M. V. Budrevich, Arithmetic matrix operations that preserve conversion, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2013, Volume 419, 26–42

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 419, 2013 г.

М. В. Будревич

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАЦИИ, СОХРАНЯЮЩИЕ КОНВЕРТАЦИЮ

§1. Введение

В работе рассматривается сохранение свойства конвертируемости перманента в определитель для различных множеств матриц при выполнении матричных операций. Напомним, что перманент и определитель квадратной матрицы A порядка n – это функции

$$\mathrm{per}\,(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}, \quad \det\,(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}\,(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)},$$

где S_n – группа перестановок порядка n, $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$ – знак перестановки σ. Следующее определение является ключевым в настоящей работе.

Определения 1.1. *Матрица A называется знаково конвертируемой или просто конвертируемой, если существует матрица $X \in M_n(\pm 1)$ такая, что* $\mathrm{per}\,(A) = \det\,(A \circ X)$*, где "$\circ$" – операция поэлементного (адамарова) умножения матриц.*

Функция перманента широко используется в комбинаторике и теории графов (подробнее см. [11]). В отличие от определителя, который может быть посчитан за полиномиальное время, например, алгоритмом Гаусса, для перманента неизвестно быстрых алгоритмов его вычисления. Одним из минимальных по времени работы из известных алгоритмов вычисления перманента является алгоритм Райзера (см. [11, глава 7, пункт 2]), имеющий экспоненциальную сложность. Более того, даже нахождение перманента (0,1)-матрицы является сложной вычислительной задачей. А именно, Валиант [14] показал, что вычисление перманента (0,1)-матрицы является $\#$-P сложной задачей. Именно высокая сложность вычисления перманента и его формальная схожесть

Ключевые слова: перманент, определитель, конвертация матриц, знаково-невырожденные матрицы, пфаффианова ориентация двудольного графа.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов МД-2502.2012.1 и РФФИ 12-01-00140а.

с определителем обуславливают интенсивные исследования конвертируемости перманента в определитель.

Этот вопрос впервые был рассмотрен в работе Полиа [12]. Различные вопросы конвертации перманента в определитель (и других имманантов друг в друга) рассматривались в работах [2, 3, 6, 8, 10] (см. также приведенные в этих работах ссылки). В настоящее время наиболее хорошо изучен вопрос о конвертируемости (0,1)-матриц (см., например, [1,4,5,7,9]). Интерес к (0,1)-матрицам обусловлен тем, что они являются матрицами смежности двудольных графов.

Так же, вопрос о конвертируемости неотрицательной матрицы эквивалентен вопросу о ее знаковой невырожденности [1]. В частности, конвертируемость неотрицательной матрицы эквивалентна конвертируемости (0,1)-матрицы, где каждый ненулевой элемент заменен единицей.

Введем теперь несколько необходимых обозначений. Через $\nu(A)$ будем обозначать число ненулевых элементов в матрице A. Пусть α и β – два набора различных индексов от 1 до n. Через $A(\alpha|\beta)$ будем обозначать матрицу, полученную вычеркиванием из A строк с номерами из α и столбцов с номерами из β. Через $A[\alpha|\beta]$ будем обозначать дополнительную к $A(\alpha|\beta)$ матрицу. Через I_n будем обозначать единичную матрицу порядка n. Через J_n будем обозначать матрицу порядка n, заполненную единичными элементами.

Одним из основополагающих результатов теории конвертации матриц является следующая теорема Гибсона [7].

Теорема 1.2 (Гибсон, [7, с. 474]). *Пусть $A \in M_n(0,1)$ – конвертируемая матрица и* per $(A) > 0$. *Тогда $\nu(A) \leqslant \frac{n^2+3n-2}{2} = \Omega_n$, и равенство справедливо тогда и только тогда, когда существуют матрицы перестановок $P, Q \in M_n$ такие, что*

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = G_n.$$

Матрица G_n называется матрицей Гибсона порядка n.

Перманенты (0,1)-матриц тесно связаны с теорией графов. Напомним несколько определений, чтобы сформулировать результаты о характеризации конвертируемых $(0,1)$-матриц. Терминология приведена согласно работе [13].

Под графом подразумевается простой неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать число вершин и ребер в графе G. Подмножество M ребер графа G называется паросочетанием, если каждая вершина графа инцидентна не более чем одному ребру из M. Если каждая вершина графа G инцидентна строго одному ребру из M, то паросочетание называется полным. Подграф H в G называется центральным, если $G \setminus V(H)$ обладает полным паросочетанием.

Пусть задана ориентация D графа G и цикл C четной длины в графе G. Будем говорить, что C нечетно ориентирован в ориентации D, если в C содержится нечетное число ребер, ориентированных в каждую сторону прохода цикла. То есть, при проходе цикла по часовой и против часовой стрелки число проходимых в попутном направлении дуг нечетно, где дуга – это ориентированное ребро графа. D называется пфаффиановой ориентацией графа G, если каждый центральный цикл C четной длины в D нечетно ориентирован.

Граф G называется двудольным, если множество его вершин V можно разделить на два подмножества V_1 и V_2 такие, что никакие две вершины из одного подмножества не инцидентны одному ребру. Множества V_1 и V_2 называются долями графа G. Очевидно, что каждой $(0,1)$-матрице $A = (a_{ij})$ можно поставить в соответствие двудольный граф, где $V_1 = \{1,\dots,n\}$, $V_2 = \{1,\dots,n\}$, т.е. $n \times n$-матрице соответствует граф с $2n$ вершинами, и i-тая вершина из V_1 соединена с j-той вершиной из V_2 тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 1$. Построенный граф называется двудольным графом, ассоциированным с матрицей A. Через $K_{m,n}$ будем обозначать полный двудольных граф с m и n вершинами в каждой из долей.

Обобщенной диагональю матрицы A порядка n, соответствующей $\sigma \in S_n$, называется множество элементов $a_{1,\sigma(1)},\dots,a_{n,\sigma(n)}$. Очевидно, что если A – ассоциированная с двудольным графом G матрица, то каждому полному паросочетанию двудольного графа G соответствует обобщенная диагональ матрицы A без нулевых элементов.

Вазирани и Янакакис в [15] связали конвертируемость $(0,1)$-матриц с существованием пфаффиановой ориентации ассоциированного с матрицей двудольного графа.

Теорема 1.3 (Вазирани, Янакакис [15, теорема 5.1, с. 188]). *Пусть $A \in M_n(0,1)$ и G – ассоциированный с ней двудольный граф. Тогда матрица A конвертируема в том и только том случае, когда существует пфаффианова ориентация графа G.*

Следующий важный результат получен Литтлом [9] и дает наглядное описание графов, допускающих пфаффианову ориентацию и, как следствие, конвертируемость ассоциированной с графом матрицы.

Теорема 1.4 (Литтл [9, следствие 1, с. 205]). *Двудольный граф допускает пфаффианову ориентацию тогда и только тогда, когда в нем не содержится подграф $K_{3,3}$.*

Так как быстрого способа выделения подграфа $K_{3,3}$ неизвестно, последняя теорема не дает способов быстрой проверки конвертируемости матрицы. Данный пробел был заполнен в работе Робертсона, Сеймора и Томаса [13]. Чтобы сформулировать их основной результат, дадим еще несколько определений.

Пусть дан граф G_0, C – центральный цикл G_0 длины 4, G_1 и G_2 – подграфы G_0, удовлетворяющие следующим требованиям:

(1) $G_1 \cup G_2 = G_0$;
(2) $G_1 \cap G_2 = C$;
(3) $G_1 \setminus G_2 \neq \varnothing$;
(4) $G_2 \setminus G_1 \neq \varnothing$.

Пусть граф G получен из G_0 удалением нескольких ребер, или даже нулевого их количества, входящих в C. Будем называть граф G 4-суммой графов G_1 и G_2.

Через H_G обозначим граф, ассоциированный с матрицей инцидентности плоскости Фано:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Граф G будем называть k-расширяемым, где $k \geqslant 0$, если любое паросочетание из k ребер можно дополнить до полного паросочетания.

В [13] доказано, что проблема поиска пфаффиановой ориентации может быть сведена к изучению 2-расширяемых графов и имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5 (Робертсон, Сеймор, Томас [13, теорема 1.3]). *2-расширяемый двудольный граф допускает пфаффианову ориентацию тогда и только тогда, когда он изоморфен графу H_G или может быть получен из планарных 2-расширяемых двудольных графов последовательным применением 4-сумм.*

Напомним, что граф называется планарным, если он может быть уложен на плоскость без пересечений его ребер. Последняя теорема дает возможность построения полиномиальных по скорости алгоритмов проверки конвертируемости (0,1)-матрицы.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется одно из следствий последней теоремы.

Теорема 1.6 (Робертсон, Сеймор, Томас [13, теорема 7.3]). *Каждый 2-расширяемый граф с $n \geqslant 3$ вершинами и более чем $2n-4$ ребрами содержит подграф $K_{3,3}$ и, как следствие, не имеет пфаффиановой ориентации.*

Большинство представленных результатов не дают способов проверки существования пфаффиановой ориентации графов, а также способов построения больших графов, для которых существует пфаффианова ориентация, из графов с меньшим числом вершин. В данной работе исследуется эквивалентная задача о построении конвертируемых матриц с помощью известных арифметических матричных операций.

Настоящая статья построена следующим образом. В §2 рассматривается вопрос о сохранении конвертируемости для адамарова произведения матриц. В §3 приведены примеры для стандартных операций сложения и умножения матриц, показывающие, что конвертируемость матриц, вообще говоря, не сохраняется. В §4 рассматривается аналогичный вопрос для кронекерова произведения матриц.

§2. Адамарово произведение

Фактически из определения адамарова произведение вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Пусть $A, B \in M_n(0,1)$ и как минимум одна из матриц конвертируема с помощью матрицы $X \in M_n(\pm 1)$. Тогда матрица $A \circ B$ конвертируема с помощью матрицы X.*

Для полноты изложения приведем доказательство этого простого факта.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{per}(A) = \det(A \circ X)$. В перманенте неотрицательной матрицы все слагаемые неотрицательны, а значит, все слагаемые неотрицательны в выражении $\det(A \circ X)$, и для любой $\sigma \in S_n$ имеет место равенство

$$a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \operatorname{sgn}(\sigma) x_{1\sigma(n)} a_{1\sigma(1)} \dots x_{n\sigma(n)} a_{n\sigma(n)}. \tag{2}$$

Равенство (2) умножим с двух сторон на соответствующий множитель $b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)}$ и просуммируем по всем перестановкам. Получим $\operatorname{per}(A \circ B) = \det(A \circ B \circ X)$, что и требовалось доказать. $\square$

Пример 2.2. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, а именно, если $A \circ B \in M_n(0,1)$ – конвертируемая матрица, то матрицы $A, B \in M_n(0,1)$ могут быть неконвертируемыми. Например,

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

Матрица C конвертируема с помощью матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B неконвертируемы, так как $\nu(A) = \nu(B) = 13 = \Omega_4$, а матрицы не являются перестановочно эквивалентными матрице Гибсона.

Имеет место очевидное следствие из утверждения 2.1.

Следствие 2.3. *Утверждение* 2.1 *выполнено для неотрицательных матриц.*

Однако для матриц из $M_n(\mathbb{R})$ утверждение 2.1 уже не выполнено.

Пример 2.4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\operatorname{per}(A) = 6$. Матрица A, очевидно, конвертируема:

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 6.$$

Но матрица

$$A \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

неконвертируема. Действительно, если бы матрица $A \circ A$ была конвертируемой, то конвертируемой была бы и матрица J_3, что неверно.

§3. Сложение и умножение матриц

Так как из $A, B \in M_n(0,1)$ не следует, что AB и $A + B$ являются (0,1)-матрицами, то удобнее говорить о неотрицательных матрицах. Достаточно простые примеры показывают, что в общем случае ни произведение, ни сумма конвертируемых матриц, вообще говоря, не являются конвертируемыми матрицами.

Пример 3.1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

конвертируема:

$$\operatorname{per} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

неконвертируема, так как ее конвертируемость эквивалентна конвертируемости матрицы J_3.

Пример 3.2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B конвертируемы, а матрица $J_3 = A + B$ неконвертируема.

Далее будем пользоваться несколькими дополнительными определениями.

Согласно [1] (0,1)-матрица называется матрицей без свободных элементов (matrix with total support), если для каждого ненулевого элемента существует обобщенная диагональ без нулевых элементов, в которую он входит. Максимальной конвертируемой матрицей называется вполне неразложимая конвертируемая (0,1)-матрица без свободных элементов, замена любого нуля которой на единицу дает неконвертируемую матрицу.

Будем говорить, что для квадратных матриц одного размера выполнено неравенство $A \leqslant B$, если $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ для любых возможных значений индексов.

Кроме того, через $\phi(A)$ обозначим неотрицательную матрицу, ненулевые элементы которой заменены на единичные. Так как для любой неотрицательной матрицы конвертируемость эквивалентна конвертируемости $\phi(A)$, то, очевидно, выполнено следующее тривиальное утверждение.

Утверждение 3.3. *Пусть A, B – неотрицательные матрицы и A – максимальная конвертируемая матрица. Тогда матрица $A + B$ конвертируема в том и только в том случае, когда $\phi(B) \leqslant \phi(A)$.*

В случае произведения матриц ситуация оказывается несколько сложнее. А именно, если одна из матриц – максимальная конвертируемая матрица, то произведение матриц конвертируемо лишь в редких случаях.

Лемма 3.4. *Пусть* $A \in M_n(0,1)$ *– квадратная матрица и* $\alpha = (i_1, \dots, i_k)$, $\beta = (j_1, \cdots, j_k)$, *где* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ *и* $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$, *– два набора различных индексов, для которых верны следующие утверждения:*

(1) $A(\alpha|\beta)$ *неконвертируемая матрица;*
(2) $\mathrm{per}\,(A[\alpha|\beta]) > 0$.

Тогда матрица A *неконвертируема.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно и матрица A конвертируема.

В $\mathrm{per}\,(A(\alpha|\beta))$ все слагаемые неотрицательные, а в $\det\,((A \circ X)(\alpha|\beta))$ некоторые слагаемые могут быть отрицательными. Следовательно, выполнено неравенство

$$\mathrm{per}\,(A(\alpha|\beta)) \geqslant \det\,((A \circ X)(\alpha|\beta)). \tag{3}$$

В формуле (3) равенство невозможно, так как матрица $A(\alpha|\beta)$ неконвертируема, а значит, верно соотношение

$$\mathrm{per}\,(A(\alpha|\beta)) > \det\,((A \circ X)(\alpha|\beta)). \tag{4}$$

Аналогичное (3) неравенство выполнено и для подматрицы $A[\alpha|\beta]$:

$$\mathrm{per}\,(A[\alpha|\beta]) \geqslant \det\,((A \circ X)[\alpha|\beta]). \tag{5}$$

Выберем все слагаемые из $\det\,(A \circ X)$, которые входят в выражение

$$\det\,((A \circ X)(\alpha|\beta))\det\,((A \circ X)[\alpha|\beta]).$$

В силу конвертируемости матрицы A имеет место равенство

$$\mathrm{per}\,(A(\alpha|\beta))\mathrm{per}\,(A[\alpha|\beta]) = \det\,((A \circ X)(\alpha|\beta))\det\,((A \circ X)[\alpha|\beta]). \tag{6}$$

С другой стороны, перемножая (4) и (5), получаем:

$$\mathrm{per}\,(A(\alpha|\beta))\mathrm{per}\,(A[\alpha|\beta]) > \det\,((A \circ X)(\alpha|\beta))\det\,((A \circ X)[\alpha|\beta]). \tag{7}$$

Последнее неравенство верно, так как в силу конвертируемости матрицы A все слагаемые в левой и правой частях неравенств (4) и (5) неотрицательные.

Выражения (6) и (7) противоречивы, а значит, матрица A неконвертируема. $\square$

Обозначим через $Q_{m,n}$ матрицу порядка n следующего вида:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 2 \leqslant j = i + 1 \leqslant m, \\ 1, & \text{если} \quad i = m, \quad j = 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{8}$$

Лемма 3.5. *Пусть A, B – неотрицательные матрицы, где A – максимальная конвертируемая матрица, а $\phi(B) \geqslant (Q_{m,n} + I_n), m \geqslant 3$. Тогда матрицы BA и AB неконвертируемы.*

Доказательство. Начнем со случая произведения BA. Доказательство леммы проведем от противного. Предположим, что матрица BA конвертируема.

Замена некоторых внедиагональных ненулевых элементов матрицы B на нулевые может только уменьшить число ненулевых элементов в произведении BA, а значит, существует матрица $X \in M_n(0,1)$ такая, что $\phi(X \circ (BA)) = \phi((Q_{m,n} + I_n)A)$. По утверждению 2.1 матрица $(Q_{m,n} + I_n)A$ конвертируема.

Раскрывая скобки, получаем $(Q_{m,n} + I_n)A = A + A'$, где A' получена из A циклической перестановкой первых m строк с помощью перестановки $\sigma = (1, \ldots, m)$ и заменой всех остальных строк нулевыми. Таким образом, выполнено неравенство

$$\phi((Q_{m,n} + I_n)A) \geqslant \phi(A). \tag{9}$$

Так как A – максимальная конвертируемая матрица, и, по сделанному предположению, матрица $(Q_{m,n} + I_n)A$ тоже конвертируема, то в (9) имеет место строгое равенство. Тогда, поскольку первые m строк матрицы A получены циклической перестановкой, заключаем, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\phi(a_1) \leqslant \phi(a_2) \leqslant \ldots \leqslant \phi(a_m) \leqslant \phi(a_1); \tag{10}$$

здесь $a_1, \ldots, a_m$ – первые m векторов строк матрицы A.

Следовательно, формула (10) на самом деле является цепочкой равенств.

Таким образом, первые m строк можно разбить на две подматрицы. Первая из этих подматриц $A[1, \ldots, m | i_1, \ldots, i_k]$ не содержит нулевых элементов. Вторая подматрица $A[1, \ldots, m | j_1, \ldots, j_{n-k}]$, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \cup \{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ и $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \varnothing$, нулевая.

В матрице существует обобщенная диагональ $a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{n,\sigma(n)}$ из ненулевых элементов. В силу общего вида матрицы, подматрица

$A[1,\ldots,m|\sigma(1),\ldots,\sigma(m)]$ не содержит нулевых элементов, а значит, неконвертируема, так как $m \geqslant 3$. Кроме того, в силу существования указанной обобщенной диагонали имеет место неравенство $\mathrm{per}\ (A(1,\ldots,m|\sigma(1),\ldots,\sigma(m))) > 0$. Тогда по лемме 3.4 матрица A неконвертируема, что противоречит условию настоящей леммы, а значит, сделанное предположение о конвертируемости матрицы BA неверно.

Для доказательства леммы для произведения AB достаточно заменить перестановку строк на перестановку столбцов. □

Следствие 3.6. *Пусть A, B – неотрицательные матрицы, где A – максимальная конвертируемая матрица, и пусть существуют матрицы перестановок P, Q такие, что $\phi(B) \geqslant P(Q_{m,n}+I_n)Q$, $m \geqslant 3$. Тогда матрицы BA и AB неконвертируемы.*

Замечание 3.7.

1. Условие $m \geqslant 3$ существенно. В случае $m = 2$ имеем

$$\phi(G_n^t(Q_{2,n}+I_n)) = \phi(G_n^t) = G_n^t.$$

В силу теоремы Гибсона G_n является максимальной конвертируемой матрицей, а произведение конвертируемо в силу конвертируемости матрицы Гибсона.

2. Условие $\phi(B) \geqslant (Q_{m,n}+I_n)$, $m \geqslant 3$, нельзя заменить более слабым требованием существования двух обобщенных диагоналей, пересекающихся по не более чем $n-3$ элементам. Действительно, рассмотрим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A конвертируема:

$$\mathrm{per}\ (A) = 8 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

а в матрице B существуют две обобщенные ненулевые диагонали, не имеющие общих элементов. При этом BA – конвертируемая матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица BA конвертируема, так как $\phi(BA) = A$, а матрица A конвертируема.

3. Из сохранения конвертируемости при умножении в одном порядке не следует сохранение конвертируемости при умножении в другом порядке. А именно:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Конвертируемость матрицы AB равносильна конвертируемости матрицы J_4.

§4. Кронекерово произведение

Перейдем к рассмотрению кронекерова произведения матриц. Напомним, что кронекеровым произведением матриц $A \otimes B$ называется матрица следующего вида:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Оказывается, что кронекерово произведение (0,1)-матриц позволяет построить неконвертируемую матрицу достаточно редко. А именно, кронекерово произведение двух неотрицательных матриц с ненулевым перманентом конвертируемо тогда и только тогда, когда одна из матриц перестановочно эквивалентна верхнетреугольной матрице, а вторая матрица конвертируема. Для доказательства данного факта потребуются приводимые ниже вспомогательные утверждения.

Лемма 4.1. *Матрицы $A \otimes B$ и $B \otimes A$ перестановочно эквивалентны.*

Доказательство напрямую следует из определения кронекерова произведения.

Лемма 4.2. *Матрица $A \in M_n(0,1)$ содержит единственную обобщенную диагональ без нулевых элементов тогда и только тогда, когда перестановкой строк и столбцов она может быть приведена к верхнетреугольному виду без нулевых элементов на главной диагонали.*

Доказательство. Если матрица перестановкой строк и столбцов может быть приведена к верхнетреугольному виду без нулевых элементов на главной диагонали, то, очевидно, она содержит единственную обобщенную диагональ без нулевых элементов.

Докажем обратное. Без ограничения общности можно считать, что $a_{ii} = 1$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $a_{ij} \neq 0$, $i \neq j$. Если такого элемента нет, то матрица диагональная, и все доказано. Так как в матрице A существует единственная обобщенная диагональ, то перманент $A(i|j)$ равен нулю. По теореме Фробениуса–Кенега [11, теорема 2.1] это означает, что в $A(i|j)$ есть нулевая $k \times l$ подматрица, где $k + l \geqslant n$. А значит, исходная матрица A с помощью перестановки строк и столбцов может быть представлена в блочно-верхне-треугольном виде с размерами блоков k и l соответственно. Далее, повторяем рассуждения для каждого диагонального блока, размер которого больше единицы. На каждом шаге число диагональных блоков увеличивается как минимум на один, а значит, процесс оборвется не более чем через $n-1$ шаг, и матрица будет верхнетреугольной. $\square$

Лемма 4.3. *Пусть $A = (I_n + Q_{n,n}) \in M_n(0,1)$ и $B = (I_m + Q_{m,m}) \in M_m(0,1)$, где $m, n > 1$, а матрицы $Q_{m,m}$ и $Q_{n,n}$ определены выражением (8). Тогда матрица $C = A \otimes B$ неконвертируема.*

Доказательство. По теореме 1.3 для доказательства неконвертируемости матрицы C достаточно доказать невозможность построения пфаффиановой ориентации ассоциированного с матрицей C графа G. Согласно теореме 1.4 достаточно указать подграф $K_{3,3}$, содержащийся в графе G.

Матрица C порядка mn в каждой строке содержит ровно по 4 ненулевых элемента, так как в каждой строке матриц A и B имеется по 2 ненулевых элемента. Значит, количество ребер в графе G равняется $4mn$. Количество вершин в ассоциированном двудольном графе равняется удвоенному порядку матрицы – $2mn$. Для доказательства леммы воспользуемся теоремой 1.6. Так как при $m, n > 1$ имеем $4mn > 2mn - 4$, то выполнено условие теоремы 1.6 на соотношение числа вершин и ребер графа. Остается доказать, что граф G будет 2-расширяемым.

Предположим противное, т.е. пусть граф G не является 2-расширяемым. Это означает, что можно выбрать какие-то два несмежных ребра из G таким образом, что полученный из G удалением выбранных ребер и всех смежных с ними вершин и ребер граф G_0 не будет содержать полного паросочетания. С точки зрения матриц это означает, что существуют два ненулевых элемента c_{ij}, c_{kl}, лежащих в разных столбцах и строках, таких, что per $(C(ik|jl)) = 0$. По теореме Фробениуса–Кенега в матрице $C(ik|jl)$, а значит, и в матрице C имеется подматрица размера $l \times k$, где $l + k \geqslant mn - 1$, состоящая из нулевых элементов.

Пусть указанная нулевая подматрица расположена на пересечении строк с номерами $i_1, \ldots, i_l$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$. В силу построения матрицы A имеют место следующие утверждения:

(1) Так как по построению матрицы C ее главная диагональ заполнена единичными элементами, то среди столбцов не могут быть столбцы с номерами $i_1, \ldots, i_l$.
(2) Так как по построению матрицы C ее обобщенная диагональ, соответствующая перестановке $\sigma = (1, \ldots, mn)$, заполнена ненулевыми элементами, то среди столбцов, входящих в нулевую подматрицу, не могут быть столбцы с номерами $i_1+1, \ldots, i_l+1$.
(3) В каждой строке и в каждом столбце матрицы C в точности 4 ненулевых элемента, а значит, $l \leqslant mn - 4$ и $k \leqslant mn - 4$.

a) Если среди чисел $i_1, \ldots, i_l$ не все числа идут подряд, то в силу пункта 3 среди чисел $i_1, \ldots, i_l, i_1 + 1, \ldots, i_l + 1$ имеется как минимум $l+2$ различных. Это означает, что в матрице C не менее $k+l+2 > mn$ столбцов, что неверно, а значит граф G 2-расширяем и, по теореме 1.6, для него не существует пфаффиановой ориентации, и матрица C неконвертируема.

b) Пусть числа $i_1, \ldots, i_l$ идут подряд. В силу неравенств $k \leqslant mn-4$ и $k + l \geqslant mn - 1$ получаем, что $l \geqslant 3$. По построению матрицы C

элементы $c_{i_1,i_1+m},\dots,c_{i_l,i_l+m}$ ненулевые, а значит, столбцы с номерами $i_1+m,\dots,i_l+m$ не могут входить в нулевую подматрицу. Таким образом, выполнены утверждения:

(1) $3 \leqslant l \leqslant mn-4$.
(2) Столбцы с идущими подряд номерами $i_1,\dots,i_l$ не могут входить в нулевую подматрицу.
(3) Столбцы с идущими подряд номерами $i_1+m,\dots,i_l+m$ не могут входить в нулевую подматрицу.

Из этого следует, что среди перечисленных столбцов не менее $l+2$ различных, а значит, всего столбцов в матрице не менее $k+l+2 \geqslant mn+1$, что неверно. Таким образом, граф G – 2-расширяемый, и, по теореме 1.6, для него не существует пфаффиановой ориентации, и матрица C неконвертируема. □

Перейдем к доказательству основного результата этой части.

Теорема 4.4. *Кронекерово произведение матриц $A \in M_n(0,1)$ и $B \in M_m(0,1)$, перманент которых отличен от нуля, конвертируемо тогда и только тогда, когда одна из матриц содержит единственную обобщенную диагональ без нулевых элементов, а вторая матрица конвертируема.*

Доказательство. По лемме 4.1 матрицы $A\otimes B$ и $B\otimes A$ перестановочно эквивалентны, а значит, матрица $A\otimes B$ конвертируема тогда и только тогда, когда конвертируема матрица $B\otimes A$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай конвертируемости матрицы $A\otimes B$, где матрица A содержит единственную обобщенную диагональ без нулевых элементов, а матрица B конвертируемая.

Перестановка строк и столбцов в матрице A приводит к перестановке блоков в матрице $A\otimes B$, а значит, сохраняет конвертируемость. Таким образом, по лемме 4.2 матрицу A можно заменить на верхнетреугольную. Кронекерово произведение матриц $A\otimes B$ будет блочно-верхне-треугольной матрицей, где все диагональные блоки равны матрице B. Так как матрица B конвертируема, то и матрица $A\otimes B$ конвертируема.

Перейдем к доказательству прямого утверждения. Предположим противное. Пусть теперь в каждой из матриц A и B существует не менее двух обобщенных диагоналей без нулевых элементов и матрица $A\otimes B$ конвертируема. Пусть в матрице A выбранные обобщенные диагонали пересекаются по $n-l$ элементам. Так как $n-1$ элемент однозначно определяет всю обобщенную диагональ, то $l \geqslant 2$.

Перестановка строк и столбцов матрицы A сохраняет конвертируемость, а значит, с помощью этих преобразований ее можно привести к виду:

(1) На главной диагонали расположены ненулевые элементы.
(2) Элементы $a_{i,i+1} = 1$ для $i = 1, \ldots, l-1$ и $a_{l,1} = 1$.

Полученную матрицу обозначим A'.

Матрица $A' \otimes B$ конвертируема тогда и только тогда, когда конвертируема матрица $B \otimes A'$. Пусть в матрице B две обобщенные диагонали без нулевых элементов пересекаются по $n-k$, где $k \geqslant 2$, элементам. Перестановкой строк и столбцов матрицу B можно привести к матрице B', которая удовлетворяет следующим требованиям:

(1) На главной диагонали расположены ненулевые элементы.
(2) Элементы $b_{i,i+1} = 1$ для $i = 1, \ldots, k-1$ и $a_{k,1} = 1$.

При этом матрица $B' \otimes A'$ конвертируема тогда и только тогда, когда конвертируема матрица $B \otimes A'$.

В матрицах A' и B' все элементы, не входящие в выбранные обобщенные диагонали, заменим нулевыми и обозначим матрицы A'' и B'' соответственно. Очевидно, что при этом выполнено неравенство

$$\phi(B' \otimes A') \geqslant \phi(B'' \otimes A''). \qquad (11)$$

Неравенство (11) означает, что существует матрица $X \in M_{mn}(0,1)$ такая, что $B'' \otimes A'' = (B' \otimes A') \circ X$. Так как по сделанному предположению матрица $B' \otimes A'$ конвертируема, то по утверждению 2.1 матрица $B'' \otimes A''$ конвертируема. Последнее противоречит лемме 4.3, а значит, исходная матрица $A \otimes B$ неконвертируема, и теорема полностью доказана. $\square$

Следствие 4.5. *Теорема* 4.4 *верна для матриц из* $M_n(\mathbb{R}_+)$.

Следствие 4.6. *Кронекерово произведение матриц* $A, B \in M_n(\mathbb{R}_+)$, *перманент которых отличен от нуля, конвертируемо тогда и только тогда, когда одна из матриц перестановочно эквивалентна верхнетреугольной, а вторая матрица конвертируема.*

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. Э. Гутерману за постановку задачи, активное участие в обсуждении полученных результатов и помощь в подготовке настоящей работы.

Литература

1. R. A. Brualdi, B. L. Shader, *On Sing-nonsigular matrices and the conversion of the permanent into the determinant.* — DIMACS Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **4** (1991), 117–134.
2. M. V. Budrevich, A. E. Guterman, *Permanent has less zeros than determinant over finite fields.* — Amer. Math. Soc., Contemp. Math. **579** (2012), 33–42.
3. M. P. Coelho, M. A. Duffner, *Immanant preserving and immanant converting maps.* — Linear Algebra Appl. **418**, No. 1 (2006), 177–187.
4. А. Гутерман, Г. Долинар, Б. Кузьма, *Проблема Полиа о конвертируемости для симметрических матриц.* — Мат. заметки **92**, No. 5 (2012), 684–698.
5. А. Гутерман, Г. Долинар, Б. Кузьма, *Барьеры Гибсона для проблемы Полиа.* — Фундам. прикл. матем. **16**, вып. 8 (2010), 73–86.
6. J. von zur Gathen, *Permanent and determinant.* — Linear Algebra Appl. **96** (1987), 87–100.
7. P. M. Gibson, *Conversion of the permanent into the determinant.* — Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 471–476.
8. Б. Кузьма, *Об отображениях, сохраняющих иммананты.* — Фундам. прикл. матем. **13**, вып. 4 (2007), 113–120.
9. C. H. C. Little, *A characterization of convertible* $(0;1)$*-matrices.* — J. Combin. Theory Ser. B **18** (1975), 187–208.
10. M. Marcus, H. Minc, *On the relation between the determinant and the permanent.* — Illinois J. Math. **5** (1961), 376–381.
11. Х. Минк, *Перманенты.* Мир, М., 1982.
12. G. Polya, *Aufgabe* 424. — Arch. Math. Phys. **20**, No. 3 (1913), 271.
13. N. Robertson, P. D. Seymour, R. Thomas, *Permanents, Pfaffian orientations, and even directed circuits.* — Anals Math. **150** (1999), 929–975.
14. L. G. Valiant, *The complexity of computing the permanent.* — Theor. Comput. Sci. **8** (1979), 189–201.
15. V. V. Vazirani, M. Yannakakis, *Pfaffian orientations,* $0-1$ *permanents, and even cycles in directed graphs.* — Discrete Appl. Math. **25** (1989), 179–190.

Budrevich M. V. Arithmetic matrix operations that preserve conversion.

The behavior of the conversion property under matrix arithmetic operations is investigated.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова ГСП-1,
Ленинские горы, 119991 Москва, Россия
E-mail: MBudrevich@yandex.ru

Поступило 7 ноября 2013 г.