Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, Достижения и проблемы в достаточных условиях конечнолистности аналитических функций,
Изв. вузов. Матем., 1986, номер 10, 3–16

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1986 МАТЕМАТИКА № 10 (293)

Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев УДК 517.546

ДОСТИЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ В ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОЛИСТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

После выхода нашей обзорной статьи [1] появились интересные работы, существенно обогатившие теорию и приложения достаточных условий однолистности и p-листности аналитических функций. Следуя плану обзора [1], мы опишем основные теоремы, полученные за последнее десятилетие. Подчеркнем, что данный обзор далеко не полон; в нем приведены лишь наиболее яркие, на наш взгляд, результаты.

Часть указанных ниже утверждений дает решение задач, входивших в список проблем семинара по геометрической теории функций комплексного переменного при Казанском государственном университете. Наиболее простые задачи включены ранее во вторую часть сборника [2].

1. Пусть D — конечносвязная область в $\overline{C}$ с границей $\partial D=\bigcup\limits_{j=1}^{m} l_j$, где l_j — замкнутая жорданова кривая в $\overline{C}$. Через $f(z)$ обозначим функцию, мероморфную в D и непрерывную в сферической метрике в $\overline{D}$.

Теорема 1.1 [3]. *Пусть множество $f^{-1}(\infty)$ конечно, $T=f^{-1}(\infty)\cap\partial D$ лежит на одной из компонент ∂D, а отображение f инъективно на каждой из компонент множества $(\partial D)\setminus T$. Отображение f будет однолистным в $\overline{D}\setminus T$ тогда и только тогда, когда оно является локально однолистным в $\overline{D}\setminus T$.*

Пусть l_j и $\Gamma_j=f(l_j)$ — гладкие замкнутые ориентированные кривые. Тогда определен угловой порядок (индекс Уитни) кривой Γ_j: $k_j=k(\Gamma_j)=(2\pi)^{-1}\int\limits_{l_j} d\arg df(z)$. Если $d\arg d f(z)$знакопостоянен на l_j, то Γ_j назовем выпуклой типа k_j и запишем $\Gamma_j\in(k_j, 0)$. Обобщением почти выпуклых кривых является кривая $\Gamma_j\in(k_j, \nu_j)$, $\nu_j>0$, удовлетворяющая условию Умедзавы: для любых взаимно простых ν_j дуг $C_1^j, \ldots, C_{\nu_j}^j$ из l_j выполняется неравенство

$$\sum_{\mu=1}^{\nu_j}\int\limits_{C_\mu^j} d\arg df(z)>-\nu_j\pi.$$

Непрерывная замкнутая ориентированная кривая Γ принадлежит (k, ν), $\nu\geqslant 0$, если Γ определяется как предел гладких кривых класса (k, ν). Пусть $n(\infty, f)$ и $n(w, f)$ — соответственно сумма кратностей полюсов и w-точек функции $f(z)$ в D. Разность $n(w, f)-n(\infty, f)$ представляет собой порядок точки w относительно образа границы (индекс Пуанкаре).

В следующей теореме дается, по существу, неулучшаемая оценка индекса Пуанкаре в зависимости от индекса Уитни и величин ν_j.

Теорема 1.2 [4]. *Пусть $f^{-1}(\infty)\in D$ и $\Gamma_j=f(l_j)\in(k_j, \nu_j)$, $\nu_j\geqslant 0$, для всех $j=1, 2, \ldots, m$. Тогда для любого $w\notin f(\partial D)$*

$$n(w, f)\leqslant n(\infty, f)+\sum_{j=1}^{m} p(\Gamma_j),$$

где $p(\Gamma_j)=\{k_j+\nu_j-1$ при $\nu_j>0$; k_j при $\nu_j=0$ и $k_j>0$; $|k_j|-1$ при $\nu_j=0$ и $k_j<0\}$.

Неравенство для $n(w, f)$ дает оценку числа листов отображения f при условии, что множество $f(\partial D)$ нигде не плотно в C.

2. В работах Ф. Г. Авхадиева [5], Мокану [6], Аль-Амири и Мокану [7], [8], П. М. Зиновьева [9] были получены различные достаточные условия

однолистности для непрерывно дифференцируемых отображений плоских областей. При этом в качестве частных случаев получаются известные, а также новые подклассы однолистных аналитических функций.

Пусть $E = \{z : |z| < 1\}$, $E^- = \{z : |z| > 1\}$, $H = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1 [5]. *Пусть f_z и $f_{\bar z} \in C(E)$ (или $C(E^-)$). Функция $f(z)$ будет однолистной в E (в E^-), если найдутся две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z) \in C^1(E)$ (или $\varphi(z)$, $\psi(z) \in C^1(E^-)$, причем $\varphi(\infty) = f_z(\infty) \neq 0$, $\psi(\infty) = f_{\bar z}(\infty)$) такие, что $|\varphi(z)| > |\psi(z)|$ для всех $z \in E (z \in E^-)$ и*

$$M(\varphi, \psi, z) + \frac{|f_z - \varphi| + |f_{\bar z} - \psi|}{|z\bar z - 1|} (z\bar z)^\alpha \leqslant \frac{|\varphi| - |\psi|}{|z\bar z - 1|}, \quad z \in E (z \in E^-),$$

где $M(\varphi, \psi, z) = |z\varphi_z + \bar z \psi_z| + |z\varphi_{\bar z} + \bar z \psi_{\bar z}|$, $\alpha = 0$ $(\alpha = 1)$.

Укажем один частный случай. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в E (либо $f(z) - z$, $g(z) - z$ аналитичны в E^-). Полагая $\psi(z) \equiv 0$, $\varphi(z) = g'^{\lambda}(z)$, получаем

Следствие 2.1 [5]. *Пусть $g(z)$ однолистна в $E(E^-)$. Функция $f(z)$ также будет однолистной в $E(E^-)$, если для фиксированной комплексной постоянной λ, $|\lambda| \leqslant 1/6$, и для всех $z \in E(E^-)$ выполняется неравенство $|f'(z)/g'^{\lambda}(z) - 1| \leqslant 1 - 6|\lambda|$.*

Теорема 2.2 [9]. *Пусть $f(z) \in C^1(H)$ и в окрестности точки $z = \infty$ имеет место представление*

$$f(z) = [a_0 + a_1(z)] z^{-(\alpha + i\beta)} \bar z^{-(\gamma + i\delta)},$$

где $\alpha + i\beta$, $\gamma + i\delta$ — фиксированные комплексные числа, причем

$$|(\alpha + i\beta)^2 - (\gamma + i\delta)^2| < 2|\alpha + \gamma|, \quad a_0 \neq 0, \quad \lim_{z \to \infty} a_1(z) = 0.$$

Если $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$ для всех $z = x + iy \in H$ удовлетворяют условиям $(\alpha + \gamma)(uv_x - vu_x) + (\beta + \delta)(uu_x + vv_x) > 0$ и $u_x v_y - u_y v_x > 0$, то $f(z)$ отображает H однолистно на область, спиралеобразную относительно точки $f(\infty)$.

3. Появился ряд достаточных условий однолистности, характеризуемых тем, что на функцию накладываются требования разного вида на подмножествах области определения.

Приведем два утверждения.

Теорема 3.1 (Ф. Г. Авхадиев [10]). *Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $E(q, 1) = \{z : q < |z| < 1\}$,*

$$f'(z) \neq 0, \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[1 + zf''(z)/f'(z)]\, d\theta = 2\pi, \quad z = re^{i\theta}, \quad q < r < 1.$$

Функция $f(z)$ будет однолистной в $E(q, 1)$, если $|zf''(z)/f'(z)| \leqslant (1 - |z|^2)^{-1}$, $z \in E(q, 1)$, и образом окружности $\{|z| = q\}$ при отображении f является выпуклая кривая.

Постоянная 1 в ограничении на $|zf''(z)/f'(z)|(1 - |z|^2)$ является точной (см. ниже теорему 6).

Теорема 3.1 обобщалась и усиливалась в работах П. Л. Шабалина [11], Д. В. Прохорова [12], Ю. А. Решетникова [13], Л. А. Аксентьева и П. Л. Шабалина [14]. Справедлива, напр., такая

Теорема 3.2 [14]. *Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $\bar E(1, Q) = \{z : 1 \leqslant |z| \leqslant Q\}$ и переводит внешнюю границу кольца в простую аналитическую (не обязательно выпуклую) кривую Γ_Q. Если для некоторого $c \in \mathbf{C}$ выполняется условие $|c|z|^2 + (|z|^2 - 1) zf''(z)/f'(z)| \leqslant A(Q, f)$, где $A(Q, f) = \inf[|w_1 - w_2| / l(w_1, w_2)]$ при $w_1, w_2 \in \Gamma_Q$, $l(w_1, w_2)$ — длина наименьшей дуги кривой Γ_Q с концами в точках w_1, w_2, и*

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re}[1 + zf''(z)/f'(z)]\, d\theta = 2\pi, \quad z = re^{i\theta}, \quad 1 < r < Q,$$

то функция $f(z)$ будет однолистной в кольце $E(1, Q)$.

Шварц впервые заметил, что для аналитической в $E=\{z:|z|<1\}$ функции $f(z)$ выполнение неравенства $|\{f, z\}|\equiv|(f''/f')'-(f''/f')^2/2|\leqslant 2(1-|z|^2)^{-2}$ в некотором кольце $r_0<|z|<1$, $r_0\in(0, 1)$, гарантирует лишь конечнолистность $f(z)$ в E.

4. В [15] Нехари доказал однолистность $f(z)$ в единичном круге E при условии: $|\{f, z\}|\leqslant\{F, |z|\}$, $z\in E$, где $F(x)$ определена на $[0, 1]$ и трижды непрерывно дифференцируема, $F'(x)>0$, $F''(0)\geqslant 0$, $\{F, x\}\geqslant 0$ и $(1-x^2)^2\{F, x\}$ не возрастает. Как установил Шварц [16], этот новый критерий однолистности эквивалентен известному утверждению Нехари об однолистности $f(z)$ в E при условии $|\{f, z\}|\leqslant 2p(|z|)$, $z\in E$, где $p(x)$ — непрерывная функция, $p(x)=p(-x)$, $0\leqslant x<1$, $(1-x^2)^2p(x)$ не возрастает, уравнение $y''+p(x)y=0$ имеет решение $y_0(x)>0$ в $(-1, 1)$. Новая версия теоремы Нехари привлекает более естественной формулировкой и доказана с использованием следующей леммы.

Лемма 4.1 [15]. *Пусть $g(t)$ — непостоянная комплекснозначная функция, трижды непрерывно дифференцируемая на вещественном интервале I, и пусть $g'(t)\neq 0$ на I. Если* $\operatorname{Re}\{g, t\}\leqslant 0$, $t\in I$, *и a, b — две различные точки I, то $g(a)\neq g(b)$.*

Геринг и Поммеренке доказали (по существу) такое усиление леммы 4.1.

Лемма 4.2 (ср. с [17]). *Пусть $g(t)$ аналитична на I ($I=(0, d)$, $(0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$), $g'(t)\neq 0$. Если* $\operatorname{Re}\{g, t\}\leqslant 0$, $t\in I$, *то $|g'(t)|$ имеет единственный максимум на I за исключением случая $g(t)=at+b$, a, $b\in\mathbf{C}$, $a\neq 0$.*

С помощью этой леммы в [17] доказана теорема, которая выделяет единственное исключительное семейство функций, удовлетворяющих условию

$$|\{f, z\}|\leqslant 2(1-|z|^2)^{-2},\ z\in E, \qquad (*)$$

и неоднолистных в замкнутом круге. Именно, имеет место

Теорема 4.1 [17]. *Пусть $f(z)$ аналитична в E и выполняется условие ($*$). Тогда $f(z)$ однолистна в E и $f(E)$ — жорданова область за исключением тех случаев, когда $f(E)$ — полоса или образ полосы при дробно-линейных преобразованиях.*

Приведем еще одно неулучшаемое утверждение.

Теорема 4.2 [19]. *Если $f(z)$ аналитична в E и $(1-|z|^2)^2|\{f, z\}|\leqslant 2(1+\delta^2)$ для всех $z\in E$, то $f(z)$ будет однолистной в любом гиперболическом круге из E с гиперболическим радиусом $\pi/(2\delta)$.*

5. Появились условия, которые содержат произвол в виде числовых параметров или функций определенного класса и прокладывают „мостик“ между хорошо известными классами однолистных функций.

Сингх и Чичра обосновали следующее обобщение условий Беккера, Альфорса и Рушевея.

Теорема 5.1. [18]. *Пусть $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, $P(z)=1+c_1z+\ldots$ аналитичны в круге E, $f(z)f'(z)/z$ и $P(z)$ отличны от нуля в E. Пусть, далее, $s\in\mathbf{C}$, $c\in\mathbf{C}\setminus\{0\}$, $a\in\mathbf{R}$, $a>1/2$, $0<\alpha=\operatorname{Re}s\leqslant a$, $H_s(z)=(1-s)zf'/f+s(1+zf''/f'-zP'/P)$. Если a, s, c и $P(z)$ таковы, что $|s+cP(z)|\leqslant a|s|/(2a-\alpha)$ и в E выполняется неравенство $|\alpha a^{-1}(1-|z|^2)H_s(z)-(s+c|z|^2P(z))|\leqslant\alpha a^{-1}|s|+(\alpha a^{-1}-1)|s+cP(z)|$, то $f(z)$ однолистна в E.*

Некоторое обобщение этой теоремы получил Левандовский [81] с таким интересным следствием.

Следствие 5.1. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в E, $f'(0)\neq 0$ и $|a-1-(1-|z|^{2a})zf''(z)/f'(z)|\leqslant a$, $z\in E$, при некотором вещественном $a>1/2$. Тогда $f(z)$ однолистна в E.*

Соединение известных условий Нехари, Л. А. Аксентьева и Беккера в круге E или в области $E^-=\{z:|z|>1\}$ дает

Теорема 5.2 [5]. а) *Пусть функции $f(z)$ и $f_0(z)$ аналитичны в E (или в E^-, за исключением простого полюса в точке $z=\infty$, $f'(\infty)=f_0'(\infty)$). Если при некотором $\delta\in[0, 1]|zf_0''(z)/f_0'(z)|\leqslant\delta|z\bar z-1|^{-1}$ и $|f'(z)/f_0'(z)-1|\leqslant 1-\delta$ для $z\in E$ (или $z\in E^-$), то $f(z)$ однолистна в E (или в E^-).*

б) *Мероморфная в E (или E^-) функция $f(z)$ будет однолистной в E (или E^-), если $|zP(z)|+|z\bar z-1||Q(z)|\leqslant|z\bar z-1|^{-1}$ для $z\in E$ (или $z\in E^-$), где $P(z)$*

и $Q(z)$ аналитичны в E (или E^-) и связаны с $f(z)$ соотношением $2Q(z) - P'(z) - P^2(z)/2 = \{f, z\}$, $z \in E$ (или $z \in E^-$).

6. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны соответственно в круге $E = \{z : |z| < 1\}$ и полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, и $F(z)$ — функция, аналитическая в $E^- \setminus \{\infty\} = \{z : 1 < |z| < \infty\}$, имеющая простой полюс в точке $z = \infty$. Если f, g, F однолистны в E, H, E^- соответственно, то

$$\sup_{z \in E} |(1 - |z|^2) f''(z)/f'(z)| \leqslant 6, \quad \sup_{z \in H} |2 (\operatorname{Re} z) g''(z)/g'(z)| \leqslant 6,$$
$$\sup_{z \in E^-} |(|z|^2 - 1) zF''(z)/F'(z)| \leqslant 6.$$

Оценки для f и g легко получаются из известного неравенства [20] (с. 52): $|f''(z)/f'(z) - 2\bar{z}(1 - |z|^2)^{-1}| \leqslant 4(1 - |z|^2)^{-1}$. Оценка для F является следствием неравенства Г. М. Голузина [20] (с. 139) и установлена в [21]. Постоянная 6 точна во всех трех случаях.

Теорема 6 [22]. *Следующие условия являются достаточными для однолистности соответствующих функций:*

1) $\sup_{z \in E} |(1 - |z|^2) f''(z)/f'(z)| \leqslant 1$; 2) $\sup_{z \in E} |(1 - |z|^2) zf''(z)/f'(z)| \leqslant 1$;

3) $\sup_{z \in H} |2 \operatorname{Re} zg''(z)/g'(z)| \leqslant 1$; 4) $\sup_{z \in E^-} |(|z|^2 - 1) zF''(z)/F'(z)| \leqslant 1$,

причем: а) *постоянная* 1 *во всех случаях является точной, т. е. ее замена на бо́льшую уже не гарантирует однолистности;* б) $f(E)$ — *жорданова область,* $g(H)$ *и* $F(E^-)$ *являются также жордановыми за исключением случаев*: $g = (S \circ g_0 \circ T)^{-1}$, $(T \circ F \circ S_0)^{-1}(w) = [(1 + \beta) w - 1]^{(1-\beta)/2} [(1 - \beta) w + 1]^{-(1+\beta)/2}$, *где* $0 < \beta < 1$, $T(w) = aw + b$ $(a, b \in C, a \neq 0)$, $g_0(w) = w + \ln(w - 1)$ $(w \in C \setminus (-\infty, 1])$, $S(z) = cz + d$ $(c > 0, \operatorname{Im} d = 0)$, $S_0(z) = \varepsilon z$ $(\varepsilon \in C, |\varepsilon| = 1)$.

Условия 1), 2), 4) принадлежат Беккеру, утверждение б) о жордановости образов обосновано Беккером и Поммеренке [22]. Условие вида 3) с меньшей постоянной получено в [23], а с постоянной 1 следует из результатов Ф. Г. Авхадиева [5] и Кюнау [24]. Точность постоянной 1 для 3) обосновали Мане, Сад и Сулливан, а также Астала и Геринг, для 4) — Поммеренке, для 1) и 2) — Беккер и Поммеренке (см. [22]).

С использованием условий 1) — 4) можно доказать на основе подчиненности серию достаточных условий однолистности по областям значений различных функционалов, как в обзоре [1]. Актуальным является построение соответствующих областей, которые не допускают расширения. В частности, интересно определить неулучшаемую постоянную a в условии $\sup |f'(z)| / \inf |f'(z)| \leqslant a$ при $|z| < 1$ (см. [25], [21], [26], [1], [27], [28]).

7. Пусть $f(z, t)$ непрерывна при $z \in \bar{E}$ и $t \in [t_1, t_2]$, при каждом фиксированном $t \in [t_1, t_2]$ функция $f(z, t)$ осуществляет внутреннее по Стоилову и сохраняющее ориентацию отображение круга E. Предположим, что $f(0, t) \equiv 0$, $f(e^{i\theta}, t)$ непрерывно дифференцируема для любых $\theta \in [0, 2\pi]$ и $t \in [t_1, t_2]$, $f(e^{i\theta}, t) \neq 0$.

Теорема 7 [29]. *Если для всех* $\theta \in [0, 2\pi]$ *и* $t \in [t_1, t_2]$

$$\frac{\partial \arg w}{\partial \theta} \frac{\partial |w|}{\partial t} > \frac{\partial |w|}{\partial \theta} \frac{\partial \arg w}{\partial t}, \quad w = f(e^{i\theta}, t),$$

и $f(z, t_2)$ *p-листна в E, то* $f(z, t)$ *не более чем p-листна в E при любом* $t \in [t_1, t_2]$.

Эта теорема является граничным аналогом подчиненных цепей (см. теоремы 26 и 27 в [1]), но не сводится к подчиненным цепям в E, даже если $f(z, t)$ аналитична по z (см. пример $f(z, t) = z \exp[(a + t) z]$, $a > 1$, $0 \leqslant t < \infty$). Пользуясь теоремой 7, Е. А. Широкова [29] выделила ряд новых условий однолистности, из которых отметим следующее: функция $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ аналитична в E и удовлетворяет в E неравенству $\operatorname{Re} \{zf'(z)/[f(z) \ln(cz/f(z))]\} > 0$, где c — вещественная постоянная.

И. А. Лебедев [30] получил новые структурные формулы, включающие класс Базилевича $B_{\alpha, \beta}$. К таким формулам он приходит, используя некоторые классы интегрирующих множителей для уравнения Левнера — Куфарева. Примером новой структурной формулы, порождающей однолистные функции, является

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots =$$

$$= \left\{ \frac{ca(0)}{a(0)+b(0)} \int_0^z [a(u)+b(u)]\, u^{ca(0)-1} \exp\left[c \int_0^u \frac{a(v)-a(0)}{v}\, dv \right] du \right\}^{1/(ca(0))},$$

где $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Re}[a(z)+b(z)] > 0$, $\operatorname{Re} a(z) > |b(z)| |\operatorname{Im} c| / |c|$. Отсюда при $c = 1$ получается известный класс $B_{\alpha,\beta}$.

8. Достаточное условие однолистности в виде ограничений на рост производной Шварца $\{f, z\}$ в многосвязных областях исследовалось в работах Мартио и Сарваса, Осгуда, Геринга и других авторов.

Теорема 8. а) [31], [33]. *Пусть $f(z)$ аналитична в конечносвязной области D, причем любая компонента ∂D является либо квазиокружностью, либо точкой. Тогда существует постоянная $a = a(D) > 0$ такая, что если $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} \rho_D^{-2}(z)| \leqslant a$, то*[1] *$f(z)$ однолистна в D и квазиконформно продолжима в $\overline{C}$.*

б) [32]. *Пусть D — собственная подобласть C. Если существует постоянная $a = a(D) > 0$ такая, что для любой аналитической в D функции $f(z)$ неравенство $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} \rho_D^{-2}(z)| \leqslant a$ гарантирует однолистность $f(z)$ в D, то любая компонента ∂D является либо квазиокружностью, либо точкой.*

Теорема 8 верна и для условия $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} d^2(z, \partial D)| \leqslant a$, где $d(z, \partial D)$ — расстояние от точки z до границы D (см. [33], [32]). Аналог а) справедлив и для условия $\sup\limits_{z \in D} |\rho_D^{-1}(z) f''(z)/f'(z)| \leqslant b(D)$ (см. [33], [34]). Аналог части б) в этом случае анонсировался Асталой и Герингом [84].

Бердон и Геринг [35] установили также аналог теоремы 8 для условия $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} K_D^{-1}(z, \overline{z})| \leqslant c$, где $K_D(z, \overline{z})$ — ядро Бергмана. Если область D не является конечносвязной, то теорема 8 а), вообще говоря, неверна, но существуют отдельные примеры счетно-связных круговых областей D, для которых условие $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} \rho_D^{-2}(z)| \leqslant a$ с некоторым $a = a(D) > 0$ гарантирует однолистность $f(z)$ (см. [31], [33], [34]).

9. Пусть D — область в $\overline{C}$. Через $a_S(D)$ обозначим наибольшую (точную) постоянную такую, что для любой мероморфной в D функции $f(z)$ условие $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} \rho_D^{-2}(z)| \leqslant a_S(D)$ достаточно для однолистности $f(z)$ в D. Доказано [36],]31], что если D конечносвязна и $a_S(D) > 0$, то неравенство $\sup\limits_{z \in D} |\{f, z\} \times \rho_D^{-2}(z)| < a_S(D)$ гарантирует квазиконформную продолжимость $f(z)$ в $\overline{C}$. Поскольку $a_S(D_1) = a_S(D_2)$, если D_1 — образ D_2 при дробно-линейном преобразовании, то известное условие Нехари дает точное значение $a_S(D) = 2$, когда D — круг или полуплоскость. В ряде работ были найдены $a_S(D)$ или их оценки для областей D, отличных от круга. Лехто рассмотрел круговые двуугольники и внешность эллипса.

Теорема 9.1 [37]. а) $a_S(D) = 2\alpha^2$ *для области* $D = \{z : 0 < \arg z < \alpha\pi\}$, $0 < \alpha \leqslant 1$; б) $a_S(D) = 4\alpha - 2\alpha^2$ *для области* $D = \{z : 0 < \arg z < \alpha\pi\}$, $1 \leqslant \alpha < 2$; в) $a_S(D) \geqslant 8q^2(1+q)^{-2}$, *если D — внешность эллипса с полуосями a и b*, $0 < a/b = q < 1$.

Широкое обобщение теоремы Нехари получили С. Р. Насыров и М. А. Северин. Пусть $w(\zeta)$, $w(0) = 0$, однолистно и конформно отображает круг E на область $D_\alpha = w(E)$ и $|\arg[zw'(z)/w(z)]| \leqslant \alpha\pi/2$ в E для некоторого $\alpha \in [0, 1)$. Пусть $R = R(\theta)$ является уравнением ∂D_α в полярных координатах.

[1] Здесь и в дальнейшем $\rho_D(z)$ — плотность гиперболической метрики области D.

Теорема 9.2 [38]. *Мероморфная в D_α функция $f(z)$ будет однолистной в D_α, если $|\{f, z\}| \leqslant 4\sin^2(\beta/2) R^{-2}(\theta) p(t)$ для любого $z = re^{i\theta} \in D_\alpha$, где $t = |z|/R(\theta)$, $\beta = \pi(1-\alpha)/2$, и функция $p(t)$ непрерывна, неотрицательна на $[0, 1)$, $p(t)(1-t^2)^2$ не возрастает на $[0, 1)$, наименьшее собственное значение задачи $y'' + \lambda p(t) y = 0$, $t \in (0, 1)$; $y(1) = y'(0) = 0$, больше или равно единице.*

Следствие 9.1 [38]. $a_S(D_\alpha) \geqslant 4\sin^2(\beta/2)/m(\beta)$, $m(\beta) = \pi[1 + \exp(\pi \operatorname{ctg} \beta)]/(4\beta)$.

10. Уменьшение постоянной $c > 0$ в достаточных условиях однолистности вида $|I(f, z)| \leqslant c$ приводит к классам функций, однолистных в замкнутой области. В качестве примера укажем один из результатов И. В. Журавлева.

Пусть $M(E)$ — класс локально однолистных аналитических в единичном круге функций, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $I(f, z)$ — аналитический функционал, определенный для любой функции $f(z) \in M(E)$.

Теорема 10 [39]. *Пусть выполнены условия:* а) *если $|I(f, z)| \leqslant c = \mathrm{const}$, то $f(z)$ однолистна в E;* б) *для любой функции $f(z)$, удовлетворяющей неравенству $|I(f, z)| \leqslant c$, и для произвольного комплексного $\lambda \in E$ найдется единственная функция $f_\lambda(z) \in M(E)$ такая, что $\lambda I(f, z) = I(f_\lambda, z)$;* в) *при любом фиксированном $z \in E$ отображение $\lambda \to f_\lambda(z)$ голоморфно и $f_0(z) = z$. Тогда если $f(z) \in M(E)$ и $|I(f, z)| \leqslant kc$ для произвольного фиксированного $k \in (0, 1)$, то $f(z)$ допускает q-квазиконформное продолжение в $\overline{C}$ с q, зависящим лишь от k.*

Доказательство основано на идеях автора, выдвинутых и использованных им в [40]; существенно применяется аналитическая зависимость $f_\lambda(z)$ от параметра λ.

Известно, что квазиконформная продолжимость в $\overline{C}$ однолистной в E функции $f(z)$ равносильна непрерывной продолжимости $f(z)$ на границу и квазиконформности кривой $\Gamma = f(\partial D)$, т. е. ограниченности ангармонического отношения (w_1, w_2, w_3, w_4) для произвольной упорядоченной четверки точек из Γ. Поэтому теорема 10 и возможные ее аналоги в конечносвязных жордановых областях следуют из весьма простой „λ-леммы“ Мане, Сада и Сулливана. Приведем количественный вариант этой леммы, обоснованный в [17].

Лемма 10.1. *Пусть A — произвольное множество в $\overline{C}$ и пусть функция $w = g(z, \lambda): A \times E \to \overline{C}$ инъективна по z (при фиксированном λ) и мероморфна по λ (при фиксированном z). Пусть $g(z, 0) \equiv z$. Тогда $g(z, \lambda)$ имеет сферически непрерывное продолжение на $\overline{A} \times E$, которое мероморфно по λ и удовлетворяет условию*

$$|(w_1, w_2, w_3, w_4)| \leqslant \frac{1}{16} \exp\left\{\pi + \ln^+ |(z_1, z_2, z_3, z_4)| \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}\right\}$$

для каждой четверки z_1, z_2, z_3, z_4 в $\overline{A}$, где $w_j = g(z_j, \lambda)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Отметим также работы [41], [42], в которых изучены условия существования гомеоморфного продолжения в замкнутую область функции $f(z)$, однолистной и спиральной в E.

11. Широкое обобщение теорем существования достаточных условий однолистности в форме $|f''(z)/f'(z)| \leqslant a\rho_D(z)$, $|\{f, z\}| \equiv |f'''/f' - (3/2)(f''/f')^2| \leqslant b\rho_D^2(z)$ получил С. Л. Крушкаль. Пусть D — односвязная область в C, ограниченная квазиконформной кривой и содержащая на границе точку $z = \infty$; $d(z, \partial D)$ — евклидово расстояние от z до границы D; $P_n(f) = f^{(n)}/f' - F(f''/f', \ldots, f^{(n-1)}/f')$, где $n \geqslant 2$, F — аналитическая функция своих аргументов, $f(z)$ — локально однолистная аналитическая в D функция. Предполагается, что для любой аналитической и однолистной в D функции $f(z)$ справедлива оценка $\sup |d(z, \partial D)^{n-1} F| < \infty$.

Теорема 11 [43]. *Существует такая постоянная $c = c(P_n, D) > 0$, что любая аналитическая в D функция $f(z)$ является однолистной в D, если она удовлетворяет условиям $\sup\limits_{z \in D} |d(z, \partial D)^{n-1} P_n(f)| < c$ и $|f(z) - \alpha z| = O(1)$ при $z \to \infty$ $(z \in D)$ и для некоторого $\alpha \neq 0$.*

Пока остается неясной иерархия этих условий и их прикладное значение. Кроме того, теоремы существования ненулевых постоянных в достаточных условиях однолистности с n-ми производными ставят проблему определения числовых значений постоянных такого вида.

12. Введем класс конечносвязных областей $G(\alpha, \beta)$ следующим образом. Область D принадлежит классу $G(\alpha, \beta)$, если для произвольных точек $t_1, t_2 \in L \subset \partial D$ (где L — любая компонента границы области D) выполняется такое свойство: области D целиком принадлежит круговая луночка с внутренним углом между граничными окружностями $\geqslant \alpha\pi$ и с „подпирающим" углом $\leqslant \beta\pi$. „Подпирающий" угол — это минимальный неотрицательный угол, который образует дуга окружности, принадлежащая луночке и проходящая через t_1 и t_2, с прямолинейным отрезком $[t_1, t_2]$. С использованием явного вида квазиотражения относительно границы луночек и оценок параметров этого квазиотражения можно получить много конкретных условий однолистности. Такой „луночный подход" развит в работах Л. А. Аксентьева и П. Л. Шабалина, М. А. Северина, С. Б. Сагитовой, П. М. Зиновьева, Ф. Ф. Майера.

Приведем в обобщенном виде один результат Л. А. Аксентьева и П. Л. Шабалина.

Теорема 12.1 (ср. с [14], [44]). *Если функция $f(z)$ аналитична в области $D \in G(\alpha, \beta)$ и выполняется условие*

$$\sup_{z \in D} |\rho_D^{-1}(z) f''(z)/f'(z)| \leqslant c(\alpha, \beta) \min(\alpha, 2-\alpha),$$

$$c(\alpha, \beta) = \max_{\theta} |(e^{-i\theta(\alpha-1)/\alpha} + e^{-\beta\pi})/(e^{i\theta} + e^{-i\beta\pi})|,$$

то $f(z)$ однолистна в D.

С применением луночного подхода обоснованы, напр., следующие утверждения.

Теорема 12.2 [45]. *Мероморфная в области $D = E(1, Q) = \{z : 1 < |z| < Q\}$ функция будет однолистной в D, если выполнено одно из неравенств:* $\sup_{z\in D} |\rho_D^{-1}(z) f''(z)/f'(z)| \leqslant 3(1+\pi/(2\beta))^{-1}$, $\sup_{z \in D} |\rho_D^{-2}(z)\{f, z\}| \leqslant 2^{-1}(1+\pi/(2\beta))^{-2}$, *где* $\beta = \arcsin[(Q-1)/(Q+1)]$.

Теорема 12.3 [46]. *Пусть $D = E(q, 1) = \{z : q < |z| < 1\}$. Если функция $f(z)$ аналитична в $D \setminus \{z_0\}$, $z_0 \in D$, имеет простой полюс в точке z_0 и удовлетворяет неравенству* $\sup_{z\in D}[\rho_D^{-1}(z)|f''(z)/f'(z) + 2(z-z_0)^{-1}|] \leqslant \alpha |\cos[\pi/(2-2\alpha)]|$, *то $f(z)$ однолистна в D. Здесь* $\alpha = \alpha(q, |z_0|)$, $\alpha(q, t) = 2\,\mathrm{arctg}[(t-q)(1-q) \times (t+q)^{-1}(1+q)^{-1}]$ *при* $t \leqslant \sqrt{q}$, $\alpha(q, t) = 2\,\mathrm{arctg}[(1-t)(1-q)(1+t)^{-1}(1+q)^{-1}]$ *при* $t \geqslant \sqrt{q}$.

13. Приведем два утверждения, особенность которых заключается в том, что $\partial f(D)$ не является квазиконформной кривой.

Теорема 13.1 [47]. *Пусть $z = x + iy$, $f(z)$ аналитична в полосе $D = \{z : 0 < y < c\}$, $f'(z)$ и $f''(z)$ непрерывны и $f'(z)$ не равна нулю при $0 < y \leqslant c$, $-\infty < x < \infty$. Функция $f(z)$ будет однолистной в D, если выполнены условия:*

а) $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = \infty$, $\overline{\lim_{z\to\infty}}\, 2y\,|f'(z)/f(z)| \leqslant 1$;

б) $|\arg f'(t) + \alpha| \leqslant \pi\beta/2$, $2c\,|f''(t)/f'(t)| \leqslant \sin[\pi(1-\beta)/2]$,

где $t = x + ic$, $-\infty < x < \infty$, *α и β — постоянные,* $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$;

в) $|f''(x+iy)/f'(x+iy)| \leqslant 1/(2y)$, $0 < y < c$, $-\infty < x < \infty$.

Пусть M_n^β — класс областей с n-кратной симметрией вращения относительно начала координат и симметрией относительно мнимой оси, т. е. $e^{i2\pi/n} w \in D$ и $-\overline{w} \in D$ для произвольной точки $w = u + iv \in D$. Пусть $\infty \in \partial D$, $\partial D \cap \{-\pi(n+2)/(2n) < \arg w < \pi(n-2)/(2n)\} = L_1$ — гладкая (кроме точки $w = \infty$) кривая с уравнением $v = \varphi(u)$, $|\varphi'(u)| \leqslant \mathrm{ctg}\,\beta$. Пусть, далее, $l(u) = k|u| - \varphi(u)$, $k = -\mathrm{ctg}(\pi/n)$, $\sup_u l(u) < \infty$.

Теорема 13.2 (Зиновьев П. М., Майер Ф. Ф. [9], см. также [48]). *Если $f(w)$ аналитична в области $D \in M_n^\beta$, $f'(w)$ непрерывна в $\overline{D} \setminus \{\infty\}$ и отлична от нуля на границе D, то при выполнении условий:*

а) $\lim\limits_{w\to\infty} |f'(w)| = k > 0$; б) $f(e^{i2\pi/n}w) = e^{i2\pi/n} f(w)$, $f(w) = -\overline{f(-\overline{w})}$;

в) $\left|\frac{f''(w)}{f'(w)}\right| \leqslant \frac{2\beta}{\pi} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\left(1 + \frac{\sup l(u)}{\inf l(u)}\right)^{-1} \rho_D(w)$, $w = u + iv \in D$,

функция $f(w)$ однолистна в D.

14. Л. А. Аксентьевым и Ф. Ф. Майером дополнены идеей симметризации три подхода к получению достаточных условий однолистности с применением метода подчиненности (§ 9 из [1]). В дифференциальном подходе много конкретных результатов получается на основе утверждения И. П. Митюка [49], соединенного с результатом Полиа и Сеге [50].

Лемма 14.1. *Пусть функция $\varphi(z) = c_0 + \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k z^k$, $n \geqslant 1$, аналитична в круге E и подчинена аналитической однолистной в E функции $g(z)$, $g(0) = c_0$. Если область D^* получается из области $D = g(E)$ симметризацией относительно прямой или полупрямой, проходящей через точку $\varphi(z)$, и содержится в некоторой области D_0 (в частности, $D_0 = D^*$), то*

$$|\varphi'(z)| \leqslant \frac{n|z|^{n-1}}{1-|z|^{2n}} R(D_0, \varphi(z)),$$

где $R(D_0, w)$ — конформный радиус области D_0 в точке w.

С использованием этой леммы и условия Беккера получается

Теорема 14 [51], [52]. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге E и $\varphi_0(z)$ — однолистная функция, удовлетворяющая условию $R(\varphi_0(E), \varphi_0(z)) \leqslant 1$, $z \in E$. Если $[\ln f'(z)]^* \prec \varphi_0(z)$ (т. е. симметризованная область $\ln f'(E)$ принадлежит области $\varphi_0(E)$), то функция $f(z)$ однолистна в E.*

При функциональном и интегральном подходах условия накладываются на область значений $zf''(z)/f'(z)$ после симметризации однолистной накрывающей области. При этом существенно используются неравенства Бернстайна [53] для интегральных средних. Применение симметризации и оценок конформных радиусов дало возможность обобщить некоторые из результатов С. Н. Кудряшова, С. Касымова [54], С. Касымова [55], [56] и представить другие известные результаты в изящной форме.

15. Однолистное конформное отображение круга на конечную область D, ограниченную спрямляемой кривой, представимо в виде

$$f_\nu(z) = \int_0^z \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta + \text{const}, \quad \varphi_\nu(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\nu(\theta)\right], \quad z \in E,$$

где $\nu(\theta) = \nu_0(\theta) + \nu_s(\theta)$, $\nu_0(\theta)$ — абсолютно непрерывная функция, а непрерывная функция $\nu_s(\theta)$ не возрастает на $[-\pi, \pi]$, ее производная существует и равна нулю почти всюду на $[-\pi, \pi]$. Если D содержит точку $w = \infty$, то аналогичная структурная формула имеет вид

$$F_\nu(z) = \int \left(\frac{1-\overline{a}z}{z-a}\right)^2 \varphi_\nu(z)\, dz, \quad z \in E,$$

где $a \in E$ и является корнем уравнения $\varphi_\nu'(a)/\varphi_\nu(a) = 2\overline{a}(1-|a|^2)^{-1}$.

Дюрен, Шапиро и Шилдс [57] установили качественную связь между однолистностью функции $f_\nu(z)$ и условием квазигладкости по Зигмунду: $\nu \in \Lambda_K$, т. е. $|\nu(\theta+h) + \nu(\theta-h) - 2\nu(\theta)| \leqslant K|h|$ для любых вещественных θ и h. Количественные оценки K были проведены впервые П. Л. Шабалиным [58]. Наилучшие оценки в настоящее время принадлежат М. А. Седодину и П. Л. Шабалину и приведены в следующих теоремах.

Теорема 15.1 [59], [60]. а) *Если $\nu \in \Lambda_K$, $K \leqslant 1/3{,}37$, то $f_\nu(z)$ однолистна в E.* б) *Если $f_\nu(z)$ однолистна в E, то $\nu \in \Lambda_K$ и $K \leqslant 20 + 12e^{-4} \approx 20{,}22$.* в) *Если $f_\nu(z)$ однолистна в E, то $\nu \in \Lambda_K$ и удовлетворяет условию Зигмунда для достаточно малых h с коэффициентом $K' \leqslant 12{,}5 + 3e^{-4} \approx 12{,}56$.*

Теорема 15.2 [59], [60]. *Пусть* $\mu(\theta)=\int \ln[\,|1-\bar{a}e^{i\theta}|^2\,|F'_\nu(e^{i\theta})|\,]d\theta+\nu_s(\theta)$. *Если* $\mu(\theta)\in\Lambda_K$ *и* $K\leqslant(1-|a|^2)(3+|a|)/(27(2+|a|))$, *то* $F_\nu(z)$ *однолистна в* E.

16. В. Г. Чередниченко [61], [62] получил несколько условий разрешимости обратной задачи потенциала с постоянной плотностью $\mu>0$. Задача состоит в отыскании такой ограниченной односвязной области D, что

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{\mu d\xi d\eta}{\zeta-z}=u(z),\ \zeta=\xi+i\eta,$$

где $u(z)=c_0/z+c_1/z^2+\ldots+c_{n-1}/z^n+\ldots,\ c_0>0,$— заданная в окрестности $z=\infty$ функция. Отметим из них три следующих условия.

1) *При* $c_l=0,\ l\geqslant n$, *необходимым условием разрешимости является выполнение неравенств* $|c_k/c_0|\leqslant(c_0/\mu)^{k/2}l_k^{(n)},\ k=1,2,\ldots,n-1$, *где* $l_k^{(n)}$ — *заданные числа, зависящие, в частности, от оценок коэффициентов однолистных полиномов.* Отсюда следует несуществование решения обратной задачи при достаточно больших μ.

2) *Если* $|u(z)-c_0/z|\leqslant\lambda$ *при* $|z|=R$, *то при* $\mu\leqslant\mu_0(R,\lambda)$ (*вид* μ_0 *установлен*) *решение обратной задачи существует.*

3) *Для всякого* α, $0<\alpha<1$, *существует число* $\mu>0$ *и область* D^*_μ, *звездообразная порядка* $\alpha\left(\alpha=\min\limits_{|t|=1}\operatorname{Re}\dfrac{tz'(t)}{z(t)}\right)$, *решающие обратную задачу потенциала для функции* $u(z)=c_0/z+c_1/z^2+\ldots+c_{n-1}/z^n, c_0>0,\ n>1$.

Условие 1) показывает связь обратной задачи потенциала с проблемой коэффициентов в теории однолистных функций. Относительно теорем единственности в обратной задаче потенциала отметим некоторые общие моменты с теоремами единственности во внешних обратных краевых задачах [63].

17. Вопрос о единственности решения внешней обратной краевой задачи (ОКЗ) можно поставить следующим образом. Пусть $F_0(\zeta)-\zeta$ аналитична в $E^-=\{\zeta:|\zeta|>1\}$, $F'_0(\zeta)\neq0$, $\ln|F'_0(\zeta)|$ представим интегралом Пуассона с плотностью $\ln|F'_0(e^{i\theta})|$. Существует ли однозначная функция $F(\zeta)$ вида $F(\zeta,a)=\int\left(\dfrac{1-\bar{a}\zeta}{\zeta-a}\right)^2\dfrac{F'_0(\zeta)}{\zeta^2}d\zeta$ для некоторого $a\in E^-\setminus\{\infty\}$? Очевидно, $F_0(\zeta)=F(\zeta,\infty)$. Соответствующая внешняя ОКЗ имеет не менее двух решений, если для некоторой точки $a\in E^-\setminus\{\infty\}$ функция $F(\zeta,a)$ однозначна в E^- и $F(E^-)=F(E^-,a)$ не совпадает с $F_0(E^-)=F(E^-,\infty)$ с точностью до движения на плоскости. Число различных решений задачи не превосходит числа корней уравнения $\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)=-2(|\zeta|^2-1)^{-1}$ в E^-. Условия единственности ОКЗ тесно связаны с классами однолистных функций.

Теорема 17.1 [64], [83]. *Пусть* $\operatorname{Re}[e^{i\beta}\zeta F'_0(\zeta)/F_0(\zeta)]\geqslant0$ *в* E^- *для некоторого* β, $|\beta|<\pi/2$. *Тогда решение соответствующей внешней ОКЗ единственно, за исключением случаев*: а) $D=F_0(E^-)$ — *внешность симметричного* v-*образного разреза* ($\beta=0$); б) D — *внешность разреза по дуге логарифмической спирали* $\{\arg(z-b)=\operatorname{tg}\beta\ln|z-b|+c\}$ ($\beta\neq0$).

Теорема 17.2 (Л. А. Аксентьев, А. В. Казанцев). *Если* $F_0(\zeta)$ *удовлетворяет условию Нехари* $|\{F_0,\zeta\}|\leqslant2(|\zeta|^2-1)^{-2}$, $\zeta\in E^-$, *то решение соответствующей внешней ОКЗ единственно.*

18. Ю. Е. Хохлов [65] исследовал введенный им ранее оператор свертки аналитической и однолистной функции с гипергеометрической функцией Гаусса $g(z)=zF(a,b,c;z)$, где

$$F(a,b,c;z)=1+\frac{ab}{c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}z^2+\ldots,$$

a,b,c — вещественные параметры. Он показал, что при условиях на a,b,c, обеспечивающих малость коэффициентов свертки $F(a,b,c)f(z)\overset{\text{def}}{=}f(z)*g(z)$, эта свертка будет переводить в себя класс однолистных и аналитических в E функций $f(z)$ с обычной нормировкой $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

П. Н. Пронин [66], используя результат Меркеса и Скотта о звездообразности функции $zF(a,b,c;z)$, заметил, что при $0<a<c$, $-1<b\leqslant a$ и

$0 \leqslant b \leqslant 2$ оператор $F(a, b, c) f(z)$ переводит класс выпуклых функций $f(z)$ в E в класс звездообразных функций.

При конкретных значениях параметров a, b, c гипергеометрические операторы $F(a, b, c)$ являются интегро-дифференциальными операторами, которые изучались в работах многих авторов.

19. Для простой замкнутой ориентированной кривой γ на плоскости теорема Жордана определяет однолистную область $D = D(\gamma)$, имеющую γ своей ориентированной границей. Если заданы кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, $m \geqslant 1$, которые к тому же не обязательно являются простыми, то возникает вопрос о построении такой римановой поверхности (р. п.) $R = R(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ над плоскостью $\overline{C}$, что R имеет m граничных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем γ_j — проекция Γ_j на плоскость $\overline{C}$. В различных постановках вопрос о построении р. п. с заданной проекцией ее границы на плоскость изучался в работах Морса [67], Ф. Д. Гахова и Ю. М. Крикунова [68], Титуса [69], Л. А. Аксентьева [70], Леви [71], Ф. Г. Авхадиева и С. Р. Насырова [72]. Как указывает Титус [69], этой задачей интересовались Пикар и Левнер. Построение $R(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ с заданными $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ важно с точки зрения обратных краевых задач и тесно связано с изучением числа листов отображения с заданными граничными свойствами.

Приведем здесь в упрощенном виде два результата, принадлежащие Ф. Г. Авхадиеву и С. Р. Насырову. Через $\operatorname{ind}_z \gamma$ будем обозначать индекс Пуанкаре (индекс точки z относительно кривой γ).

Теорема 19. 1) *Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — ориентированные замкнутые локально простые в $\overline{C}$ кривые, ρ — целое неотрицательное число. Тогда существует р. п. $R(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ рода ρ, не имеющая граничных точек ветвления.*

2) *Пусть γ — ориентированная замкнутая локально простая кривая в $\boldsymbol{C}$, имеющая лишь конечное число точек самопересечения, и все пересечения трансверсальны. Для существования р. п. $R(\gamma)$, $n(\infty)$ раз покрывающей точку $z = \infty$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $n(\infty) + \operatorname{ind}_z \gamma \geqslant 0$ для любой точки $z \in \boldsymbol{C} \setminus \gamma$.*

20. Пусть B^n — единичный шар в $\boldsymbol{C}^n$ с центром в нуле, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ — локально биголоморфное отображение шара B^n в $\boldsymbol{C}^n$. Через $Df(z)$ и $D^2 f(z)(z, \cdot)$ обозначим линейные операторы, определяемые матрицами

$$Df(z) = \left(\frac{\partial f_k(z)}{\partial z_j}\right), \quad D^2 f(z)(z, \cdot) = \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k(z)}{\partial z_j \partial z_m} z_m\right), \quad 1 \leqslant j, k \leqslant n.$$

Далее, $\|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$, для матрицы $A = (A_{jk}) : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{C}^n$ определена норма $\|A\| = \sup\{\|Az\| : \|z\| \leqslant 1\}$.

Пфальцграф обосновал следующее обобщение условия Беккера.

Теорема 20.1 [73]. *Пусть отображение $f(z) = z + \ldots$ локально биголоморфно в B^n и $(1 - \|z\|^2) \|(Df(z))^{-1} D^2 f(z)(z, \cdot)\| \leqslant c$, $z \in B^n$. Если $c \leqslant 1$, то отображение f однолистно в B^n и $\|z\|(1 + c\|z\|)^{-2} \leqslant \|f(z)\| \leqslant \|z\|(1 - c\|z\|)^{-2}$, $z \in B^n$.*

Для доказательства в [73], [82] строятся цепи подчинения (уравнения Левнера — Куфарева) в шаре B^n; утверждение теоремы получается рассмотрением $f(z, t) = f(ze^{-t}) + (e^t - e^{-t}) Df(ze^{-t})(z)$, $t \geqslant 0$. В существенном доказательство повторяет случай $n = 1$.

Цепи подчинения и связанные с ними достаточные условия в других случаях (конечные или бесконечные поликруговые области) построены Ю. Е. Хохловым, С. Р. Насыровым. Ряд интересных исследований проведены представителями ростовской школы по геометрической теории функций С. Н. Кудряшовым и А. П. Тихоновым (см. [74]).

Приведем также одно утверждение, относящееся к вещественному n-мерному случаю.

Теорема 20.2 (Ф. Г. Авхадиев, доклад на Донецком коллоквиуме, сентябрь 1984 г.). *Пусть D — произвольная область в $\overline{\boldsymbol{R}}^n = \boldsymbol{R}^n \cup \{\infty\}$, T — зам-*

кнутое множество из $\overline{\overline{D}}$, $D \setminus T$ — область, отображение $f : \overline{\overline{D}} \setminus T \to \overline{\mathbf{R}}^n$ непрерывно в сферической метрике. Отображение f будет инъективным в $D \setminus T$, если выполнены условия: а) *в сферической метрике f локально гомеоморфно в $\overline{D} \setminus T$ и инъективно на каждой из компонент множества $(\partial D) \setminus T$;* б) *существует замкнутое множество $K \subset \overline{\mathbf{R}}^n$ такое, что $f(T) \subset K$, $K \cap f(\overline{D} \setminus T) = \varnothing$, $\overline{\mathbf{R}}^n \setminus K$ — односвязная область. Здесь $f(T) = \{y \in \overline{\mathbf{R}}^n$: существует такая последовательность $(x_m) \subset D \setminus T$, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x \in T$ и $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) = y\}$.*

21. Основные результаты по достаточным условиям однолистности и p-листности аналитических функций по состоянию на 30-е годы собраны в книгах Монтеля [75] и Бернацкого [76]. Наиболее употребительные условия приведены в Математической энциклопедии в двух статьях: Ю. Е. Аленицын. Многолистности условия; Л. А. Аксентьев. Однолистности условия.

Методы обоснования однолистности функций, принадлежащих определенному классу, весьма разнообразны. Существующие методы можно разбить условно на несколько групп: I) применение принципа аргумента; II) использование интегральных тождеств, связывающих разность $f(z_1) - f(z_2)$ и заданные функционалы; III) построение продолжений (уравнение Левнера — Куфарева, квазиконформное и более общие продолжения); IV) сравнение различных классов функций, позволяющее обосновать вложимость заданного класса в известный класс однолистных функций.

Для последнего десятилетия характерно интенсивное применение методов продолжений. В достаточных условиях однолистности важной является проблема вычисления постоянных (числовых характеристик). В первую очередь это связано с прикладным значением классов однолистных функций и с их применениями к краевым задачам с неизвестными границами.

Задачи об определении точных постоянных диктуются соображениями эстетического характера. Точные значения постоянных известны лишь в отдельных случаях, и можно указать множество конкретных нерешенных задач. Например, каковы точные значения постоянных, о которых идет речь в теоремах п. 15? Верно ли, что любая аналитическая в E функция $f(z)$ будет однолистной в E, если $f'(z) \neq 0$ и $\sup\limits_{z\in E} |f''(z)/f'(z)| \leqslant \pi$? Каковы точные значения постоянных $c = c(p)$ таких, что аналитическая в области D функция $f(z) \not\equiv \text{const}$ является не более чем p-листной в D, если $\sup\limits_{z\in E} |f''(z)/f'(z)| \leqslant c(p)$?

Представляется перспективным развитие методов групп I) — IV) для оценки числа листов для образов отображений из заданных классов.

Приведем утверждения, описывающие новые классы конечнолистных отображений.

Теорема 21.1 [77]. *Функция*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \frac{y_k(\tau)\, d\tau}{\tau - z}$$

будет n-листной в $\mathbf{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$, $a_1 < b_1 < \ldots < a_n < b_n$, если для каждого $k = 1, \ldots, n$ неотрицательная вещественная функция $y_k(\tau)$ не убывает на интервале (a_k, c_k) и не возрастает на интервале (c_k, b_k) действительной оси, $a_k \leqslant c_k \leqslant b_k$, причем $y_k(a_k) \neq 0$, $y_k(b_k) \neq 0$.

Пусть $F(z) = \int z^{p-1} \prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\alpha_k - 1} e^{\varphi(z)} dz$, $|a_k| = 1$, $\varphi(z)$ — аналитическая функция, $\varphi(e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$, и $A_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k - n + 2p\right)\Big/2$. Будем считать известным понятие каркасного многоугольника, введенное в [78].

Теорема 21.2 [77]. *Функция $F(z)$ будет p-листной в E, если выполняется одно из следующих условий:*

1°. $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *и* $v'(\theta) \geqslant -A_p$, $A_p > 0$;

2°. *каркасный многоугольник с вершинами в точках $F(a_k)$, $k = 1, \ldots, n$, является p-листным и $v'(\theta) \leqslant -A_p$, $A_p < 0$.*

Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $E(q, 1) = \{z : q < |z| < 1\}$, $\Phi(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ непрерывно продолжима на окружность $\{z : |z| = q\}$,

$\gamma(\theta)=f(qe^{i\theta}),\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ |\gamma|=\gamma([0,2\pi]),\ \operatorname{ind}_w\gamma=(2\pi i)^{-1}\int\limits_\gamma (z-w)^{-1}dz,\ M(q;f)=$ $=\sup\limits_\theta|f(qe^{i\theta})|+(q^{-1}-q)\sup\limits_\theta|f'(qe^{i\theta})|$. При этих предположениях справедлива

Теорема 21.3 [79]. *Если*

$$|zf''(z)/f'(z)|\leqslant(1-|z|^2)^{-1},\ q<|z|<1,$$

$$\operatorname{Re}\Phi(qe^{i\theta})>0,\ \theta\in[0,2\pi],\ \int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\Phi(qe^{i\theta})\,d\theta=2\pi k,$$

то функция $f(z)$ *не более чем* p*-листна в кольце* $E(q,1)$, $p=k-\inf\limits_{w\notin\gamma}\operatorname{ind}_w\gamma\leqslant$ $\leqslant 2k-1$, $\sup|f(z)|\leqslant M(q;f)$. *Оценка* $p\leqslant 2k-1$ *точная.*

В пределе при $q\to 0$, $k=2$ получаем, что функция $f(z)=a_2z^2+\ldots$, аналитическая в E, будет двулистной в E, если $|zf''(z)/f'(z)|\leqslant(1-|z|^2)^{-1}$, $|z|<1$. Приведем без доказательства новые классы p-листных отображений.

Теорема 21.4 (Ф. Г. Авхадиев). *Пусть* $f(z)$ *аналитична при* $0<|z|<1$, n *— целое число,* $n\neq 0$, $\lim\limits_{z\to 0}[z^{-n}f(z)]=1$. *Функция* $f(z)$ *будет* $p=|n|$*-листной в* E, *если выполнено одно из условий*:

1°. $|zf''(z)/f'(z)-(n-1)|\leqslant|n|\,|1-|z|^{2n}|^{-1}\ \forall z\in E$;

2°. $|\{f,z\}-(1-n^2)/(2z^2)|\leqslant 2n^2|z|^{2(|n|-1)}(1-|z|^{2|n|})^{-2}\ \forall z\in E$.

В заключение обратим внимание на то, что интеграл Кристоффеля — Шварца с различными усложнениями является естественным генератором многолистных отображений. Усложненные интегралы Кристоффеля — Шварца появляются при введении дополнительных множителей типа $(z-a)(1-\bar{a}z)$, $a\in E$, под знаком интеграла. Эти множители обеспечивают наличие точек ветвления. На таких интегралах и их предельных переходах можно изучать различные классы многолистных отображений (аналоги классов выпуклых, звездных отображений и других классов) (напр., [80]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций.— УМН, 1975, т. XXX, вып. 4, с. 3—60.
2. Аксентьев Л. А. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению. Казань, 1984. 92 с.
3. Авхадиев Ф. Г. Особые случаи принципа соответствия границ.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1976, вып. 13, с. 13—23.
4. Авхадиев Ф. Г. Некоторые геометрические неравенства и достаточные условия p-листности.— Изв. вузов. Матем., 1983, № 10, с. 3—12.
5. Авхадиев Ф. Г. Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений.— Матем. заметки, 1975, т. 18, № 6, с. 793—802.
6. Mocanu P. T. Starlikeness and convexiti for nonanalytic functions in the unit disc.— Math. Rev. anal. numer. et theor. approxim. Math., 1980, v. 22 (45), № 1, p. 77—83.
7. Al-Amiri H., Mocanu P. T. Certain sufficient conditions for univalency of the class C^1.— J. Math. Anal. and Appl., 1981, v. 80, № 2, p. 387—392.
8. Al-Amiri H., Mocanu P. T. Spirallike nonanalytic functions.— Proc. Amer. Math. Soc., 1981, v. 82, № 1, p. 61—65.
9. Зиновьев П. М. Условия однолистности в канонических областях, отличных от круга, и их применение к обратным задачам.— Кандид. диссерт., Казань, 1985. 128 с.
10. Авхадиев Ф. Г., Шабалин П. Л. Об отображениях на многосвязные области, не принадлежащие классу В. И. Смирнова.— ВИНИТИ, № 2550—76 Деп., 1976.
11. Шабалин П. Л. Классы однолистности и области В. И. Смирнова.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1979, вып. 16, с. 218—226.
12. Прохоров Д. В. Комбинированные признаки однолистности аналитических в круге функций.— Изв. вузов. Матем., 1983, № 8, с. 76—77.
13. Решетников Ю. А. Достаточные условия однолистности регулярных функций в круговом кольце.— Изв. вузов. Матем., 1982, № 12, с. 73—75.
14. Аксентьев Л. А., Шабалин П. Л. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение.— Изв. вузов. Матем., 1983, № 2, с. 6—14.
15. Nehari Z. Univalence criteria depending on the Schwarzian derivative.— Ill. J. Math., 1979, v. 23, № 3, p. 345—351.
16. Schwarz B. On two univalence criteria of Nehari.— Ill. J. Math., 1983, v. 27, № 2, p. 346—351.
17. Gehring F. W., Pommerenke Ch. On the Nehari univalence criterion and quasidisks.— Comment. math. helv., 1984, v. 59, p. 226—242.

18. Singh V., Chichra P. N. An extension of Becker's criterion of univalence.— J. Indian Math. Soc., 1977, v. 41, p. 353—361.
19. Minda D. The Schwarzian derivative and univalence criteria.— Contemporary Math., 1985, v. 38, p. 43—52.
20. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. 2-е изд. М., 1966. 628 с.
21. Авхадиев Ф. Г. Об условиях однолистности аналитических функций.— Изв. вузов. Матем., 1970, № 11, с. 3—13.
22. Becker J., Pommerenke Ch. Schlichtheitskriterien und Jordangebiete — J. reine und angew. Math., 1984, Bd. 354, S. 74—94.
23. Авхадиев Ф. Г. Некоторые достаточные условия однолистности аналитических функций.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1972, вып. 9, с. 3—11.
24. Kühnau R. Zur quasikonformen Fortsetzbarkeit schlichter konformer Abbildungen.— Bull. Soc. sci. et lettres Lódz, 1974/1975, v. 26, № 6, p. 1—4.
25. Авхадиев Ф. Г. К достаточным условиям однолистности решений обратных краевых задач.— ДАН СССР, 1970, т. 190, № 3, с. 495—498.
26. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Достаточные условия однолистности аналитических функций.— ДАН СССР, 1971, т. 198, № 4, с. 743—746.
27. John F. A criterion for univalency brought up to date.— Communs Pure and Appl. Math., 1976, v. 24, № 3, p. 293—295.
28. Gevirtz J. An upper bound for the John constant.— Proc. Amer. Math. Soc., 1981, v. 83, № 3, p. 476—478.
29. Широкова Е. А. Однопараметрические семейства и их применение к обратным краевым задачам.— Кандид. диссерт. Казань, 1978. 119 с.
30. Лебедев И. А. О структурных формулах типа Базилевича.— Вест. Ленингр. ун-та. Сер. матем., механ., астр., 1981, № 19, вып. 4, с. 114—116.
31. Osgood B. Univalence criteria in multiply-connected domains.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 260, № 2, p. 459—473.
32. Gehring F. W. Univalent functions and the Schwarzian derivative.— Comment. math. helv., 1977, v. 52, № 4, p. 561—572.
33. Martio O., Sarvas J. Injectivity theorems in plane and space.— Ann. acad. sci. fenn., ser. A1, Math., 1978/1979, v. 4, № 2, p. 383—401.
34. Gehring F. W., Osgood B. G. Uniform domains and the quasihyperbolic metric.— J. Anal. math., 1979, v. 36, p. 50—74.
35. Beardon A. F., Gehring F. W. Schwarzian derivatives, the Poincaré metric and kernel function.— Comment. math. helv., 1980, v. 55, № 1, p. 50—64.
36. Lehto O. Univalent functions, Schwarzian derivatives and quasiconformal mapping.s— Monogr. Ensegn. math., 1979, № 27, p. 73—84.
37. Lehto O. Remarks on Nehari's theorem about the Schwarzian derivative and schlicht functions.— J. Anal. math., 1979, v. 36, p. 184—190.
38. Насыров С. Р., Севодин М. А. Условия однолистности типа Нехари — Покорного в α-звездообразных областях.— Изв. вузов. Матем., 1981, № 11, с. 78—80.
39. Журавлев И. В. Достаточные условия однолистности и квазиконформная продолжимость голоморфных функций.— Комплекс. методы в матем. физике. Тезисы докл. Всесоюзн. школы молодых ученых. Донецк, 1984, с. 203.
40. Журавлев И. В. Однолистные функции и пространства Тейхмюллера.— ДАН СССР, 1980, т. 250, № 5, с. 1047—1050.
41. Бусовская О. А., Горяйнов В. В. О гомеоморфном продолжении спиральных функций.— Укр. матем. журн., 1981, т. XXXIII, № 5, с. 656—660.
42. Бусовская О. А. Геометрическая характеристика подклассов однолистных функций.— Укр. матем. журн., 1985, т. XXXVII, № 5, с. 558—562.
43. Крушкаль С. Л. Дифференциальные операторы и однолистные функции.— ДАН СССР, 1985, т. 280, № 3, с. 541—544.
44. Аксентьев Л. А., Шабалин П. Л. Условия однолистности в звездных и выпуклых областях.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1983, вып. 20, с. 35—42.
45. Севодин М. А., Шабалин П. Л. Условия однолистности регулярных в круговом кольце функций.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1983, вып. 19, с. 184—192.
46. Сагитова С. Б. Исследования по обратным краевым задачам в многосвязных областях.— Кандид. диссерт. Казань, 1983, 116 с.
47. Авхадиев Ф. Г. Об однолистности отображений с заданными граничными свойствами.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1983, вып. 19, с. 3—14.
48. Зиновьев П. М., Майер Ф. Ф. Условия однолистности симметричных функций в полосе и полуплоскости и их применение.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 8, с. 61—64.
49. Митюк И. П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы. Краснодар, 1980. 90 с.; Применение симметризационных методов в геометрической теории функций. Краснодар, 1985, 95 с.
50. Полиа Г., Сегё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике, М., 1962, 336 с.
51. Аксентьев Л. А., Майер Ф. Ф. Применение методов подчиненности и симметризации к достаточным признакам однолистности аналитических функций.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1983, вып. 19, с. 14—28.
52. Майер Ф. Ф. Исследование однолистной разрешимости обратных краевых задач методами симметризации и подчиненности.— Кандид. диссерт., Казань, 1983. 129 с.
53. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization.— Acta math., 1975, v. 133, p. 139—169.

54. Кудряшов С. Н., Касымов С. Об условиях однолистности некоторых классов аналитических функций и их приложение.— ВИНИТИ, № 2458—76 Деп., 1976.
55. Касымов С. Об однолистности аналитических функций и их применение.— Изв. вузов. Матем., 1977, № 9, с. 38—42.
56. Касымов С. Классы типа Бибербаха — Эйленберга и однолистная разрешимость обратных краевых задач.— Кандид. диссерт., Ростов-на-Дону, 1981. 123 с.
57. Duren P., Shapiro M., Shields A., Singular measures and domains not of Smirnov type.— Duke Math. J., 1966, v. 33, № 2, p. 247—254.
58. Шабалин П. Л. Об однолистности общего решения внутренней обратной краевой задачи.— Изв. вузов. Матем., 1975, № 12, с. 92—95.
59. Севодин М. А., Шабалин П. Л. Об улучшении разделяющих постоянных в критерии однолистности решения одной обратной краевой задачи.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980, вып. 17, с. 167—179.
60. Севодин М. А. Метод квазиконформного продолжения и геометрические свойства общего решения обратных краевых задач.— Кандид. диссерт., Казань, 1982, 121 с.
61. Чередниченко В. Г. Однолистные функции и обратная задача потенциала.— ДАН СССР, 1982, т. 264, № 1, с. 48—51.
62. Чередниченко В. Г. Продолжение по параметру решения двумерной обратной задачи потенциала.— ДАН СССР, 1983, т. 268, № 2, с. 299—302.
63. Аксентьев Л. А., Хохлов Ю. Е., Широкова Е. А. О единственности решения внешней обратной краевой задачи.— Матем. заметки, 1978, т. 24, № 3, с. 319—330.
64. Насыров С. Р., Хохлов Ю. Е. Единственность решения внешней обратной краевой задачи в классе спиралеобразных областей.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 8, с. 24—27.
65. Хохлов Ю. Е. Свертка Адамара, гипергеометрические функции и линейные операторы в классе однолистных функций.— ДАН УССР. Сер. А, 1984, № 7, с. 25—27.
66. Пронин П. Н. Достаточные условия однолистности различных операторов и экстремальные задачи на классе ограниченных функций.— Кандид. диссерт., Ленинград, 1983. 105 с.
67. Морс М. Топологические методы теории функций комплексного переменного. М., 1951. 248 с.
68. Гахов Ф. Д., Крикунов Ю. М. Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т. 20, № 2, с. 207—240.
69. Titus C. J. The combinatorial topology of analytic functions on the boundary of a disk.— Acta math., 1961, v. 106, № 1, p. 45—64.
70. Аксентьев Л. А. Геометрические вопросы в обратных краевых задачах.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1964, вып. 1, с. 3—13.
71. Levi H. Über die Darstellung ebener Kurven mit Doppelpunkten.— Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl. II, 1981, № 4, S. 109—130.
72. Авхадиев Ф. Г., Насыров С. Р. Необходимые условия существования римановой поверхности с заданной границей.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1985, вып. 22, с. 6—15.
73. Pfaltzgraff J. A. Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in C^n.— Ann. acad. sci. fenn., ser. A1, 1975, № 1, p. 13—25.
74. Тихонов А. П. Достаточные признаки однолистности отображений односвязных областей и их приложения.— Кандид. диссерт., Ростов-на-Дону, 1982. 108 с.
75. Montel P. Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes. Paris, Gauthier-Villars, 1933.
76. Biernacki M. Les fonctions multivalentes. Paris, Ganthier-Villars, 1938. 66 p.
77. Аксентьев Л. А. Однолистное изменение многоугольных областей.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1976, вып. 13, с. 30—39.
78. Аксентьев Л. А. Достаточные условия многолистности интегральных представлений.— Тр. семин. по краев. задачам. Казань, 1980, вып. 17, с. 3—17.
79. Авхадиев Ф. Г. Классы не более чем p-листных отображений в кольце.— В сб.: Вопр. теории специальн. классов функций. Ставрополь, 1984, с. 3—16.
80. Goodman A. W. On the Schwarz — Christoffel transformation and p-valent functions.— Trans. Amer., Math. Soc., 1950, v. 68, № 2, p. 204—223.
81. Lewandowski Z. Some remarks on univalence criteria.— Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, ser. A, Math., 1982/1983, v. 36/37, p. 87—95.
82. Pfaltzgraff J. A. Quasiconformal extension of holomorphic mappings of a ball in C^n.— Bull. Amer. Math. Soc., 1974, v. 80, p. 543—544.
83. Хохлов Ю. Е. О разрешимости внешних обратных краевых задач для аналитических функций.— ДАН СССР, 1984, т. 278, № 2, с. 298—301.
84. Gehring F. W. Characteristic properties of quasidisks.— Séminaire de Math. Sup., Université de Montréal, 1982.

г. Казань

Поступила
16. 01. 1986