



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, В. П. Ильин, Проекционные представления функций через разности, *Тр. МИАН СССР*, 1979, том 150, 3–10

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

15 января 2025 г., 09:02:58



О. В. БЕСОВ, В. П. ИЛЬИН

ПРОЕКЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ РАЗНОСТИ

В статье выводятся представления (проекционные разложения) функций многих переменных в виде суммы многочлена и интегралов, содержащих разности функции первого или высших порядков. Эти представления могут быть применены в различных оценках для функционалов через модули непрерывности функций тех или иных порядков (в том числе в интегральных нормах), через нормы функций, содержащих разности и т. п.

В математическом анализе часто используются проекционные разложения функций через производные, наиболее употребительным из которых является формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Предложенное С. Л. Соболевым проекционное разложение функций многих переменных с изотропными свойствами (см., например, [1]) послужило ему основой для получения теорем вложения.

Приводимые ниже проекционные разложения функций через разности в определенном отношении аналогичны упомянутым изотропным разложениям С. Л. Соболева через производные и неизотропным разложениям через производные из работы [2]. В работе [3] установлено проекционное представление функций через разности в одномерном случае, его комбинации использованы для построения многомерного проекционного разложения. Здесь будет получено многомерное изотропное обобщение (5) разложения из [3], содержащее разности порядка m переменного направления. Простое по выводу, оно обладает, однако, тем недостатком, что выполняется (вообще говоря) лишь для подобласти задания функции. Этот недостаток в приложениях в определенных случаях устраняется с помощью предварительного распространения функции за пределы области определения с сохранением надлежащих свойств разностей. С помощью этого разложения можно, например, оценить в равномерной или интегральной метрике разность между функцией и проекционным многочленом $P_{m-1}(x)$ через модуль непрерывности порядка m функции в той же метрике. Два других проекционных разложения (19), (20) будут выведены на основе указанного для анизотропного случая способа в работе [2]. Первое из них относится к изотропному случаю и содержит разности порядка m переменного направления. Второе относится к неизотропному случаю и содержит разности (вообще говоря) различных порядков по направлениям различных координатных осей. Эти разложения справедливы во всей области определения функции (соответственно звездной или l -звезд-

ной относительно пара). С их помощью можно получить, например, оценки в равномерной или интегральной метриках уклонения функции (или ее производных) от проекционного многочлена через модули непрерывности.

В дальнейшем f — локально суммируемая функция. Без ограничения общности можно считать здесь, что f задана на всем n -мерном евклидовом пространстве E^n . Пусть

$$\Delta^m(y)f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j f(x+jy), \quad \Delta_i^m(t)f(x) = \Delta^m(te^{(i)})f(x),$$

где t — число, $e^{(i)}$ — единичный вектор i -й координатной оси.

1. Пусть $K \in C_0^\infty(E^n)$, $\int K(x)dx = 1$, $K_k(x) = k^{-n}K\left(\frac{x}{k}\right)$, m — натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^m \int K(z) \Delta^m(z) f(x) dz - \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k \int f(x+z) K_k(z) dz = \\ &= (-1)^m \int K(z) \Delta^m(z) f(x) dz - \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k f_k(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$f_k(x) = \int f(x+z) K_k(z) dz. \quad (2)$$

Применим к $f_k(x)$ проекционное разложение через производные С. Л. Соболева ([1, с. 271]):

$$f_k(x) = \sum_{|\beta| < m} x^\beta \int \mathcal{L}_\beta(y) f_k(y) dy + \int_{|\alpha|=m} \sum \mathcal{K}_\alpha(x, y) D^\alpha f_k(y) dy. \quad (3)$$

Здесь ядра \mathcal{L}_β бесконечно дифференцируемы и отличны от нуля только в произвольном заранее заданном шаре S . Ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ могут быть отличны от нуля только при y , лежащем в шаре S или в той части касающегося шара S конуса с вершиной в x , которая расположена между этим шаром и x . $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ бесконечно дифференцируемы по x и по y при $x \neq y$, и при ограниченных x и y $|\mathcal{K}_\alpha(x, y)| \leq A |x - y|^{m-n}$.

Перенесем дифференцирование в (3) $D^\alpha f_k$ на ядро K_k из (2) с помощью интегрирования по частям, причем само ядро будем считать специализированным:

$$K_k(x) = k^{-n} K\left(\frac{x}{k}\right) = k^{-n} \sum_{j=1}^m a_j N\left(\frac{x}{kj}\right) = \sum_{j=1}^m a_j N_k\left(\frac{x}{j}\right),$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m a_j j^n &= 1, \quad a_j = A (-1)^{m-j} C_m^j j^{m-n}, \\ \frac{1}{A} &= \sum_0^m (-1)^{m-j} C_m^j j^m = (-1)^m \left(x \frac{d}{dx}\right)^m (1-x)^m \Big|_{x=1} \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда при $|\alpha| = m$

$$\begin{aligned}
 D^\alpha f_k(x) &= (-1)^m \int f(x+z) \sum_{j=1}^m a_j j^{-m} N_k^{(\alpha)}\left(\frac{z}{j}\right) dz = \\
 &= (-1)^m \int N_k^{(\alpha)}(z) \sum_{j=1}^m a_j j^{n-m} f(x+jz) dz = \\
 &= (-1)^m A \int N_k^{(\alpha)}(z) \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j f(x+jz) dz = \\
 &= (-1)^m A \int N_k^{(\alpha)}(z) \Delta^m(z) f(x) dz. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Подставляя теперь в (1) f_k из (3), $D^\alpha f_k$ из (4), получаем

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (-1)^m \int K(y) \Delta^m(y) f(x) dy + \sum_{|\beta| < m} x^\beta \int L_\beta(y) f(y) dy + \\
 &\quad + \iint \mathcal{K}(x, y, z) \Delta^m(z) f(y) dy dz, \tag{5}
 \end{aligned}$$

где L_β — бесконечно дифференцируемы, равны нулю вне

$$\begin{aligned}
 &C + \bigcup_{k=1}^m \text{supp } K_k, \\
 \mathcal{K}(x, y, z) &= \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ 1 \leq k \leq m}} c_{\alpha, k} \mathcal{K}_\alpha(x, y) N_k^{(\alpha)}(z).
 \end{aligned}$$

Заметим, что при этом $K, K_k N_k(x)$ можно взять такими, чтобы носители их содержались в пересечении наперед заданных шара $\{x : |x| < \varepsilon\}$ и конуса $\{x : \left| \frac{x}{|x|} - e \right| < \varepsilon\}$.

II. Пусть m, n — натуральные числа, $K \in C_0^\infty(E^n)$, $\int K(x) dx = 1$, $b > 0$, $b_j = 1 + jb$,

$$L(x) = \sum_{j=0}^m a_j K\left(\frac{x}{b_j}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^m a_j b_j^n = 1, \quad a_j = A (-1)^{m-j} C_m^j b_j^{-n-1}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{A} = (-1)^m \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j C_m^j}{(1+jb)} = (-1)^m \int_0^1 (1-t^b)^m dt \neq 0.$$

Пусть далее $\bar{e}, e = (e_1, \dots, e_n) \in E^n$, $|\bar{e}| = |e| = 1$, $u > 0$,

$$\Omega_x(u, e) = - \frac{\partial^m}{\partial u^m} \left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^\infty w^{n-1} L(x+we) dw \right),$$

$$M_x(u, e) = \frac{u^{m+n-1}}{(m-1)!} L(x+ue).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e) &= \frac{\partial^m}{\partial u^m} \left[\frac{u^{m+n-1}}{(m-1)!} L(x+ue) \right] = \\
 &= - \frac{\partial^m}{\partial u^{m-1}} \left[u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^\infty w^{n-1} L(x+we) dw \right) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(m-1)u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^\infty w^{n-1} L(x+we) dw \Big] = u \frac{\partial}{\partial u} \Omega_x(u, e) + \\
& + m\Omega_x(u, e) - (m-1)\Omega_x(u, e) = \frac{\partial}{\partial u} [u\Omega_x(u, e)]. \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{|e|=1} \int_0^\infty f(ue) \Omega_x(u, e) du de = \\
& = - \int_{|e|=1} \int_0^\infty f(ue) \frac{\partial^m}{\partial u^m} \left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^\infty w^{n-1} L(x+we) dw \right) du de = \\
& = \int_{|e|=1} \int_0^\infty f(ue) u^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} c_k u^k \left(\sum_{i=1}^n e_i D_i \right)^k L(x+ue) du de = \\
& = \sum_{|\alpha| < m} c_\alpha \int_{|e|=1} \int_0^\infty f(ue) u^{n-1} (ue)^\alpha L^{(\alpha)}(x+ue) du de = \sum_{|\alpha| < m} c_\alpha \int f(y) y^\alpha L^{(\alpha)}(x+y) dy, \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{|e|=1} \int_0^\infty \Omega_x(u, e) du de & = \int_{|e|=1} \int_0^\infty w^{n-1} L(x+we) dw de = \int L(x+y) dy = \int L(x) dx = \\
& = \sum_0^m a_j b_j \int K(x) dx = 1. \tag{10}
\end{aligned}$$

Введем для $v > 0$

$$\begin{aligned}
f_v(x) & = \frac{1}{v^2} \int_{|e|=1} \int_{|e|=1} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x+t\bar{e}+ue) \Omega_0\left(\frac{t}{s}, \bar{e}\right) \Omega_x\left(\frac{u}{v}, e\right) dt du de d\bar{e} = \\
& = \int_{|e|=1} \int_{|e|=1} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x+vt\bar{e}+vue) \Omega_0(t, \bar{e}) \Omega_x(u, e) dt du de d\bar{e}. \tag{11}
\end{aligned}$$

В силу (9), (10) $f_v(x)$ при фиксированном x является усреднением f в точке x с параметром v . Для $f \in L^{loc}$ $f_v(x) \rightarrow f(x)$ при $v \rightarrow 0$ в каждой точке Лебега функции f , т. е. для почти всех x (см., например, [4, с. 91]).

По формуле Лейбница—Ньютона для почти всех x

$$f(x) = f_1(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} f_v(x) dv. \tag{12}$$

Слагаемое $f_1(x)$ является многочленом $P_{m-1}(x)$ степени не выше $m-1$. В самом деле, как и при выводе (9), имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{|e|=1} \int_0^\infty f(x+ue) \frac{\partial^m}{\partial u^m} \left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^\infty w^{n-1} L(x+we) dw \right) du de = \\
& = \sum_{|\alpha| < m} c_\alpha \int f(x+y) y^\alpha L^{(\alpha)}(x+y) dy = \\
& = \sum_{|\alpha| < m} c_\alpha \int f(y) (y-x)^\alpha L^{(\alpha)}(y) dy = \mathcal{P}_{m-1}(x),
\end{aligned}$$

а $f_1(x)$ является усреднением $\mathcal{P}_{m-1}(x)$. Заметим, что многочлен $f_1(x) = P_{m-1}(x)$ построен по значениям f из арифметической суммы $\text{supp } L + \text{supp } L$.

Покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial v} f_v(x) = \frac{1}{v} \iint R(x, y, x+z) \Delta^m(bvy) f(x+vy+ vz) dy dz, \quad (13)$$

где $b > 0$ достаточно мало, $R(x, y, z)$ — многочлен степени m по x с коэффициентами из C_0^∞ по y и по z , сосредоточенными в $\{(y, z): |y - x^{(0)}| < \varepsilon, |z - x^{(0)}| < \varepsilon\}$ с наперед заданными $x^{(0)} \in E^n$, $\varepsilon > 0$.

Установим (13). В силу (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{v} \Omega_0 \left(\frac{t}{v}, \bar{e} \right) \frac{1}{v} \Omega_x \left(\frac{u}{v}, \bar{e} \right) \right] &= \frac{1}{v} \Omega_0 \left(\frac{t}{v}, \bar{e} \right) \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{u}{v} \Omega_x \left(\frac{u}{v}, e \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{t}{v} \Omega_0 \left(\frac{t}{v}, \bar{e} \right) \right] \frac{1}{v} \Omega_x \left(\frac{u}{v}, e \right) = \\ &= \frac{1}{v} \Omega_0 \left(\frac{t}{v}, \bar{e} \right) \left(-\frac{1}{v^2} \right) M_x^{(m)} \left(\frac{u}{v}, e \right) - \frac{1}{v^2} M_0^{(m)} \left(\frac{t}{v}, \bar{e} \right) \frac{1}{v} \Omega_x \left(\frac{u}{v}, e \right), \end{aligned}$$

где $M_x^{(m)}(u, e) = \frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} f_v(x) &= -\frac{1}{v} \int_{|\bar{e}|=1} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x+vt\bar{e}+vue) [\Omega_0(t, \bar{e}) M_x^{(m)}(u, e) + \\ &+ \Omega_x(u, e) M_0^{(m)}(t, \bar{e})] du dt de d\bar{e} = J'(x, v) + J''(x, v). \quad (14) \end{aligned}$$

Преобразуем (14), рассмотрев предварительно вспомогательный интеграл с $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$

$$\begin{aligned} J(x, v) &= \int_{|\bar{e}|=1} \int_0^\infty \varphi(vue) \frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e) du de = \\ &= \frac{(-1)^m v^m}{(m-1)!} \int_{|\bar{e}|=1} \int_0^\infty u^m \left(\sum_{i=1}^n e_i D_i \right)^m \varphi(vue) u^{n-1} L(x+ue) du de = \\ &= v^m \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \int_{|\bar{e}|=1} \int_0^\infty (ue)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(vue) u^{n-1} L(x+ue) du de = \\ &= v^m \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \int \varphi^{(\alpha)}(vy) y^\alpha L(x+y) dy = \\ &= v^m \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\alpha|=m}} c_{\alpha\beta} x^{\alpha-\beta} \int \varphi^{(\alpha)}(vy - vx) y^\beta L(y) dy = \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c'_\alpha x^\alpha \int \varphi(vy - vx) L^{(\alpha)}(y) dy + \\ &+ \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \leq \alpha \\ |\beta-\gamma|=1 \\ |\alpha|=m}} c_{\alpha\beta\gamma} v^{|\alpha-\gamma|} x^{\alpha-\beta} \int \varphi^{(\alpha-\gamma)}(vy - vx) D^\gamma (y^\beta L(y)) dy = \\ &= \sum_{|\alpha|=m} c'_\alpha x^\alpha J_\alpha(x, v) + \sum c_{\alpha\beta\gamma} v^{|\alpha-\gamma|} x^{\alpha-\beta} J_{\alpha\beta\gamma}(x, v). \quad (15) \end{aligned}$$

В силу (6), (7)

$$J_{\alpha\beta\gamma}(x, v) = \int \varphi^{(\alpha-\beta)}(vy - vx) D^\gamma \sum_{j=0}^m a_j y^j K\left(\frac{y}{b_j}\right) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^m a_j b_j^{n+1} \int \varphi^{(\alpha-\nu)} (vy - vx) D^{\nu} \left(\frac{y}{b_j} \right) \left[\left(\frac{y}{b_j} \right)^{\beta} K \left(\frac{y}{b_j} \right) \right] \frac{dy}{b_j} = \\
&= \int \sum_{j=0}^m a_j b_j^{n+1} \varphi^{(\alpha-\nu)} (vy + b_j \nu y - vx) D^{\nu} [y^{\beta} K(y)] dy = \\
&= A \int \Delta^m (b \nu y) \varphi^{(\alpha-\nu)} (vy - vx) D^{\nu} [y^{\beta} K(y)] dy. \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\alpha} &= \sum_{j=0}^m a_j b_j^{-m} \int \varphi (vy - vx) K^{(\alpha)} \left(\frac{y}{b_j} \right) dy = \sum_{j=0}^m a_j b_j^{n-m} \int \varphi (b_j \nu y - vx) K^{(\alpha)}(y) dy = \\
&= \sum_{j=0}^m a_j b_j^{n-m} J_{\alpha j}(x, \nu).
\end{aligned}$$

Специализируя ядро K , положим $K(x) = \sum_{i=0}^m a_i' N \left(\frac{x}{b_i} \right)$, где

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^m a_i' b_i^n &= 1, \quad a_i' = A' (-1)^{m-i} C_m^i b_i^{-n+m}, \\
\frac{1}{A'} &= \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i} C_m^i b_i^m = (-1)^m \left(x \frac{d}{dx} \right)^m [x(1-x^b)^m] \Big|_{x=1} \neq 0.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
J_{\alpha j}(x, \nu) &= \int \sum_{i=0}^m a_i' b_i^{-m} \varphi (b_j \nu y - vx) N^{(\alpha)} \left(\frac{y}{b_i} \right) dy = \\
&= A' \int \sum_{i=0}^m (-1)^{(m-i)} C_m^i \varphi (b_i b_j \nu y - vx) N^{(\alpha)}(y) dy = \\
&= A' \int \Delta^m (b b_j \nu y) \varphi (b_j \nu y - vx) N^{(\alpha)}(y) dy = \\
&= A' b_j^{-n} \int \Delta^m (b \nu y) \varphi (vy - vx) N^{(\alpha)} \left(\frac{y}{b_j} \right) dy. \tag{17}
\end{aligned}$$

Преобразуем теперь интегралы из (14). Рассмотрим при этом лишь $J'(x, \nu)$, так как $J''(x, \nu)$ преобразуется аналогично. Интеграл $J'(x, \nu)$ может быть записан в силу (9), (10) в виде

$$J'(x, \nu) = -\frac{1}{\nu} \int_{|e|=10}^{\infty} f_{(\nu)}(x + \nu u e) \frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e) du de, \tag{18}$$

где $f_{(\nu)}$ является усреднением f с параметром ν . Преобразуя (18) по формулам (15), (16), (17) и перенося интегрированием по частям возникающие в (16) производные $D^{\alpha-\nu} f_{(\nu)}$ с функции на ядро усреднения, приходим к равенству (13). Положение носителей коэффициентов многочлена $R(x, y, z)$ из (13) определяется носителем N и, очевидно, является требуемым, если носитель N содержится в достаточно малой окрестности нуля.

З а м е ч а н и е. Двойное усреднение (11) строилось на основе одинаковых ядер: L, K, N . Можно было бы усреднение с ядром Ω_0 построить и на основе других ядер $\bar{L}, \bar{K}, \bar{N}$ или даже заменить его усреднением с более простой конструкцией ядра (см. [4, с. 111]).

Равенство (12) можно переписать в силу (13) в виде

$$f(x) = P_{m-1}(x) + \int_0^1 \frac{1}{\nu} \iint R(x, y, z) \Delta^m (b \nu y) f(x - \nu x + \nu y + \nu z) dy dz d\nu. \tag{19}$$

Здесь при наперед заданных $x^{(0)} \in E^n$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $b > 0$ P_{m-1} — многочлен, построенный по значениям f из шара $C_\varepsilon(2x^{(0)}) = \{x: |x - 2x^{(0)}| < \varepsilon\}$, $R(x, y, z)$ — многочлен степени m по x с коэффициентами из C_0^∞ по y и по z , сосредоточенными в $\{(y, z): |y - x^{(0)}| < \varepsilon, |z - x^{(0)}| < \varepsilon\}$. Нетрудно усмотреть, что представление (19) для данной точки x строится по значениям функции f в шаре $C_\varepsilon(2x^{(0)})$ и опирающейся на него части конуса с вершиной в точке x . Тем самым проекционное разложение (19) справедливо для функций, заданных в области звездной относительно некоторого шара.

III. Выведем аналог представления (19) для анизотропного случая. Пусть теперь $m = (m_1, \dots, m_n)$, m_i — натуральные числа,

$$P_{m-1}(x) = \sum_{\substack{\alpha_i < m_i \\ 1 \leq i \leq n}} c_\alpha x^\alpha, \quad K_i \in C_0^\infty(E^1), \quad \int K_i(t) dt = 1,$$

$$L_i(t) = \sum_{j=0}^m a_j^{(i)} K_i\left(\frac{t}{b_j}\right), \quad \sum_{j=0}^{m_i} a_j^{(i)} b_j = 1,$$

$$a_j^{(i)} = A_i (-1)^{m_i-j} C_{m_i}^j b_j^{-2},$$

$$\frac{1}{A_i} = (-1)^{m_i} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{(-1)^j C_{m_i}^j}{1+jb} = (-1)^{m_i} \int_0^1 (1-tb)^{m_i} dt \neq 0,$$

$$\Omega_x(y) = \prod_{i=1}^n \Omega_{x_i}^{(i)}(y_i),$$

$$\Omega_{x_i}^{(i)}(u) = -\frac{\partial^{m_i}}{\partial u^{m_i}} \left(\frac{u^{m_i-1}}{(m_i-1)!} \int_u^\infty L_i(x_i+t) dt \right),$$

$$M_{x_i}^{(i)}(u) = \frac{u^{m_i}}{(m_i-1)!} L_i(x_i+u).$$

При $v > 0$, $\lambda_i > 0$, $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $v^{-\lambda} x = (v^{-\lambda_1} x_1, \dots, v^{-\lambda_n} x_n)$ положим

$$f_v(x) = \iiint f(x+y+z) v^{-2|\lambda|} \Omega_x(v^{-\lambda} y) \Omega_0(v^{-\lambda} z) dy dz.$$

По формуле Лейбница — Ньютона для почти всех

$$f(x) = f_1(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} f_v(x) dv$$

(см. [2] и [4, с. 91]).

Слагаемое $f_1(x)$ является многочленом $P_{m-1}(x)$ — произведением многочленов от x_i степеней не выше $m_i - 1$ ($i = 1, \dots, n$), что устанавливается так же, как в п. II при $n = 1$ (или очевидным образом выводится из [2] и [4, с. 90])

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} f_v(x) = \sum_{j=1}^n \iiint f(x+y+z) \frac{\partial}{\partial v} [v^{-\lambda_j} \Omega_{x_j}^{(j)}(y_j v^{-\lambda_j}) v^{-\lambda_j} \Omega_0^{(j)}(z_j v^{-\lambda_j})] \times \\ \times \prod_{i \neq j} v^{-2\lambda_i} \Omega_{x_i}^{(i)}(y_i v^{-\lambda_i}) \Omega_0^{(i)}(z_i v^{-\lambda_i}) dy dz. \end{aligned}$$

Преобразуя далее

$$- \lambda_j v^{-1-\lambda_j} \frac{\partial}{\partial (v^{-\lambda_j})} [v^{-\lambda_j} \Omega_{x_j}^{(j)}(y_j v^{-\lambda_j}) v^{-\lambda_j} \Omega_0^{(j)}(z_j v^{-\lambda_j})]$$

так же, как в п. II при $n = 1$, приходим к представлению

$$f(x) = P_{m-1}(x) + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{v} \iint R_i(x, y, z) \Delta_i^{m_i} (bv^{\lambda_i} y_i) f(x - v^{\lambda} x + v^{\lambda} y + v^{\lambda} z) dy dz dv. \quad (20)$$

Здесь при наперед заданных $x^{(0)} \in E^n$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $b > 0$ $P_{m-1}(x)$ — многочлен степеней не выше $m_i - 1$ по x_i , построенный по значениям f из шара $C_\varepsilon(2x^{(0)}) = \{x : |x - 2x^{(0)}| < \varepsilon\}$, $R_i(x, y, z)$ — многочлены степеней не выше $m_j - 1 + \delta_{ij}$ по x_j с коэффициентами из $C_0^\infty(E^n)$ по y и по z , сосредоточенными в $\{(y, z) : |y - x^{(0)}| < \varepsilon, |z - x^{(0)}| < \varepsilon\}$. Для данной точки x представление (20) строится по значениям функции f из $V\left(\frac{1}{\lambda}; x\right) = \bigcup_{0 < v \leq 1} [x + (C_\varepsilon(2x^{(0)}) - x)v^\lambda]$, так что представление (20) имеет место для почти каждой точки области G , $\frac{1}{\lambda}$ -звездной относительно шара $C_\varepsilon(2x^{(0)})$, т. е. такой, что $V\left(\frac{1}{\lambda}; x\right) \subset G$ для любого $x \in G$ (см. [4, с. 93]).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Ильин В. П.* О разложении анизотропного пространства $W_p^{l_1, \dots, l_n} \Omega$ с помощью специального проекционного оператора.— Сиб. мат. журн., 1969, 10, № 1, с. 212—216.
3. *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в $\mathcal{L}_{p, \theta}^l$ и распространении функций.— Труды МИАН СССР, 1967, 89, с. 18—30.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.