K \in C$, для которых игра $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$ обладает следующими свойствами:

1) Γ имеет единственное решение,

2) оптимальные стратегии, т. е. функции распределения непрерывны,

3) спектр оптимальной стратегии каждого игрока есть нигде не плотное совершенное замкнутое множество лебеговой меры нуль, содержит всюду плотное подмножество типа G_δ.

Теорема 4.2 представляет принципиальный интерес. Она утверждает не только, что «почти все» игры на единичном квадрате имеют единственное решение, но и что оптимальные стратегии в них являются сингулярными функциями распределения. Следовательно, все изученные классы игр с непрерывными функциями выигрыша, имеющие достаточно «простые» решения, следует рассматривать как вырожденные, а пример Гросса [19] игры на единичном квадрате с непрерывной рациональной функцией выигрыша, в которой единственной оптимальной стратегией каждого из игроков является распределение Кантора, наоборот, типичен.

В некотором смысле обратные задачи решались Гейлом, Гликсбергом и Гроссом [14, 18]. В [18] для любой пары функций распределения на отрезке [0, 1] построена игра на единичном квадрате с непрерывной функцией выигрыша, имеющая эту пару своим единственным решением. В [14] показано, что можно построить полиномиальную функцию выигрыша, так чтобы игра имела заданную пару смешанных стратегий с конечным спектром своим единственным решением.

В случае, когда оптимальные стратегии игроков неединственны, Баком [1] и Хейбрехтс [59] предлагались различные критерии выбора единственной «наилучшей» стратегии среди оптимальных: использование возможной ошибки противника, минимизация дисперсии выигрыша.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Даже для самого простого класса бесконечных антагонистических игр — игр на единичном квадрате — не существует общих методов их решения. В §§ 6—9 будут указаны классы игр на единичном квадрате, для которых возможно аналитически найти решение. Во всех остальных случаях единственными до настоящего времени методами решения являются приближенные, которые, однако, также возможны или разумны для применения далеко не всегда.

Прежде всего заметим, что если пространство стратегий игрока X условно компактно (в естественной топологии), то для любого $\varepsilon>0$ существует конечная ε-сеть $x_1, \ldots, x_{m_\varepsilon} \in X$, т. е. для любого $x \in X$ найдется такое x_i, $1 \leqslant i \leqslant m_\varepsilon$, что

$$|K(x, y)-K(x_i, y)|<\varepsilon \text{ для всех } y \in Y.$$

Так как из условной компактности пространства X в естественной топологии следует условная компактность пространства Y (Вальд [7]), у игрока II также существует конечная ε-сеть $y_1, \ldots, y_{n_\varepsilon} \in Y$ для любого $\varepsilon>0$. Обозначим через Γ_ε матричную игру размера $m_\varepsilon \times n_\varepsilon$ с матрицей $\|K_{ij}^\varepsilon\|$, где $K_{ij}^\varepsilon=K(x_i, y_j)$, $1 \leqslant i \leqslant m_\varepsilon$, $1 \leqslant j \leqslant n_\varepsilon$. Тогда, очевидно, оптимальные стратегии игроков в игре Γ_ε (точнее, соответствующие им ступенчатые функции распределения) будут ε-оптимальными стратегиями игроков в исходной игре. Примером применения такого приближения может служить игра, рассмотренная Д. А. Георгобиани [16]. Приближение игр на единичном квадрате матричными возможно в некоторых конкретных случаях и для игр с разрывной функцией выигрыша. Фогель [58] рассмотрел игру типа дуэли с функцией выигрыша

$$K(x, y)=f(x)-pg(y)\begin{cases}+pf(x)g(y), & x<y, \\ +0, & x=y, \\ -f(x)g(y), & x>y,\end{cases} \qquad (5.1)$$

$$x, y \in [0, 1],$$

где функции f и g монотонно возрастают и непрерывны справа, и матричную игру с матрицей выигрышей $\|K_{\mu\nu}\|$, $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, m$, где

$$K_{\mu\nu} = f_\mu - pg_\nu \begin{cases} +pf_\mu g_\nu, & \mu < \nu, \\ 0, & \mu = \nu, \\ -f_\mu g_\nu, & \mu > \nu, \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$f_\mu = f(x_\mu),\ g_\nu = g(x_\nu),$$
$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu < \ldots < x_m = 1,$$

и показал, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v^{(\varepsilon)} = v,$$

где v — значение игры с функцией выигрыша K, $v^{(\varepsilon)}$ — значение матричной игры, определенной в (5.2), если для $x_\nu \leqslant x < x_{\nu+1}$ $|f(x_\nu) - f(x)| < \varepsilon$, $|g(x_\nu) - g(x)| < \varepsilon$.

Алгоритм решения матричных и бесконечных антагонистических игр с непрерывной функцией выигрыша методом случайного поиска предложен Б. А. Маврицким [39].

Обобщение итеративного метода Брауна — Робинсон решения матричных игр на игры с компактными в естественной топологии пространствами стратегий игроков принадлежит Данскину [21].

Пусть $K(x, y)$ — непрерывная функция, определенная на произведении компактных пространств X и Y. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ($x_n \in X$, $y_n \in Y$, $n = 0, 1, 2, \ldots$) задаются следующим образом: x_0 произвольно, x_n максимизирует сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} K(x, y_k) \quad (n \geqslant 1),$$

y_0 произвольно, y_n минимизирует сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} K(x_k, y) \quad (n \geqslant 1).$$

Данскин доказал, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} K(x_n, y_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} K(x_k, y_n) = v,$$

где v — значение игры $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$.

Игра $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$ называется вогнуто-выпуклой, если множества стратегий игроков X и Y выпуклы, а функция $K(x, y)$ вогнута по x для каждого $y \in Y$ и выпукла по y для каждого $x \in X$.

Условие вогнутости по x и выпуклости по y функции выигрыша гарантирует (в случае справедливости теоремы существования) наличие у игроков оптимальных чистых стратегий.

Методы решения вогнуто-выпуклых игр можно строить, используя теорию двойственности математического программирования (см. § 1).

Опишем непрерывный градиентный метод Эрроу — Гурвица [61]. Пусть $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$, где $X = \{x \in E^m,\ x \geqslant 0\}$, $Y = \{y \in E^n,\ y \geqslant 0\}$. Функция K дважды непрерывно дифференцируема по x и по y. Градиентный процесс определяется системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_i &= \delta_{x_i} K_{x_i}, \\ \dot{y}_j &= -\delta_{y_j} K_{y_j}, \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 1, \ldots, m, \\ j &= 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

где

$$\delta_{x_i} = \begin{cases} 0, & x_i = 0,\ K_{x_i} < 0, \\ 1, & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\delta_{y_j} = \begin{cases} 0, & y_j = 0,\ K_{y_j} > 0, \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 5.1. Если функция $K(x, y)$ строго вогнута по x и выпукла по y, то градиентный процесс сходится к седловой точке функции K, т. е. к решению игры Γ при произвольном начальном векторе $z^0 = (x^0, y^0) \geqslant 0$.

М. А. Генин [15] использует метод возможных направлений для решения вогнуто-выпуклых игр, в которых $X = S_m$, $Y = S_n$ — симплексы соответствующей размерности. Им предложен алгорифм решения линейно-выпуклых игр с функцией выигрыша $K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i(y)$, где $f_i(y)$ — выпуклые функции с непрерывными производными. Здесь функция $K(x, y)$ аппроксимируется функцией $M_\delta(x, y)$, сходящейся к $K(x, y)$ при $\delta \to 0$ и строго выпуклой по y. Затем к отысканию оптимальных стратегий в игре с функцией выигрыша $M_\delta(x, y)$ применяется метод множителей Лагранжа.

Аналогичные подходы к решению вогнуто-выпуклых игр разрабатывались в работах Ауслендера [68], Форго [86], Штефэнеску [112].

§ 6. ИГРЫ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

Играми с выбором момента времени называются бесконечные антагонистические игры, в которых чистыми стратегиями игроков являются моменты времени, в которые они могут совершить некоторое действие. Если каждый из игроков может совершить действие один раз, то при надлежащей нормировке пространствами чистых стратегий игроков являются сегменты [0,1], а сама игра — игрой на единичном квадрате.

Примером игр с выбором момента времени являются дуэли. В модели дуэльной ситуации каждый игрок обладает возможностью в течение некоторого промежутка времени один или несколько раз выстрелить в своего противника, причем вероятность попадания со временем возрастает. Поэтому игроки, с одной стороны, стремятся задержать свой выстрел, чтобы увеличить вероятность попадания, с другой стороны, не задерживать его настолько, чтобы быть убитыми противником. Подробное изложение теории игр с выбором момента времени имеется в монографии Карлина [32].

Математически игра с выбором момента времени (одного для каждого игрока) описывается игрой на единичном квадрате со следующей функцией выигрыша:

$$K(x, y)=\begin{cases} L(x, y), & 0\leqslant x<y\leqslant 1, \\ \varphi(x), & x=y, \\ M(x, y), & 0\leqslant y<x\leqslant 1, \end{cases} \tag{6.1}$$

где функции L и M непрерывны, монотонно возрастают по x и убывают по y. Для дуэли свойства монотонности функций L и M отражают монотонность вероятностей поражения, а разрыв функции выигрыша $K(x, y)$ на диагонали квадрата отражает существенность порядка, в котором игроки производят свои выстрелы. Существование значения игры с функцией выигрыша вида (6.1) следует из теоремы Карлина (см. § 1).

Карлином [34] было показано, что в игре с выбором момента времени в предположении дважды непрерывной дифференцируемости функций L и M в соответствующих областях определения каждый игрок имеет оптимальную стратегию, причем функции распределения, соответствующие им, состоят из возможных скачков в 0 и 1 и абсолютно непрерывной части на отрезке $[a, 1]$, $0\leqslant a<1$.

Нахождение оптимальных стратегий сводится к решению интегральных уравнений. **Оптимальные стратегии** или единственны, или же отличаются лишь величинами скачков в 0 и 1 (Карлин [34], Е. Б. Яновская [63], фон Вольферсдорф [120]).

Фон Вольферсдорф [120] дал классификацию оптимальных стратегий игроков в играх с выбором момента времени без предположения о дифференцируемости функций L и M.

Случай, когда каждый из игроков может совершать действие более одного раза, исследован только для частного случая дуэльных ситуаций. Именно, пусть игрок I имеет возможность сделать m выстрелов, а игрок II — n выстрелов. Выстрелы могут производиться на интервале $[0,1]$. Заданы функции меткости игроков (т. е. вероятности попадания) соответственно $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t\in[0,1]$, которые предполагаются монотонно возрастающими. Выигрыш каждого игрока равен 1, если он убивает противника, —1, если гибнет сам, и 0 в остальных случаях.

Если каждый игрок в любой момент времени знает моменты ранее произведенных выстрелов противника (т. е. «слышит»), то дуэль называется шумной, если же оба игрока не знают этого, то — бесшумной. Бесшумная дуэль с несколькими выстрелами у каждого из игроков подробно исследована Рестрепо [110] (см. также Карлин [32]).

Существование значения игры симметричной ($P_1(t) \equiv \equiv P_2(t) \equiv t$) шумной дуэли доказано Блекуэллом и Гиршиком [3]. Ими же предложен метод вычисления оптимальных (ε-оптимальных) стратегий, основанный на идеях динамического программирования. Общая шумная дуэль с несколькими выстрелами у каждого из игроков решена Фоксом и Кимельдорфом [88, 89]: Пусть $G_{mn}(P_1, P_2)$ — шумная дуэль, где игрок I (II) имеет m (n) выстрелов и его функция меткости $P_1(t)$ ($P_2(t)$), $t \in [0, 1]$; $P_1(0) = P_2(0) = 0$, $P_1(1) = = P_2(1) = 1$, функции P_1, P_2 непрерывные и неубывающие. Доказано, что существует значение игры v_{mn} игры G_{mn}, удовлетворяющее следующим рекуррентным уравнениям:

$$\begin{aligned} v_{ij} &= P_1(t_{ij}) + (1 - P_1(t_{ij}))v_{i-1,j} = \\ &= P_2(t_{ij}) + (1 - P_2(t_{ij}))v_{i,j-1}, \\ i,\ j &= 1,\ 2,\ \ldots;\quad t_{0n} = t_{m0} = 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Далее существует такой набор $\{t_{ij}\}$, удовлетворяющий уравнениям (6.2), что, за исключением тривиальных случаев,

$$t_{ij} < \min(t_{i-1,j},\ t_{i,j-1}), \tag{6.3}$$

и оптимальным моментом первого выстрела по крайней мере для одного из игроков является t_{mn}.

Можно также рассматривать дуэли, в которых один из игроков имеет информацию о выстрелах противника, а другой — нет (так называемые смешанные дуэли). Решение смешанной дуэли с одним выстрелом у каждого игрока имеется в книгах Карлина [32] и Дрешера [24]. Смит [111] решил следующую смешанную дуэль. Игрок I имеет 2 выстрела, игрок II — один выстрел, причем игрок II слышит второй по порядку из двух выстрелов игрока I, а игрок I слышит выстрел игрока II.

§ 7. ИГРЫ, ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЯ С КОНЕЧНЫМ СПЕКТРОМ

Будет говорить, что игра имеет решение с конечным спектром, если у каждого игрока существует оптимальная стратегия (или набор ε-оптимальных), состоящая из смеси конечного числа чистых стратегий. Примером таких игр являются колоколообразные игры, обобщенно-выпуклые игры (Карлин [32]).

Однако проблема классификации игр, имеющих решение с конечным спектром, остается нерешенной. Известны лишь отдельные классы игр, в основном, игры на единичном квадрате, удовлетворяющих этому условию.

Г. Н. Дюбин [28] показал, что игры на единичном квадрате с кусочно-монотонной функцией выигрыша в некоторых случаях допускают редукцию таким образом, что решение редуцированной игры, получаемой из исходной некоторым сужением пространства чистых стратегий, т. е. единичного интервала, оказывается также и решением исходной игры.

Например, пусть функция выигрыша имеет вид $K(x, y) = f(x-y)$, где $f(u)$ — произвольная, непрерывная кусочно-линейная функция на отрезке $[-1,1]$ с рациональными точками излома $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Оказывается, что у обоих игроков существуют оптимальные стратегии, спектр которых содержится в множестве

$$\bigcup_{i=0}^{M}\left\{\frac{i}{M}\right\},$$

где M — наименьшее общее кратное знаменателей u_i. Таким образом, решая матричную игру размера $(M+1)\times(M+1)$, можно найти значение первоначальной игры и хотя бы по одной оптимальной стратегии каждого игрока.

В качестве другого примера можно рассмотреть игру на квадрате с функцией выигрыша

$$K(x, y)=\begin{cases}1+\frac{1}{\delta}(x-y), & |x-y|\leqslant\delta,\ x\leqslant y,\\ 1+\frac{1}{\delta}(y-x), & |x-y|\leqslant\delta,\ x\geqslant y,\\ 0, & |x-y|>\delta.\end{cases} \qquad (7.1)$$

В этой игре у обоих игроков существуют оптимальные стратегии, спектр которых содержится в множестве

$$\bigcup_{k=0}^{n}\{k\delta\}\cup\bigcup_{k=0}^{n}\{1-k\delta\}, \qquad n=\left[\frac{1}{\delta}\right].$$

Все оптимальные стратегии игры с функцией выигрыша (7.1) были найдены Г. Н. Дюбиным [27]. Значение игры v_δ равно

$$v_\delta=\begin{cases}\frac{2}{n+2}-\frac{1}{\delta(n+1)(n+2)}, & \text{если } \delta<\frac{1}{2},\\ \frac{4\delta-1}{6\delta}, & \frac{1}{2}\leqslant\delta\leqslant 1,\\ 1-\frac{1}{2\delta}, & \delta>1.\end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока II единственна и равна в случае $\delta < 1/2$

$$G(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{(n+1)(n+2)} I_{k\delta}(y) + \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k+1}{(n+1)(n+2)} I_{1-k\delta}(y),$$

где $I_a(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant a \\ 1, & y > a \end{cases}$. Игрок I имеет бесконечное множество оптимальных стратегий, в частности, одна из них совпадает с оптимальной стратегией игрока II.

Довольно общие (в смысле формулировок) результаты в этом направлении имеются в работе Рагхавана [109] (см. также [108]).

Пусть в игре $\Gamma = \langle X, Y, K \rangle$, X, Y — компактные метрические пространства, функция выигрыша $K(x, y) > 0$ непрерывна на X, C — банахово пространство непрерывных функций на X, D — замыкание выпуклого конуса в E_X, порожденного функциями $h_\alpha(x) = K(x, \alpha)$, $\alpha \in Y$, E_0 — линейное многообразие $D - D$ и $\bar{E}$ — его замыкание.

Теорема 7.1. Пусть A — положительный оператор $\bar{E}_0 \to E_X$, непрерывный на D. Если A изометричен на D и конус $A(\bar{E}_0)$ имеет относительную внутреннюю точку в замкнутом линейном многообразии, порожденном этим конусом, то игрок II имеет оптимальную стратегию с конечным спектром.

Условиям этой теоремы удовлетворяют, например, игры на единичном квадрате, для которых $K(x, y) \leqslant (1-x)K(0, y) + xK(1, y)$ для всех x, $y \in [0, 1]$. Оператор A здесь определяется как A: $h_\alpha(x) = K(x, \alpha) \to g_\alpha(x) = (1-x) K(0, \alpha) + xK(1, \alpha)$.

Примером игры на единичном квадрате с разрывной функцией выигрыша и оптимальными стратегиями с конечным спектром является так называемая «стрельба с задержкой» (Дрешер [24]). Функция выигрыша в такой игре равна

$$K(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leqslant x \leqslant 1 - t \text{ и } x + t \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (7.2)$$

Здесь множеством стратегий игрока I является интервал $[0, t]$. Пусть $n = \left[\frac{1}{t}\right]$. Значение игры равно $v = 1 - \frac{1}{n}$. Оптимальными стратегиями игроков I и II, например, являются следующие

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} I_{jt}(x),$$

$$G(y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I_{j/(n+1)}(y).$$

Вообще говоря, оптимальных стратегий у игроков бесконечное множество, например, если $1/t$ — целое число, оптимальной стратегией игрока II будет и равномерное распределение $G(y)=y$. Н. Н. Воробьев [11] нашел все оптимальные стратегии игроков в более общей игре с функцией выигрыша

$$K(x, y)=\begin{cases}1, & f(x)\leqslant y\leqslant g(x),\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \tag{7.2}$$

где f, g — непрерывные, неубывающие функции на отрезке $[0,1]$, причем $f(0)=0$, $g(1)=1$, $g(0)<1$, $f(1)<1$.

Набор $\{x_1,\ldots,x_m\}$, $0\leqslant x_i\leqslant 1$, $i=1,\ldots,m$, называется покрытием для игры Γ с функцией выигрыша (7.2), если для каждого $0\leqslant y\leqslant 1$ найдется $1\leqslant i\leqslant m$ такое, что $f(x_i)\leqslant y\leqslant g(x_i)$. Набор $\{y_1,\ldots,y_n\}$ называется укладкой, если не существует $1\leqslant j$, $k\leqslant n$, $j\neq k$, $x\in[0,1]$ таких, что $f(x)\leqslant y_j$, $y_k\leqslant g(x)$. В [11] показано, что если для игры Γ существует конечное покрытие, то число элементов минимального покрытия равно числу элементов максимальной укладки и оптимальными стратегиями игроков I и II являются, например, равновероятные выборы элементов соответственно минимального покрытия и максимальной укладки.

А. Г. Сухаревым [53] рассматривались игры на единичном квадрате с функцией выигрыша

$$K(x, y)=\begin{cases}L(x, y) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ M(x, y) & \text{при } 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

где $L(x,x)=M(x,x)$, функции $L(x,y)$ и $M(x,y)$ непрерывно дифференцируемы по каждой из переменных в соответствующих замкнутых треугольниках, строго вогнуты по x и строго выпуклы по y, функция $\varphi(x)=\frac{\partial L(x,x)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,x)}{\partial x}$ конечное число раз меняет знак на интервале $(0,1)$. Доказано, что все оптимальные стратегии игроков в такой игре имеют конечный спектр, причем для любых оптимальных стратегий игроков F и G в открытом интервале между любыми двумя точками спектра F содержится ровно одна точка из спектра G и наоборот.

§ 8. ИГРЫ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

1. В §§ 5—7 рассматривались игры на единичном квадрате. В таких играх множеством всех смешанных стратегий игроков являлось множество функций распределения на единичном интервале.

В этом параграфе мы рассмотрим игры, множества чистых стратегий игроков в которых не могут быть отождествлены с подмножествами евклидовых пространств, но могут быть погружены в классические функциональные пространства. Анализ этих игр сложен, так как введение понятия смешанной стратегии является проблемой задания меры на функциональных пространствах. Поэтому из игр этого класса исследуются главным образом такие, для нахождения решения которых достаточно множества чистых стратегий. Большинство решений предложенных далее игр получено с помощью известной леммы Неймана—Пирсона [101].

Карлином [32] рассматривались тактические дуэли, в которых предполагался непрерывный режим огня хотя бы у одного игрока в отличие от игр с выбором момента времени (см. § 6), где каждый игрок имеет конечное число моментов для совершения некоторого действия. Обзор результатов, содержащихся в монографии Карлина, имеется также в статье Хейбрехтс [95]. Если игрок имеет ограниченное количество боеприпасов, которые он может расходовать в некотором интервале $[a, b]$, и плотность огня ограничена (сверху), то его стратегия может быть задана функцией $p(t)$, $t \in [a, b]$, подчиненной следующим ограничениям:

$$0 \leqslant p(t) \leqslant 1, \int_a^b p(t)\, dt = \alpha < b - a. \tag{8.1}$$

Ограничение $\alpha < b - a$ означает, что игрок не может в течение всей дуэли вести максимально плотный режим огня.

2. Рассмотрим в этом пункте некоторые классы игр, в которых множеством стратегий игрока I по-прежнему остается единичный интервал, а стратегиями игрока II являются функции, заданные на интервале $[0, 1]$ и удовлетворяющие ограничениям (8.1). Дуэль снайпера с пулеметчиком, исследованная Карлином, описывается игрой с функцией выигрыша

$$\varphi(t, p) = \exp\left(-\int_0^t p(u)\, r(u)\, du\right), \tag{8.2}$$

где $0 \leqslant r(u) \leqslant 1$, $r(u)$ — возрастающая функция, или в более общем случае

$$K(t, p) = \alpha a(t)\, \varphi(t, p), \tag{8.3}$$

где $0 \leqslant a(t) \leqslant 1$ — возрастающая функция. В игре с функцией выигрыша (8.3) игрок I имеет оптимальную смешанную стратегию, а игрок II — оптимальную чистую.

Е. Б. Яновская [65] нашла оптимальные стратегии игроков в игре с функцией выигрыша более общей, чем (8.3), а именно:

$$K(t,\ p)=V\left(t,\ \int_0^t p(u)\,r(u)\,du\right),$$

где функция $V(t,\ y)$ определена на произведении $[0,1]\times\times[0,\ \infty)$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(t,\ y)$ имеет непрерывные частные производные по t и по y,

2) $V(t,\ y)$ возрастает по t и убывает по y,

3) $\frac{\partial^2 V(t,\ y)}{\partial y^2}>0$ для всех t и y,

4) $\lim\limits_{y\to\infty} V(t,\ y)=0$ для всех $t\in[0,\ 1]$.

Там же была решена игра с функцией выигрыша вида

$$K(t,\ p)=V(t,\ p(t))$$

при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию V. Тактическую задачу об обнаружении подводной лодки исследовал Данскин [78]. Эта задача сводится к решению игры, напоминающей дуэль снайпера с пулеметчиком, но с более сложной функцией выигрыша. Именно, чистой стратегией игрока I является выбор $t\in[0,\ \infty)$, стратегией игрока II — функция распределения $X(t)$ на $[0,\ \infty)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty \xi(t)\,dX(t)=\Xi,$$

$\xi(t)$ — неотрицательная заданная функция. Функция выигрыша $K(t,\ X)$ имеет вид

$$K(t,\ X)=Q(t)\,f(t)+\omega\int_t^\infty f(t)\,dQ(t),$$

где

$$Q(t)=\exp\left[-\int_t^\infty dX(t)\right],$$

$f(t)$ — возрастающая функция, $0\leqslant f(t)\leqslant 1$, $t\in[0,\ \infty)$, $0\leqslant\omega\leqslant 1$.

3. Пусть теперь стратегиями обоих игроков являются соответственно функции $x(s)$, $y(s)$, определенные для $s\in[0,\ \infty)$, подчиненные следующим ограничениям:

$$0\leqslant x(s),\quad y(s)\leqslant 1,\quad \int_0^\infty x(s)\,ds=\alpha,\quad \int_0^\infty y(s)\,ds=\beta.$$

Если s рассматривать как расстояние между противниками, то функции $x(s)$, $y(s)$ можно интерпретировать как интенсивность стрельбы каждого игрока в зависимости от расстояния между ними. Такая ситуация называется дуэлью двух пулеметчиков. Пусть заданы функции меткости $\xi(s)$, $\eta(s)$ соответственно. Решение дуэли двух пулеметчиков (в чистых стратегиях) было найдено Данскином и Джилманом [79] (см. также Карлин [32]), если функция выигрыша $K(x(s), y(s))$ определяется как вероятность поражения игрока II.

Аналогичным способом при помощи леммы Неймана — Пирсона Е. Б. Яновской [66] найдены оптимальные стратегии игроков в дуэли двух пулеметчиков, в которой игрок I выигрывает A, если он убивает II, теряет B, если гибнет сам, и выигрыш равен 0 в остальных случаях.

Существование значения игры в смешанных стратегиях для одного класса игр на пространствах функций доказано Флемингом [57]. Если $\mathfrak{X}=\{x(t) \mid t \in T\}$ — множество функций, являющихся чистыми стратегиями игрока, то в качестве смешанной стратегии Флеминг рассматривает измеримые по $u \in [0, 1]$ функции $x(t, u)=x_u(t)$, где $x_u \in \mathfrak{X}$ для всех $u \in [0, 1]$. Рандомизация множества чистых стратегий игроков состоит в следующем: в соответствии с равномерным распределением на $[0, 1]$ выбирается точка u, и затем игрок выбирает свою стратегию x_u.

Решение непрерывной задачи распределения, сводящейся к игре с функцией выигрыша

$$K(a, d)=\int_0^1 f(x)\, a(x)\, d(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — неотрицательная строго возрастающая функция, а множества стратегий игроков подчинены ограничениям $0 \leqslant a(x) \leqslant 1$, $0 \leqslant d(x) \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\int_0^1 a(x)\, dx=A, \quad \int_0^1 d(x)\, dx=D,$$

имеется в книге Беллмана, Гликсберга и Гросса [2].

§ 9. ДРУГИЕ КЛАССЫ ИГР

1. Игры с функцией выигрыша, зависящей лишь от разности стратегий игроков. Такие игры (на единичном квадрате) являются моделью многих тактических задач преследования. Карлином [30, 32] подробно изучены колоколообразные игры с функцией выигрыша $K(x, y)=\varphi(x-y)$, где $\varphi(u)$ — частотная функция Пойя, $-\infty < u < \infty$.

В. А. Доманским [23] получены необходимые условия существования выравнивающих оптимальных стратегий (т. е. таких стратегий F^* и G^*, что $\int_0^1 K(x, y)\, dF^*(x) \equiv$

$\equiv \int_0^1 K(x, y)\, dG^*(y) \equiv v$ для всех $x, y \in [0, 1]$) в играх с аналитическими функциями выигрышей. Предложен метод нахождения таковых стратегий, использующий преобразования Фурье. Б. С. Флейшман и В. Ф. Крапивин [36] (см. также [35]) предложили регулярный метод решения игр на полосе $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, 1]$ с кусочно-постоянной функцией выигрыша вида

$$K(x, y) = \begin{cases} \alpha_1, & x - y \leqslant -k\varepsilon, \\ \alpha_{k+1-i}, & -(i+1)\varepsilon < x - y \leqslant -i\varepsilon, \\ \alpha_{k+1}, & -\varepsilon < x - y \leqslant \varepsilon, \\ \alpha_{k+1+j}, & j\varepsilon < x - y \leqslant (j+1)\varepsilon, \\ \alpha_{k+1+s}, & s\varepsilon < x - y, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, k-1, \\ j = 1, \ldots, s-1, \end{matrix}$$

в предположении, что оба игрока имеют выравнивающие оптимальные стратегии F^* и G^*. В частности, таким методом может быть решена игра, рассмотренная Брауном [6].

2. Симметричные игры. Фон Вольферсдорф [120] приводит метод решения игр с функцией выигрыша вида

$$K(x, y) = \begin{cases} L(x, y), & 0 \leqslant x < y \leqslant 1, \\ 0, & x = y, \\ -L(y, x), & 0 \leqslant y < x \leqslant 1, \end{cases}$$

где функция $L(x, y)$ непрерывна в области $0 \leqslant x - y \leqslant 1$, строго вогнута по x и строго выпукла по y. Этот метод аналогичен методу интегральных уравнений, применяемых в играх с выбором моментов времени.

3. Игра Бореля. В статье [75] Борель сформулировал игру, в которой множества чистых стратегий игроков $X = Y = S_3$ — двумерный симплекс, а функция выигрыша $K(x, y)$ определяется как

$$K(x, y) = \operatorname{sgn}(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3),$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Н. Н. Воробьевым [12] предложена следующая интерпретация этой игры: векторы $x, y \in S_3$ можно понимать как дележи в кооперативной игре трех лиц, заданной в 0—1 редуцированной форме. Если дележ x доминирует y, то игрок I) выигрывает единицу, если y доминирует x, игрок I проигрывает единицу, и в остальных случаях выигрыши игроков равны нулю.

Различные решения этой игры (в смешанных стратегиях. получены независимо А. И. Соболевым [52] и Оуэном [45]

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Бак Р. К.**, Предпочтительные оптимальные стратегии. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 133—136 (РЖМат, 1964, 5В405)
2. **Беллман Р.**, Гликсберг И., Гросс О., Некоторые вопросы математической теории процессов управления, М., Изд-во ин. лит., 1962, 336 стр. (РЖМат, 1963, 7В313К)
3. **Блекуэлл Д.**, Гиршик М. А., Теория игр и статистических решений. М., Изд-во ин. лит., 1958, 374 стр., илл. (РЖМат, 1959, 10292К)
4. **Боненбласт Х. Ф.**, Карлин С., Шепли Л. С., Решения дискретных игр двух лиц. В сб. «Матричные игры», М., Физматгиз, 1961, 17—44
5. —, —, —, Игры с непрерывной выпуклой функцией выигрыша. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 337—352 (РЖМат, 1964, 5В415)
6. **Браун Р. Х.**, Решение одной антагонистической игры. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 419—425 (РЖМат, 1964, 5В419)
7. **Вальд А.**, Статистические решающие функции. В сб. «Позиционные игры», М., «Наука», 1967, 300—522
8. **Воробьев Н. Н.**, Некоторые методологические проблемы теории игр. Вопр. философии, 1966, № 1, 93—103 (РЖМат, 1966, 7А8)
9. —, Бесконечные антагонистические игры. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 7—23 (РЖМат, 1964, 5В396)
10. —, Математическая теория игр. О-во по распростр. полит. и научн. знаний РСФСР. Ленингр. отд., Л., 1963, 71 стр. (РЖМат, 1964, 7В454К)
11. —, Приложения теории игр в технических науках, IY Internationaler Kongress über Anwendungen der Mathematik in den Ingeneurwissenschaften, Weimar 1967, Berichte, Bd. 1, 411—422
12. —, Современное состояние теории игр. Успехи мат. наук, 1970, 25, № 2, 81—140 (РЖМат, 1970, 11В373)
13. **Вудбери М.**, Линейно выпуклые игры. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 442—448 (РЖМат, 1964, 5В421)
14. **Гейл Д.**, Гросс О., Заметка о полиномиальных и вырожденных играх. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 195—204 (РЖМат, 1964, 5В409)
15. **Генин М. А.**, Алгорифмы решения некоторых выпукло-вогнутых и линейно-выпуклых игр. В сб. «Методы вычислений». Вып. 6. Л., Ленингр. ун-т, 1970, 96—106 (РЖМат, 1971, 2В446)
16. **Георгобиани Д. А.**, Аппроксимация бесконечной игры с помощью матричной. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиа. Гамотвлити центрис шромеби. Тр. Вычисл. центра АН ГрузССР, 1965, **6**, № 3, 123—131 (РЖМат, 1966, 6В283)
17. **Гермейер Ю. Б.**, Введение в теорию исследования операций, М., «Наука», 1971, 383 стр. (РЖМат, 1972, 1В740К)
18. **Гликсберг И.**, Гросс О., Некоторые замечания об играх на квадрате. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 205—217 (РЖМат, 1964, 5В410)
19. **Гросс О.**, Рациональная игра на квадрате. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 414—418 (РЖМат, 1964, 5В418)
20. **Давыдов Э. Г.**, Об играх с ресурсами. В сб. «Кибернетику — на службу коммунизму», М., «Энергия», 1971, 249—263 (РЖМат, 1971, 10В664)
21. **Данскин Д. М.**, Итеративный метод решения непрерывных игр. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 121—132 (РЖМат, 1964, 5В404)
22. **Демьянов В. Ф.**, К решению некоторых минимаксных задач. I. Кибернетика, 1966, № 6, 58—66 (РЖМат, 1967, 6Б480)

23. **Доманский В. К.**, Об одном применении теории обобщенных функций к теории игр. Докл. АН СССР, 1971, **199**, № 3, 515—518 (РЖМат, 1971, 12В771)
24. **Дрешер М.**, Стратегические игры. Теория и приложения. М., «Сов. радио», 1964 (РЖМат, 1965, 1В313К)
25. —, Карлин С., Решение выпуклых игр методом неподвижных точек. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 180—194 (РЖМат, 1964, 5В408)
26. —, —, Шепли Л. С., Полиномиальные игры. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 154—179 (РЖМат, 1964, 5В407)
27. **Дюбин Г. Н.**, Об играх на единичном квадрате с функцией выигрыша типа «крыша». Теория вероятностей и ее применения, 1968, **13**, № 1, 138—143 (РЖМат, 1968, 9В326)
28. —, Об одном классе игр на единичном квадрате, Докл. АН СССР, 1968, **168**, № 7, 9—12 (РЖМат, 1968, 12В462)
29. —, О множестве игр на единичном квадрате с единственным решением. Докл. АН СССР, 1969, **184**, № 2, 267—269 (РЖМат, 1969, 6В327)
30. **Карлин С.**, Об играх, описываемых колоколообразными ядрами. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 372—402 (РЖМат, 1964, 5В417)
31. —, Об одном классе игр. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 353—371 (РЖМат, 1964, 5В416)
32. —, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., «Мир», 1964 (РЖМат, 1964, 11В321К)
33. —, Операторное истолкование принципа минимакса. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 47—76 (РЖМат, 1964, 5В400)
34. —, Сведения некоторых классов игр к интегральным уравнениям. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 249—794 (РЖМат, 1964, 5В412)
35. **Крапивин В. Ф.**, О некоторых методах решения непрерывных антагонистических игр. В сб. «Исслед. по кибернетике». М., «Сов. радио», 1970, 115—129 (РЖМат, 1970, 11В374)
36. —, Флейшман Б. С., Регулярный метод решения игр с кусочно-постоянной функцией выигрыша. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1965, № 3, 17—23 (РЖМат, 1965, 12В306)
37. **Лебедев В. Н.**, Об эквивалентности вогнуто-выпуклых антагонистических игр задачам математического программирования. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1966, № 2, 32—38 (РЖМат, 1966, 9В241)
38. —, Тынянский Н. Т., Теория двойственности вогнуто-выпуклых игр. Докл. АН СССР, 1967, **174**, № 6, 1264—1267 (РЖМат, 1967, 12В347)
39. **Мавриций Б. А.**, Алгоритм приближенного решения бесконечных антагонистических методов случайного поиска. В сб. «Автоматика и вычисл. техника», № 13, Рига, «Зинатне», 1966, 63—74 (РЖМат, 1967, 4В262)
40. **Мак-Кинси Д. С.**, Введение в теорию игр, М., Физматгиз, 1960, 420 стр (РЖМат, 1961, 10В144К, 12В170К)
41. **Михайлова А. С.**, О некоторых классах игр на единичном квадрате. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 426—441 (РЖМат, 1964, 5В420)
42. **Морозов В. В.**, Об одном принципе выбора стратегий. В сб. «Кибернетику — на службу коммунизму. Т. 6», М., «Энергия», 1971, 185—189 (РЖМат, 1971, 10В665)
43. **Нейман Д. фон**, Моргенштерн О., Теория игр и экономическое поведение, М., «Наука», 1970, 707 стр. (РЖМат, 1970, 12В439К)
44. **Огарышев В. Ф.**, Обобщение задачи Гросса. В сб. «Кибернетику — на службу коммунизму. Т. 6», М., «Энергия», 1971, 264—283 (РЖМат, 1971, 10В666)
45. **Оуэн Г.**, Теория игр (перевод с англ.), М., «Мир», 1971, 230 стр.
46. **Пек Дж. Э. Л.**, Далмидж А. Л., Игры на компактном множестве.

В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 85—97 (РЖМат, 1964, 5В402)
47. Применение теории игр в военном деле (под ред. Б. О. Ашкенази), М., «Сов. радио», 1961, 359 стр. (РЖМат, 1962, 9В319)
48. **Пшеничный Б. Н.**, Двойственный метод в экстремальных задачах. I, II. Кибернетика, 1965, № 3, 89—95; № 4, 64—69 (РЖМат, 1966, 8В177, 8В178)
49. **Романовский И. В.**, Теоремы о минимаксе для игр с неточной передачей информации. Теория вероятностей и ее применения, 1962, **7**, № 1, 89—95 (РЖМат, 1962, 9В272)
50. **Сайон М.**, Некоторые общие теоремы о минимаксах. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 40—46 (РЖМат, 1964, 5В399)
51. —, Вулф Ф., Об игре, не обладающей значением. В сб. «Позиционные игры». М., «Наука», 1967, 290—299
52. **Соболев А. И.**, Об игре Бореля. Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, № 3, 558—561 (РЖМат, 1971, 2В465)
53. Сухарев А. Г., О некоторых играх на единичном квадрате. В сб. «Кибернетику — на службу коммунизму. Т. 6». М., «Энергия», 1971, 202—206 (РЖМат, 1971, 10В668)
54. **Тынянский Н. Т.**, Основы теории двойственности нелинейного программирования и дифференциальные игры. М., Военная инж. акад. им. Дзержинского, 1968
55. **У Вень-цзюн**, Одно замечание об основной теореме теории игр. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 24—30 (РЖМат, 1964, 5В397)
56. **Фань Цзи**, Теоремы о минимаксе. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 31—39 (РЖМат, 1964, 5В398)
57. **Флеминг У. Г.**, Об одном классе игр над пространством функций и связанных с ним вариационных задачах. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 98—122 (РЖМат, 1964, 5В403)
58. **Фогель В.**, Приближение оптимальных стратегий для некоторого класса игр. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 298—336 (РЖМат, 1964, 5В414)
59. **Хейбрехтс С.**, К вопросу о единственности решения для игр на единичном квадрате. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 137—153 (РЖМат, 1964, 5В406)
60. **Шифман М.**, Игры с выбором момента времени. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 218—248 (РЖМат, 1964, 5В411)
61. **Эрроу К. Дж.**, Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., Изд-во ин. лит., 1962, 334 стр. (РЖМат, 1962, 12В412К)
62. **Яновская Е. Б.**, Квазиинвариантные ядра в антагонистических играх. Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 3 (РЖМат, 1965, 3В241)
63. —, К вопросу о единственности оптимальных стратегий в играх с выбором момента времени. В сб. «Бесконечн. антагонист. игры», М., Физматгиз, 1963, 295—297 (РЖМат, 1964, 5В413)
64. —, Теоремы о минимаксах для игр на единичном квадрате. Теория вероятностей и ее применения, 1964, **9**, № 3, 554—555 (РЖМат, 1965, 3В242)
65. —, Об антагонистических играх, разыгрываемых на функциональных пространствах. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1968, **7**, № 3, 547—557 (РЖМат, 1968, 11В390)
66. —, Об играх типа дуэли с непрерывным огнем. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 1 (РЖМат, 1969, 7В306)
67. —, Решение бесконечных антагонистических игр в конечно-аддитивных стратегиях. Теория вероятностей и ее применения, 1970, **15**, № 1 (РЖМат, 1970, 9В367)
68. **Auslender A.**, Recherche des points de selle d'une fonction. Lect Notes Math., 1970, **132**, 37—52 (РЖМат, 1971, 2В464)

69. **Bellman R.**, On «colonel Blotto» and analogous games. SIAM Rev., 1969, **11**, № 1, 66—68 (РЖМат, 1970, 2В466)
70. **Berge C.**, Sur une convexité reguliére non linéaire etses applications à la théorie des jeux, Bull. Soc. math. France, 1954, **82**, № 3, 301—319 (РЖМат, 1956, 591)
71. —, The most general minimax theorem and conjecture of Sion. Recent advances in game theory, Papers delivered at a Meeting of the Princeton univ. conf. 1961, Princeton, N. J. 1962
72. **Bierlein D.**, Über wesentlich indefinite Spiele. Lect. Notes Math., 1967, **31**, 28—35 (РЖМат, 1968, 9В328)
73. —, Spiele mit mehr als einin Spielwert. Arch. Math., 1968, **19**, № 3, 330—336 (РЖМат, 1969, 1В356)
74. —, Minimal indefinite Randomisierungen von Spielen. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1966, **11**, № 3, 193—207 (РЖМат, 1969, 10В275)
75. **Borel E.**, La théorie du jeu et les équations integrals à noyau symmetrique, C. r. Acad. sci. Paris, 1921, **173**, 1304—1308
76. **Burger E.**, Spieltheoretische Behandlung eines Reklameproblems (Variante eines Spielmodells von Gillman) Mitteilungsbl. Math. Statist., 1954, **6**, 39—52 (РЖМат, 1957, 716)
77. **Cansado E.**, Dual programming problems as hemi-games. Manag. Sci., 1969, **15**, № 9, 539—549 (РЖМат, 1970, 2В474)
78. **Danskin J. M.**, A game over spaces of probability distributions, Naval. Res. Logist. Quart., 1964, **11**, № 2-3, 157—188 (РЖМат, 1966, 6В284)
79. —, Gillman L., A game over function space, Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, 83—94 (РЖМат, 1954, 4121)
80. **Diaz M. M.**, Juegos bipersonales de suma nula con pago convexo. Trab. estadist y invest. oper., 1969, **20**, № 2-3, 3—6 (РЖМат, 1970, 9В368).
81. **Dresher M.**, On an infinite game with a discontinuous game value, Amer. Math. Soc. Not., 1962, **9**, № 2
82. **Dulmage A. L.**, Peck J. E. L., Certain infinite zero-sum two-person games, Can. J. Math., 1956, **8**, № 3, 412—416 (РЖМат, 1957, 1657)
83. **Fan Ky**, Fixed point and minimax theorem in locally convex topological linear spaces, Proc. Acad. Sci USA, 1952, **38**, 121—126
84. **Fenstad J. E.**, Good strategies in General Games. Math. Z., 1967, **101**, № 4, 322—330 (РЖМат, 1968, 3В357)
85. **Ferguson T. S.**, On a class of infinite games related to Liar Dice, Ann. Math. Stat., 1970, **41**, № 2, 353—362 (РЖМат, 1971, 9В464)
86. **Forgó F.**, A SUMT method and its application to the solution of certain continuous games. [Publs]. Dep. Math. K. Marx Univ. Econ. Budapest, 1970, № 5, 25 pp. (РЖМат, 1971, 8В551)
87. —, Relationship between continuous zero-sum two-person games and linear programming. Dep. Math. K. Marx Univ. Econ. Budapest, 1969, № 1, 15 pp. (РЖМат, 1970, 10В307)
88. **Fox M.**, Kimeldorf G. S., Noisy duels. SIAM J. Appl. Math., 1969, **17**, № 2, 353—361 (РЖМат, 1970, 2В467)
89. —, —, Values and shooting times in noisy duels. J. Amer. Statist. Assoc., 1970, **65**, № 329, 422—430 (РЖМат, 1971, 1В428)
90. **Ghouila-Houri M. A.**, Le théorème minimax de Sion. Theory Games, London, Engl. Univs Press, 1966, 123—129 (РЖМат, 1967, 11В318)
91. **Gillis P. P.**, Huyberechts S., Théorie des jeux sur le carré-unité Colloq. analyse statist., CBRM, Bruxelles, 1954, Paris 1955, 159—175 (РЖМат, 1958, 9105)
92. —, —, Le problème de l'unicité de la solution des jeux infinis de somme nulle à deux jouers. Theory Games, London Engl. Univs Press, 1966, 104—122 (РЖМат, 1967, 11В317)
93. **Glicksberg I.**, A derivative test for finite solutions of games. Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 895—897 (РЖМат, 1956, 4714)
94. **Hirschfeld R. A.**, On a minimax theorem of K. Fan. Proc. Koninkl. ne-

derl. akad. wet. Indagationes math., 1958, A61, № 4, 470—474 (РЖМат, 1960, 10677)

95. **Huyberechts S.**, Introduction à l'étude des jeux sur des éspaces fonctionneles, Cahiers Centre Études, Rech. Oper. 6, 1964, 209—224
96. —, Vers une classification des jeux sur le carré-unité Cahiers Centre Etudes, Rech. Oper. 4, 1962, 172—200
97. **Karlin S.**, Continuous games, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1951, 37, № 4, 220—223
98. —, The theory of infinite games. Ann. Math., 1953, 58, № 2, 371—401 (РЖМат,. 1956, 4715)
99. **Kneser H.**, Sur un théorème fondamental de la theorie des jeux, C. r. Acad. sci. Paris, 1952, 234, 2418—2420
100. **Neumann J. von,** Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergeb. Math., Kolloq. 8, 1937, 73—83
101. **Neyman J.**, Pearson E., On the problem of the most efficient test of statistical hypotheses. Philos. Trans. Roy. Soc., 1933, A-231, 289—337
102. **Nikaidô H.**, On a minimax theorem and its application to functional analysis. J. Math. Soc. Japan., 1953, 5, 86—94 (РЖМат, 1954, 4487)
103. —, On von Neumann's minimax theorem. Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 65—72 (РЖМат, 1955, 1371)
104. —, On a method of proof for the minimax theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 1959, 10, № 2, 205—212 (РЖМат, 1962, 2В398)
105. **Parthasarathy T. A.**, A note on a minimax theorem of T. T. Tie. Sankhya. Indian J. Statist., 1965, A27, № 2-4, 407—408 (РЖМат, 1967, 6В273)
106. —, On a general minimax theorem. Math. Student, 1966 (1968), 34, № 3-4, 195—197 (РЖМат, 1968, 11В389)
107. —, On games over the unit square. SIAM J. Appl. Math., 1970, 19, № 2, 473—476 (РЖМат, 1971, 4В530)
108. —, Raghavan T. E. S., Some topics in two-person games, Modern analytic and computational methods in science and mathem. № 22, American, Publ. Comp. Inc., New York, 1971
109. **Raghavan T. E. S.**, Convex cones and finite optimals. Ann. Math. Stat., 1970, 41, № 2, 702—705 ((РЖМат, 1971, 9В465)
110. **Restrepo R. A.**, Tactical problems involving several actions. Ann. Math. Studies, 1957, 39, 313—335 (РЖМат, 1959, 709)
111. **Smith G.**, A duel with silent-noisy gun versus noisy gun. Colloq. math., 1967, 17, № 1, 131—146 (РЖМат, 1968, 1В378)
112. **Ştefănescu A.**, Metoda gradientului la jocurile convexe pe patratul unitate. An. Univ. Bucureşti. Mat.-Mec., 1970, 19, № 1, 137—143 (РЖМат, 1971, 8В552)
113. **Teh Tjoe-Tie,** Minimax theorems on conditionally compact sets. Ann. Math. Statist., 1963, 34, № 4, 1536—1540 (РЖМат, 1966, 5В286)
114. **Ville J.**, Sur la théorie général des jeux où intervient l'habilité des joueurs. Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications, par E. Borel et collaborateurs, Paris, 1938, 2, № 5, 105—113
115. **Wald A.**, Generalisations of a theorem by von Neumann concerning zero-sum two-person games, Ann. Math., 1945, 46, 281—286
116. —, Foundations of a general theory of sequential decision functions, Econometrica, 1947, 15, 279—313
117. —, An essentially complete class of admissible decision functions, Econometrica, 1947, 15
118. —, A note on zero-sum two-person game, Ann. Math., 1950, 51, 739—742
119. **Wolfe Ph.**, The strict determinateness of certain infinite games. Pacif. J. Math., 1955, 5, № 1, Suppl. 841—847 (РЖМат, 1959, 5007)
120. **Wolfersdorf L. von,** Zur Berechnung optimaler Strategien für Spiele über dem Einheitsquadrat an der Hauptdiagonalen unstetigen Auszahlungsfunctionen. Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., 1967, 107, № 7, 53 S., ill. (РЖМат, 1968, 7В353)