УДК 9.653

ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В. С. Королюк, С. М. Броди, А. Ф. Турбин

Глава I

ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

ВВЕДЕНИЕ

Теория полумарковских процессов, имеющая немногим более чем пятнадцатилетнюю историю, является одним из интенсивно развиваемых направлений в теории случайных процессов. Это связано, во-первых, с тем, что полумарковские процессы являются естественным и важным обобщением цепей и процессов Маркова, и, во-вторых, с тем, что полумарковские процессы позволяют естественным образом моделировать реальные системы массового обслуживания, резервированные системы, стохастические автоматы и многие другие.

В настоящем обзоре отражены работы по полумарковским процессам и их применениям, результаты которых стали общеупотребительными за период 1954—1971 гг. В обзор включены также некоторые статьи, опубликованные в 1972 г., в которых, по мнению авторов, завершается определенный круг исследований и которые были доступны авторам настоящего обзора.

Из опубликованных ранее обзоров и работ монографического характера укажем на работы Цинлара [141], группы бельгийских и французских математиков [132], а также Штёрмера [233] и Д. С. Сильвестрова [99].

Авторы отдают себе полный отчет в том, что некоторые исследования по полумарковским процессам либо совсем не отмечены в обзоре, либо отмечены весьма конспективно, но они считают, что все эти результаты должны стать предметом дальнейших обзоров, появление которых поможет как систематизации уже полученных результатов, так и стимулированию новых исследований.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Понятие полумарковского процесса (ПМП) является естественным обобщением цепей Маркова и марковских процессов.

Известно, что однородная регулярная цепь Маркова с дискретным множеством состояний $E=\{0, 1, 2, \ldots\}$ задается производящей матрицей $Q=\{q_{ij}, i, j \in E\}$, в которой

$$q_{ii} = -q_i = -\sum_{\substack{j \in E \\ i \neq j}} q_{ij}.$$

Эволюция цепи Маркова происходит следующим образом; в i-м состоянии система находится случайное время θ_i, распределенное по показательному закону с параметром q_i, а затем переходит в j-ое состояние с вероятностью $p_{ij}= =q_{ij}/q_i$, $i, j \in E$. В 1954—1955 гг. независимо и почти одновременно Леви [194], Смит [227], Такач [235] предложили рассматривать стохастические системы, эволюционирующие аналогично цепям Маркова, в которых, однако время пребывания в i-м состоянии θ_i имеет произвольные функции распределения $P_i(x)$.

Такие системы получили название полумарковских.

Строгие определения ПМП с различной степенью общности содержатся в работах Смита [227], Леви [194], Пайка [215], Пайка и Шауфеля [217], Цинлара [140] и др.

Пусть E — некоторое конечное или счетное подмножество множества целых неотрицательных чисел.

Определение 1.1. Полумарковской матрицей назовем матричнозначную функцию $Q(x)=\{Q_{ij}(x), i, j \in E\}$, удовлетворяющую условиям:

1) $Q_{ij}(x) \equiv 0$, $x < 0$, $i, j \in E$;

2) $Q_{ij}(x)$ — неубывающие измеримые функции;

3) $\sum\limits_{j \in E} Q_{ij}(\infty) \leqslant 1$, $i \in E$.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ — вероятностное пространство, на котором определены следующие величины:

а) $L(\omega)$, принимающая значения из $\{1, 2, \ldots, \infty\}$;

б) $\xi_n(\omega)$, определенные для $0 \leqslant n < L(\omega)$ и принимающие значения из E;

в) $\tau_n(\omega)$, определенные для $0 \leqslant n < L(\omega)$, принимающие значения в $[0, \infty]$ такие, что для почти всех $\omega \in \Omega$

$$0 = \tau_0(\omega) \leqslant \tau_1(\omega) \leqslant \ldots$$

Предполагается, что для любого $n \geqslant 0$ σ-алгебра $\mathfrak{B}$ содержит σ-алгебры, порожденные множествами

$$\{\omega: \xi_m = k,\ \tau_{m+1} - \tau_m \leqslant t,\ L(\omega) > n,\ m = \overline{0, n}\},$$
$$k \in E,\ t \in [0, \infty).$$

Определение 1.2. Процесс $\{\xi_{n+1}(\omega), \tau_{n+1}, L\}$ называется процессом марковского восстановления (ПМВ), порожденным полумарковской матрицей $Q(x)$, если

$$\begin{aligned} P\{\xi_{n+1}(\omega) = j,\ \tau_{n+1} \leqslant t \mid \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n; \tau_0, \ldots, \tau_n\} = \\ = P\{\xi_{n+1} = j,\ \tau_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n, \tau_n\} = Q_{\xi_n j}(t - \tau_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

почти всюду на $\{\omega: L(\omega) > n\}$ для каждого $j \in E$, $t \in [0, \infty)$, $n \geqslant 0$. Определим $\theta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$, $n \geqslant 0$. Тогда полумарковская матрица $Q(x)$ задает также переходные вероятности двумерной цепи Маркова $\{\xi_n, \theta_n, L\}$:

$$P\{\xi_{n+1} = j,\ \theta_{n+1} \leqslant t \mid \xi_n, \theta_n\} = Q_{\xi_n j}(t).$$

Введем следующие величины

$$\zeta(\omega) = \sup_{0 \leqslant n < L} \tau_n(\omega),$$

$$N_j(t) = N_j(t, \omega) = \operatorname{card}\{n: \xi_n = j,\ \tau_n \leqslant t\},$$

$$N(t) = N(t, \omega) = \sup_{0 \leqslant n < L}\{n: \tau_n \leqslant t\}.$$

Определение 1.3. Процесс $\{\xi(t), \zeta\} = \{\xi_{N(t)}, L\}$ называется ПМП, порожденным полумарковской матрицей $Q(x)$.

Для ПМП $\{\xi(t), \zeta\}$ величины τ_n называют моментами перехода (изменения состояния), ξ_n определяют состояния в момент n-го перехода, θ_n называют временами пребывания ПМП в состоянии ξ_n, $N(t)$ — общее число переходов за время t, $N_j(t)$, $j \in E$, — число попаданий в j-е состояние за время t;

$$N(t) = \sum_{j \in E} N_j(t),$$

L — общее число переходов процесса, включая момент $\tau_0 = 0$.

Определение 1.4. Процесс $\{\vec{N}(t), L\} = \{N_j(t), j \in E, L\}$ называется считающим (counting) процессом.

Определение 1.5. Цепь Маркова $\{\xi_n, L\}$ называют цепью Маркова, вложенной в ПМВ, ПМП или считающий процесс соответственно *.

В зависимости от свойств полумарковской матрицы, задающей ПМВ и ПМП, его траектории могут обладать качественно различными свойствами.

* Термин «процесс марковского восстановления» (Markov Renewal Process) был введен первоначально Пайком для процессов $\{\vec{N}(t), L\}$. Здесь приведена терминология, которая используется в литературе в последние годы.

Обычно рассматривается более узкий класс ПМП, у которого полумарковская матрица удовлетворяет дополнительному условию

$$\sum_{j\in E} Q_{ij}(\infty) = \sum_{j\in E} p_{ij} = 1. \tag{1.2}$$

Условие (1.2) эквивалентно тому, что $L(\omega)=\infty$ с вероятностью единица. Процессы, удовлетворяющие условию (1.2), называются консервативными. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будут рассматриваться именно консервативные процессы.

Однако и в случае консервативности процесса последний может обладать неприятными свойствами, например, число переходов процесса может быть бесконечным за конечное время. Следующее ниже определение описывает класс полумарковских процессов, свободных от таких патологий.

Определение 1.6. Процесс $\xi(t)$ называется регулярным, если $\forall j\in E$ $P\{N_j(t)<\infty\}=1$, и сильно регулярным, если

$$P\left\{\sum_{i\in E} N_i(t)<\infty\right\}=1.$$

Различные условия, обеспечивающие регулярность ПМП, изучены Пайком [215, 216]. В частности, если множество E конечно, то ПМП всегда сильно регулярен.

Уже в одной из первых работ по ПМП [194] была проведена классификация состояний. Считалось, что для времени пребывания ПМП в каждом состоянии имеет место один из следующих трех случаев:

а) $\theta_i=0$ — мгновенное состояние;

б) $0<\theta_i<\infty$ — устойчивое (нормальное) состояние;

в) $\theta_i=\infty$ — поглощающее состояние.

Понятно, что для консервативных процессов не может иметь место случай в), а для консервативных регулярных — случаи а) и в). Обычно предполагается, что все состояния ПМП нормальны. В этом случае классификация состояний ПМП в основном совпадает с классификацией состояний вложенной в $\xi(t)$ цепи Маркова. Пайк [215] доказал, что в неприводимом сильно регулярном ПМП все состояния или возвратны, или невозвратны. Этот результат был усилен Чеонгом [128], не предполагавшим строгой регулярности. В работе [216] построены примеры неприводимых возвратных ПМП, у которых вложенная цепь невозвратна. Последнее имеет место всегда, когда ПМП регулярен, но не сильно регулярен.

Условия, при которых сильно регулярный ПМП положительно возвратен, состоят в следующем.

Пусть μ_{ii} — среднее время возвращения в i-ое состояние, a_i — среднее время пребывания в i-м состоянии.

Теорема (Пайк, Шауфель [217]). Сильно регулярный неприводимый ПМП положительно возвратен (т. е. $\mu_{ii}<\infty$, $i\in E$) тогда и только тогда, когда $a_i<\infty$, $i\in E$ и существует сходящаяся последовательность положительных чисел $\{y_i\}$ такая, что

$$\sum_{i\in E} y_i \frac{p_{ij}-\delta_{ij}}{m_i}=0,$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера.

Близкий результат получен также Г. И. Призвой [81].

Вслед за ввидением понятия ПМП ряд авторов предложили различные способы конструктивного задания ПМП. Так, ПМП можно задавать:

а) матрицей $P=\{Q_{ij}(\infty), i\, j\in E\}$ вероятностей перехода вложенной в ПМП цепи Маркова $\{\xi_n, n\geqslant 0\}$ и матрицей $P(x)=\{Q_{ij}(x)/Q_{ij}(\infty), i, j\in E\}$ функций распределения случайных величин ξ_{ij} — времен пребывания процесса в i-м состоянии с последующим переходом в j-ое состояние [215],

б) вектор-функцией распределения $p(x)=\{P_i(x), i\in E\}$ времен пребывания в i-м состоянии и матрицей $q(u)=\{q_{ij}(u), i, j\in E\}$, где $q_{ij}(u)$ — условные вероятности перехода из i-го состояния в j-ое при условии, что в i-м состоянии процесс провел время u. (В. С. Королюк [64]);

в) матрицей независимых неотрицательных случайных величин $\{\zeta_{ij}, i, j\in E\}$ таких, что

$$\theta_i \doteq \sum_{j\in E}\sigma_{ij}\zeta_{ij},$$

где ζ_{ij} имеют функции распределения

$$S_{ij}(t)=1-\exp\left\{-\int_0^t \frac{dQ_{ij}(u)}{1-P_i(u)}\right\},$$

σ_{ij} — индикаторы случайных событий $\min\limits_{k\in E}\zeta_{ik}\doteq\zeta_{ij}$, знак $\doteq$ означает одинаковую распределенность случайных величин слева и справа (В. С. Королюк, А. А. Томусяк [67]);

г) матрицей $\{\widetilde{G}_{ij}(Z, s), i, j\in E\}$, где

$$\widetilde{G}_{ij}(Z, s)=\sum_{\vec{k}\geqslant 0}\int_0^\infty e^{-st}\,dP\{\vec{N}(t)=\vec{k}, \xi(t)= \\ = j\,|\,\xi(0)=i\}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2}\ldots z_n^{k_n}, \qquad (1.3)$$

где $Z=\{\delta_{i,j} z_j, ij\in E\}, |z_j|\leqslant 1, j\in E=\{\overline{1, n}\}$ (Цинлар [139])

Из приведенного выше определения ПМП и различных способов его задания видно, что ПМП является процессом, обладающим, с одной стороны, свойствами марковского процесса (так, в момент перехода ПМП $\xi(t)$ будущее не зависит от прошлого), с другой стороны, свойствами процессов восстановления (именно, моменты последовательного попадания ПМП $\xi(t)$ в фиксированное состояние образуют процесс восстановления).

Таким образом марковость ПМП $\xi(t)$ нарушается в промежутках между переходами, однако оказывается, что если наряду с $\xi(t)$ рассматривать процесс, описывающий поведение $\xi(t)$ между переходами, то полученный новый двумерный процесс является марковским. Именно так и поступили Пайк и Шауфель [217], определив ПМП как первую компоненту некоторого двумерного марковского процесса, обладающего строго марковским свойством, и указали тем самым место, занимаемое ПМП в общей теории случайных процессов. Такое понимание ПМП особенно важно в случае, когда фазовое пространство процесса является более общим, чем $E=\{1,\ 2,\ \ldots\}$.

Определение ПМП, приведенное выше, может быть с очевидными изменениями перенесено на случай более общего пространства с той лишь разницей, что роль полумарковской матрицы $Q(x)$ играет полумарковское ядро, определяемое следующим образом.

Пусть E — локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой и $\mathscr{E}=\mathfrak{B}(E)$ — наименьшая σ-алгебра, содержащая борелевские множества из E.

Определение 1.7. $Q(x, A)$ называется полумарковским ядром, если:

1) $Q(x, A)$ определено для $\forall x\in E$ и $\forall A\in\mathscr{E}\times\mathfrak{B}([0,\infty))$;

2) $Q(x,\cdot)$ — вероятностная мера на $\mathscr{E}\times\mathfrak{B}([0,\infty))$ для $\forall x\in E$;

3) $Q(x, A)$ — $\mathscr{E}$-измеримая функция для $\forall A\in\mathscr{E}\times\mathfrak{B}([0,\infty))$.

4) $Q(x, E\times(-\infty,0))$.

Полумарковские процессы с общим фазовым пространством с различной степенью общности вводились в работах В. С. Королюка и И. И. Ежова [55], И. И. Ежова и А. В. Скорохода [58], Цинлара [140], Серфозо [226], Жако [172] и др.

ПМП допускает различные модификации и обобщения, приводящие к новым содержательным классам случайных процессов.

Если временной параметр ПМП $\xi(t)$ принимает значения из некоторого дискретного множества T, то естественно говорить о полумарковских цепях. Специально полумарковские цепи рассматривались Анселоном [121] и Кейном [126].

Ю. К. Беляев [19] определил процессы, названные им линейчатыми марковскими, как двумерные марковские процессы $\{\xi(t), u(t)\}$, где

$$u(t) = t - \sup\{u\colon \xi(u) \neq \xi(t)\} \qquad (1.4)$$

— время, прошедшее после последнего перехода ПМП $\xi(t)$. Можно определить процесс $\{\xi(t), v(t)\}$, где

$$v(t) = \inf\{u > t\colon \xi(u) \neq \xi(t)\} - t \qquad (1.5)$$

— время, оставшееся до следующего перехода $\xi(t)$, оказывающийся также марковским, причем линейчатые марковские процессы $\{\xi(t), u(t)\}$ и $\{\xi(t), v(t)\}$ обладают строго марковским свойством.

И. И. Ежов [47] ввел процессы, названные им марковскими процессами с полумарковским вмешательством случая, обобщающие линейчатые марковские процессы Ю. К. Беляева. Близкий класс так называемых процессов марковского восстановления с дополнительными траекториями (Markov Renewal Processes with auxiliary paths) рассматривали Пайк и Шауфель [217, 218] и Шель [220].

И. И. Ежовым и Г. Арсенишвили [11—17] были введены и изучены полумарковские процессы r-го порядка (обычные ПМП соответствуют случаю $r=1$). Процессы, обобщающие, с одной стороны, марковские процессы с полумарковским вмешательством случая и, с другой стороны, ПМП r-го порядка, рассмотрены в работе И. И. Ежова, Т. Гергея, И. Н. Цуканова [33].

В работе Г. Ш. Лева [74] введены так называемые ПМП умножения — процессы, весьма близкие к ПМП, но с совершенно иной геометрией траекторий, а в [75] найдены условия сходимости таких процессов к диффузионным процессам. Отметим также работы Нейтса [209, 210], в которых ПМП рассматриваются с точки зрения неоднородных ветвящихся процессов.

Леви [194] показал, что ПМП, являясь обобщением марковских цепей, очень близок к последним в том смысле, что выборочные функции цепи Маркова есть соответствующим образом модифицированные выборочные функции ПМП. Эта близость характеризуется Леви тем, что оба процесса имеют одну и ту же последовательность состояний. Более детально эта связь изучена Якелем [242].

Пусть E_0 — множество устойчивых состояний ПМП $\xi(t)$ $\left(\text{т. е. таких, что } \int x\,dP\{\theta_i < x\} < \infty;\ i \in E_0\right)$, $E \setminus E_0$ — множество мгновенных состояний. Для каждого $i \in E_0$ определим последовательность взаимно независимых, не зависящих от $\xi(t)$ случайных величин $\{z_{ik}, i \in E_0, k=1, 2, \ldots\}$ таких, что

$$P\{z_{ik} > t\} = \exp\{-\lambda_i t\},$$

где λ_i — медиана распределения времени пребывания в i-м состоянии. Положим (см. (1.5))

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{z_{\xi(t), N(t)}(t)}{V(t)}, & \text{если } 0 < V(t) < \infty; \\ 1, & \text{если } \xi(t) \in E \setminus E_0; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и пусть

$$\tau(t) = \inf\left\{s: \int_0^s \psi(u)\, du \geqslant t\right\}.$$

Теорема (Якель [242]). Процесс $\xi(\tau(t))$ измерим, имеет одинаковую последовательность состояний с $\xi(t)$ и является марковским процессом.

Для случая ПМП с общим фазовым пространством Серфозо [226] усилил результат Якеля, рассмотрев случайные замены времени, переводящие ПМП в ПМП и, в частности, в марковские процессы.

В работе Курца [190] была рассмотрена случайная замена времени, переводящая марковский процесс в полумарковский.

Другой тип преобразований ПМП рассматривался Цинларом [134, 135]. Пусть E — конечно. Предположим, что в момент τ_n может произойти одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Пусть z_n — случайная величина, равная j, если в момент τ_n произошло событие A_j. Фиксируем одно из m, например, $m=m_0$. При различных предположениях относительно зависимости z_n от $\xi(t)$ изучается процесс

$$Y(t) = \xi(S_n), \quad S_n \leqslant t < S_{n+1},$$

где $S_0, S_1, \ldots$ — моменты появления события A_{m_0}. Если z_n зависит только от $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$, то имеет место

Теорема (Цинлар [135]). $Y(t)$ — ПМП.

Показано, что $\xi(t)$ однозначно определяет процесс $Y(t)$. Тот же результат сохраняется и в случае марковской зависимости z_n от $\{\xi_n, n \geqslant 0\}$.

В работе Серфозо [225] найдены необходимые и достаточные условия, при которых $f(\xi(t))$ — ПМП, где $f(\cdot)$ принимает значение i, если i E_i и $E = \bigcup E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ есть некоторое разбиение фазового пространства. Соответствующие условия близки условиям Кемени — Снелла для конечных цепей Маркова.

§ 2. УРАВНЕНИЯ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Определение 2.1. Уравнением марковского восстановления называют уравнение вида

$$X(t)=G(t)+\int_0^t Q(dy)\,X(t-y), \qquad (2.1)$$

где $Q(x)$ — полумарковская матрица, задающая ПМП $\xi(t)$, $G(t)$, и $X(t)$ — соответственно известная и искомая матрица или вектор, компоненты которых равны нулю для всех $t\in(-\infty, 0)$. В частности, когда $G(t)=\{G_k(t),\ k\in E\}$, уравнение (2.1) записывается в виде

$$X_k(t)=G_k(t)+\sum_{j\in E}\int_0^t Q_{kj}(dy)\,X_j(t-y), \quad k\in E, \qquad (2.2)$$

К уравнениям марковского восстановления приводит изучение различных характеристик ПМП. Так, пусть $F_{ij}(t)=P\{\xi(t)=j\mid\xi(0)=i\}$, $D_{ij}(t)=\delta_{ij}(1-P_i(t))$.

Тогда

$$F_{ij}(t)=D_{ij}(t)+\sum_{k\in E}\int_0^t Q_{ik}(dy)\,F_{kj}(t-y) \qquad (2.3)$$

(Феллер [151]).

Если $M_{ij}(t)=E\{N_j(t)\mid\xi(0)=i\}+\delta_{ij}$, то

$$M_{ij}(t)=\delta_{ij}+\sum_{k\in E}\int_0^t Q_{ik}(dy)\,M_{kj}(t-y) \qquad (2.4)$$

(Пайк [215]).

Пусть фазовое пространство ПМП $\xi(t)$ разбито на два непересекающихся множества $E=E_0\cup E_1$. Обозначим через ζ_i время пребывания ПМП $\xi(t)$ в классе E_0 до попадания в E_1 при условии, что $\xi(0)=i\in E_0$. И пусть $u_i(t)=P\{\zeta_i\leqslant t\}$. Тогда

$$u_i(t)=1-P_i(t)+\sum_{k\in E_0}\int_0^t Q_{ik}(dy)\,u_k(t-y), \qquad (2.5)$$

В. С. Королюк [64]).

Многочисленные примеры уравнений марковского восстановления содержатся в работах [215—218, 202].

Цинлар, использовав подход Нейтса, получил довольно общие уравнения марковского восстановления. Пусть $\xi(t)$ — ПМП с конечным фазовым пространством $E=\{1, 2, \ldots, n\}$. Положим

$$\zeta(t)=\int_0^t \xi(y)\,dy, \qquad \vec{x}=\{x_i,\ i\in E\},\quad x_i>0,$$

$$R_{ij}(\vec{k}, S, t) = \int\limits_{\vec{x} \geqslant 0} \exp\left\{-\sum_{l \in E} x_l S_l\right\} d_{\vec{x}} P\{\xi(t) = j,$$

$$\vec{N}(t) = \vec{k}, \quad \zeta(t) \leqslant \vec{x} \mid \xi(0) = i\},$$

$$\widetilde{R}_{ij}(Z, S, \lambda) = \sum_{\vec{k} \geqslant 0} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \ldots z_n^{k_n} \int\limits_0^\infty \exp\{-\lambda t\} d_t R_{ij}(\vec{k}, S, t),$$

где $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $S = \{\delta_{ij} s_i, \ i, j \in E\}$.

Теорема (Цинлар [139]).

$$\widetilde{R}(Z, S, \lambda) = [I - Q(\lambda I + S) Z]^{-1} \widetilde{D}(\lambda I + S), \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{Q}(s) = \int\limits_0^\infty \exp\{-st\} dQ(t),$$

$$\widetilde{D}(s) = \int\limits_0^\infty \exp\{-st\} dD(t).$$

Вопросы существования решения уравнения марковского восстановления и его единственности были исследованы Феллером для уравнения (2.3).

Пусть $\widetilde{Q}(s) = \int \exp\{-st\} dQ(t)$, аналогичный смысл имеют $\widetilde{D}(s)$, $\widetilde{F}(s)$.

Теорема (Феллер [151]). Уравнение (2.3) всегда имеет минимальное решение, преобразование Лапласа — Стилтьеса которого имеет вид

$$\widetilde{F}(s) = (I + \widetilde{Q}(s) + \widetilde{Q}^2(s) + \ldots) \widetilde{D}(s), \tag{2.7}$$

т. е.

$$F(t) = \int\limits_0^t R(dy) G(t - y), \tag{2.8}$$

где

$$R(t) = I + Q(t) + Q^{(2)}(t) + \ldots \tag{2.9}$$

и $Q^{(n)}(t)$ — n-кратная свертка матрицы $Q(t)$ с собой. Минимальное решение единственно тогда и только тогда, когда уравнение

$$\widetilde{Q}(s) \widetilde{\lambda}(s) = \widetilde{\lambda}(s) \tag{2.10}$$

имеет лишь нулевое неотрицательное решение. В частности, минимальное решение единственно, если все состояния вложенной в $\xi(t)$ цепи Маркова возвратны.

Цинлар, используя результаты о положительных операторах сжатия, исследовал уравнение (2.1) в классе M вектор-функций $X(t)$ таких, что $\|X(t)\| = \sup_{k \in E} |X_k(t)|$ ограничены по t в каждом конечном интервале.

Теорема (Цинлар [141]). Уравнение (2.1) имеет решение $X(t) \in M$ тогда и только тогда, когда $R*G \in M$. Любое решение $X(t) \in M$ представимо в виде $X(t) = R*G(t) + C(t)$, где $C(t)$ удовлетворяет уравнению

$$C * G(t) = C(t), \qquad C(t) \in M.$$

Единственное решение уравнения (2.1) вида $X(t) = R*G(t)$ существует, если выполнено любое из четырех условий:

1) матрица $Q(t)$ конечномерна;

2) вложенная в ПМП цепь Маркова неприводима и положительно возвратна;

3) $\|p(t)\| = \sup_{i \in E} |P_i(t)| < 1$ для некоторого $t > 0$;

4) для некоторого $s > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{i \in E} \widetilde{P}_i(s) \leqslant 1 - \delta.$$

Феллером указаны также критерии неединственности минимального решения уравнения (2.1). Пусть A — множество пребывания (sojourn set of states), т. е. множество состояний из E, на котором цепь Маркова, порожденная матрицей переходных вероятностей $Q(x)$ при фиксированном $x \in (0, \infty)$ с положительной вероятностью, никогда не оборвется.

Пусть

$$B = \left\{ \int_0^\infty \frac{x}{1+x}\, dQ_{ij}(x), \quad i, j \in E \right\},$$

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} P^n B, \quad \text{где} \quad P = \{p_{ij} = Q_{ij}(\infty), \quad i, j \in E\}.$$

Теорема (Феллер [151]). Минимальное решение неединственно тогда и только тогда, когда существует множество пребывания A такое, что

$$\sum_{j \in E} W_{ij} < \infty \quad \text{для} \quad \forall\, i \in E.$$

Уравнения марковского восстановления выписываются для определенных характеристик случайных величин, связанных с ПМП и ПМВ. Чаще полезно иметь представление о связи самих случайных величин, т. е. знать, каким образом интересующая нас случайная величина связана с теми, распределения которых нам известны.

В. С. Королюком [64] рассмотрен стохастический аналог уравнений марковского восстановления.

Пусть $\xi(t)$ — ПМП, определенный на E. Пусть, далее, случайные величины σ_{ij} — индикаторы перехода ПМП $\xi(t)$ из i-го в j-ое состояние:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i(\theta_j) = \begin{cases} 1 \text{ с вероятностью } q_i\ (\theta_i), \\ 0 \text{ с вероятностью } 1 - q_{ij}(\theta_i), \end{cases}$$

где $q_{ij}(t)$ — условная вероятность перехода из i-го в j-ое состояние при условии, что $\theta_i = t$, так что

$$E\{\sigma_{ij}\} = E\{q_{ij}(\theta_i)\} = p_{ij}.$$

Определение 2.2. Стохастическим уравнением марковского восстановления называется выражение

$$\varkappa_i \doteq \eta_i + \sum_{j \in E} \sigma_{ij} \varkappa'_j, \tag{2.11}$$

где η_i — случайные величины, определяемые ПМП, распределения которых известны, $\varkappa_i$, $\varkappa'_i$ независимы для $\forall i \in E$ и одинаково распределены, η_i, $\varkappa_i$ и σ_{ij}, $\varkappa'_j$ попарно независимы. Соотношения (2.11) полезны при выводе уравнений (2.1) (см. В. С. Королюк [64]; В. С. Королюк, А. А. Томусяк [67]; В. В. Анисимов [2, 3]; Д. С. Сильвестров [95, 96] и др.).

§ 3. ПОЛУМАРКОВСКИЕ МАТРИЦЫ И ФУНКЦИИ МАРКОВСКОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть $Q(x)$ — полумарковская матрица, $\tilde{Q}(s)$ — ее преобразование Лапласа — Стилтьеса и предположим, что уравнение (2.10) имеет лишь нулевое неотрицательное решение. В этом случае по теореме Феллера существует $\tilde{R}(s) = (I - \tilde{Q}(s))^{-1}$. Анализ спектральных свойств $\tilde{Q}(s)$ с использованием известных теорем Фробениуса и Перрона о корнях положительных матриц приводился в работах Цинлара [139, 141].

Имеют место известные результаты о неприводимости, разложимости, существовании максимального по модулю положительно собственного числа.

Предположим, что все состояния ПМП $\xi(t)$ образуют один возвратный положительный класс и пусть $\rho = \{\rho_i,\ i \in E\}$ — стационарное распределение вложенной в процесс цепи Маркова и

$$a_i = \int_0^\infty x\, dP_i(x) < \infty.$$

Теорема (Цинлар [139]).

$$\lim_{s \to 0} \frac{d}{ds} \widetilde{Q}(s) = -\sum_{i \in E} \rho_i a_i. \tag{3.1}$$

Значительно больший интерес представляет изучение матриц $R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(t)$ и $\widetilde{R}(s)$ для получения широкого класса предельных теорем и нахождения соответствующих асимптотических разложений.

Определение 3.1. Функция

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q^{(n)}(t)$$

называется функцией марковского восстановления. Для функции марковского восстановления имеют место аналоги теорем Блекуэлла и узловой теоремы Смита теории восстановления.

Теорема. Если $\xi(t)$ — неприводимый возвратный ПМП то $\forall i,\ j \in E,\ \forall c > 0$

$$\lim_{t \to \infty} [R_{ij}(t) - R_{ij}(t-c)] = \frac{c}{\mu_{jj}}. \tag{3.2}$$

Теорема. Пусть $G_j(t)$, $j \in E$, — непосредственно интегрируемая по Риману функция. Тогда если $\xi(t)$ — неприводимый возвратный процесс, то $\forall i,\ j \in E$

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t R_{ij}(dy) G_j(t-y) = \frac{1}{\mu_{jj}} \int_0^{\infty} G_j(x)\, dx. \tag{3.3}$$

Доказательства этих теорем для ПМП различной общности имеются в работах [215, 241, 217, 174, 56]. Более тонкий результат доказан Хантером. Предположим, что случайные величины ξ_{ij}, $i, j \in E$, имеют абсолютно непрерывные функции распределения и пусть

$$Q_{ij}(t) = \int_0^t f_{ij}(u)\, du.$$

Положим

$$f_{ij}^{(n)}(\sigma, t) = \begin{cases} f_{ij}(t)\chi_{[0,\sigma)}(t) & \text{для } n = 1, \\ \sum\limits_{k \in E} \int_0^t f_{ik}^{(n-1)}(\sigma, t-u) f_{kj}(\sigma, u)\, du & \text{для } n > 1, \end{cases}$$

$$h_{ij}(\sigma, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}(\sigma, t) < \infty,$$

$$\tilde{h}_{ij}(\sigma, \lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda s} h_{ij}(\sigma, s)\, ds,$$

$$a = \sum_{i \in E} \sum_{j \in E} \rho_j \int_0^\infty u f_{ij}(u)\, du.$$

Теорема. (Хантер [171]). Если

A: $f_{ij}(t) \to 0$ при $t \to 0$.

B: для некоторого достаточно малого $\sigma > 0$ $h_{ij}(\sigma, t) \to 0$ при $t \to \infty$.

C: $h_{ij}(\sigma, \lambda) \in L_p$ для некоторого $p > 0$, зависящего только от σ, то

$$h_{ij}(\infty, t) \to \frac{\rho_j}{a} \text{ при } t \to \infty, \quad i, j \in E. \tag{3.4}$$

Оказывается верным и в некотором смысле обратное утверждение.

Если предельные теоремы (2.13—2.15) для функций марковского восстановления еще удается получить, то этого нельзя сказать о соответствующих асимптотических теоремах. В этом случае приходится использовать преобразование Лапласа — Стилтьеса $\tilde{R}(s)$ функции марковского восстановления и соответствующие тауберовы теоремы. Асимптотические разложения для $\tilde{R}(s)$, точнее первые два члена этого разложения были получены Кширсагаром и Гуптой [185] (см. также [189]), использовавшими для этой цели аппарат теории матриц. Их результат был усилен Хантером [170] и Кейлсоном [183], воспользовавшимися фундаментальной матрицей Кемени — Снелла и давших вероятностную интерпретацию результатам Кширсагара и Гупты. Денардо [143] указал алгоритм, являющийся по существу известным алгоритмом Вишика — Люстерника, позволяющий последовательно вычислять члены разложения $\tilde{R}(s)$ в ряд по степеням s. Более естественным оказался подход, связанный с обращением возмущенных на спектре линейных операторов, предложенный А. Ф. Турбиным, использовавшим идеи работы В. С. Королюка [65].

Пусть $\xi(t)$ — неприводимый положительно возвратный ПМП. Обозначим через P матрицу цепи Маркова, вложенной в $\xi(t)$ и $\rho = \{\rho_i,\ i \in E\}$, ее стационарное распределение.

Теорема (А. Ф. Турбин [114]). Если существуют

$$a_{ij}^{(k)} = \int_0^\infty x^k dQ_{ij}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ i, j \in E,$$

и вложенная цепь эргодична, то для достаточно малых по модулю s имеет место разложение

$$\widetilde{R}(s)=(I-\widetilde{Q}(s))^{-1}=\frac{1}{sa}P^{\infty}+T_0+sT_1+\ldots+$$
$$+s^{n-2}T_{n-2}+o(s^{n-2}), \tag{3.5}$$

где

$$P^{\infty}=\lim_{n\to\infty}P^n, \quad a=\sum_{i\in E}\rho_i a_i,$$

$$T_0=\left(I-\frac{1}{a}P^{\infty}A_1\right)R_0\left(I-\frac{1}{a}A_1P^{\infty}\right)-$$
$$-\frac{1}{a^2}(\rho,\ A_1R_0A_1e)P^{\infty},$$
$$R_0=(I-P+P^{\infty})^{-1}-P^{\infty},$$
$$A_k=\{a_{ij}^{(k)}p_{ij},\ i,\ j\in E\}, \quad k=\overline{1,\ n},$$
$$T_{k+1}=T_kA_1T_0+T_kA_2T_{-1}+T_{k-1}A_2T_0+\ldots+T_{-1}A_{k+8}T_{-1},$$
$$T_{-1}=\frac{1}{a}P^{\infty}, \quad k=\overline{0,\ n-3},$$

$o(s^{n-2})$ — o-малое в смысле обычной матричной нормы. e — вектор, составленный из единиц. Метод, предложенный в этой работе, применим и в более общих ситуациях.

В работе Стоуна [230] получена факторизация Винера — Хопфа для $I-\widetilde{Q}(s)$ вида

$$I-\widetilde{Q}(s)=(I+\widetilde{B}(s))(I+\widetilde{A}(s)),$$

где

$$\widetilde{A}(s)=(\widetilde{Q}(s))^{\tau},\ \widetilde{B}(s)=(\widetilde{Q}(s))^{\sigma},$$

$(.)^{\tau}$ и $(.)^{\sigma}$ — операции проектирования, введенные Бакстером.

§ 4. ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПМП

Исследование предельного поведения ПМП $\xi(t)$ при $t\to\infty$ является одной из центральных задач теории таких процессов, и ему посвящено большое число работ. Относительно некоторых из этих результатов речь шла в предыдущем параграфе (аналоги теорем Блекуэлла и узловой теоремы Смита).

Смит показал, что если времена пребывания ПМП в любом состоянии имеют первые моменты, то $\xi(t)$ имеет предельное распределение при $t\to\infty$.

Теорема (Смит [227]). Пусть $j \in E$ — непериодическое состояние процесса $\xi(t)$ и $0 < a_j < \infty$

$$F_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j \mid \xi(0) = i\}.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) = \frac{r_{ij} a_j}{\mu_{jj}}, \tag{4.1}$$

где r_{ij} есть вероятность того, что вложенная в $\xi(t)$ цепь Маркова, выйдя из i, достигнет состояния j.

В частности, если процесс $\xi(t)$ положительно возвратен и $\{\rho_i, i \in E\}$ — стационарная мера вложенной в $\xi(t)$ цепи Маркова, то

$$\lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) = \frac{\rho_j a_j}{\sum\limits_{j\in E} \rho_j a_j} \quad \text{(Ховард [168]).} \tag{4.2}$$

В работе Фабенса [148] и затем Якеля [241] существование $\lim\limits_{t\to\infty} F_{ij}(t)$ было доказано для случая, когда j — мгновенное состояние.

Положим

$$F_{ij}^{+}(t, x) = P\{\xi(t) = j, \quad u(t) \leqslant x \mid \xi(0) = i\},$$
$$F_{ij}^{-}(t, x) = P\{\xi(t) = j, \quad v(t) \leqslant x \mid \xi(0) = i\}.$$

Смит [227] показал, что для неприводимого процесса

$$\lim_{t\to\infty} F_{ij}^{+}(t, x) = \frac{1}{\mu_{jj}} \int_0^x (1 - P_j(u))\, du =$$
$$= \frac{\rho_j}{\sum \rho_j a_j} \int_0^x (1 - P_j(u))\, du. \tag{4.3}$$

В [148] показано, что

$$\lim_{t\to\infty} F_{ij}^{+}(t, x) = \lim_{t\to\infty} F_{ij}^{-}(t, x). \tag{4.4}$$

Г. И. Призва обобщил этот результат, показав, что для неприводимого положительно возвратного процесса

$$\lim_{t\to\infty} P\{v(t) > z, \; u(t) > x, \; \xi(N(t)) = j,$$
$$\xi(N(t)+1) = k \mid \xi(0) = i\} =$$
$$= \frac{\rho_j p_{jk}}{\sum \rho_j a_j} \int_{x+z}^{\infty} (1 - S_{jk}(u))\, du, \quad \text{где } S_{jk}(u) = \frac{Q_{jk}(u)}{Q_{jk}(\infty)}. \tag{4.5}$$

Приведенные результаты показывают, что стационарная мера неприводимого возвратного процесса при определенных предположениях является комбинацией стационарной меры вложенной цепи Маркова и стационарного распределения процесса восстановления. Аналогичный результат имеет место даже в том случае, когда вложенная цепь Маркова невозвратна. Для стационарной меры имеет место следующий важный результат.

Пусть

$$E=\{0, 1, 2, \ldots\}, \quad m_j=\lim_{t\to\infty}(1-\delta_{0j})\,E\,\{N_j(s_0)/\xi(0)=0\},$$

где $s_0=\min\{t, \inf\{t>0\colon \xi(t)=0\}\}$.

Лемма (Пайк, Шауфель [218]).

Для $\forall i\in E$ и $t\geqslant 0$

$$m_j=\sum_{l\in E} m_l \sum_{k\in E}(p_{lk}-Q_{lk}(t))*R_{kj}(t) \tag{4.6}$$

и

$$m_j=\sum_l m_l p_{lj}.$$

Причем здесь не предполагается возвратности вложенной в $\xi(t)$ цепи Маркова. Стационарная мера $\pi_l(x)=m_l\int\limits_0^x(1-P_l(u))\,du$ является вероятностной, т. е. $\sum\limits_l \pi_l(\infty)=1$ тогда и только тогда, когда $\xi(t)$ положительно возвратен.

Стационарные распределения найдены для всех процессов, порождаемых полумарковскими, о которых шла речь в § 1. Укажем на работы [18, 34, 48, 121, 220] и др. И. И. Ежовым доказана эргодическая теорема для широкого класса процессов, включающих полумарковские.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ — произвольно вероятностное пространство, на котором рассматривается однородный марковский процесс $\xi(t)$, обладающий свойствами:

1) существует монотонно возрастающая последовательность случайных величин $\{\tau_n\}$ такая, что последовательность $\xi(\tau_n)$ образует эргодическую цепь Маркова;

2) распределение $\theta_n=\tau_{n+1}-\tau_n$ при всех n полностью определяется значением случайной величины $\xi(\tau_n)$ и не зависит от эволюции процесса $\xi(t)$ как до момента τ_n, так и после него.

Положим

$$P(\alpha, u, A)=P\{\xi(\tau_n+u)\in A\,|\,\xi(\tau_n)=\alpha,\ \theta_n>u\},$$
$$F(u\,|\,\alpha)=P\{\theta_n\leqslant u\,|\,\xi(\tau_n)=\alpha\},$$

$$\int_0^\infty (1 - F(u \mid \alpha))\, du = \mu(\alpha).$$

Теорема (И. И. Ежов [48]). Пусть $\varphi(dx)$ — стационарное распределение цепи $\xi(\tau_n)$. Если

$$\int_0^\infty \mu(x)\,\varphi(dx) < \infty,$$

то

$\lim\limits_{t\to\infty} P\{\xi(t) \in A\} = \Phi(A)$ не зависит от $\xi(0)$ и

$$\Phi(A) = \frac{\int_E \varphi(d\alpha) \int_0^\infty P(\alpha, u, A)\,[1 - F(u \mid \alpha)]\, du}{\int_E \mu(\alpha)\,\varphi(d\alpha)}. \qquad (4.7)$$

Другой тип предельных теорем для ПМП был доказан в работе Чеонга [129]. Для случая процессов $\xi(t)$, которые могут обрываться с положительной вероятностью (фазовое пространство E неприводимо, но не замкнуто), изучались отношения

$$W_{ij}(t) = \frac{F_{ij}(t)\, r_j}{\sum\limits_{k\in E} F_{ik}(t)\, r_k}; \quad V_{ij}(t) = \frac{F_{ij}(t)}{\sum\limits_{k\in E} F_{ik}(t)},$$

где r_j — вероятность того, что процесс оборвется когда-либо, выйдя из состояния j. При выполнении определенных условий, связанных со скоростью изменения $F_{ij}(t)$, доказано, что $W_{ij}(t)$ имеет в пределе $t\to\infty$ собственное распределение, не зависящее от начального состояния i. При изучении предельного поведения ПМП используются самые различные подходы:

1) для доказательства существования и вычисления явного вида стационарного распределения используется узловая теорема теории восстановления ([48, 56, 217, 174, 234, 220] и др.);

2) исследуется существование стационарных мер для сопровождающих линейчатых марковских процессов $\{\xi(t), u(t)\}$, $\{\xi(t), v(t)\}$, откуда находится стационарное распределение для ПМП ([218, 58]) *;

3) исследуются уравнения марковского восстановления либо их преобразования Лапласа ([168, 141, 70] и др.);

* Общая эргодическая теорема для процессов, включающих полумарковские была доказана в 1971 году А. В. Скороходом и сообщена на семинаре в КГУ (см. Теория вероятностей и её применение, 1972, 17, № 4).

4) исследуется граф, соответствующий цепи Маркова, вложенной в ПМП $\xi(t)$, и стационарное распределение процесса $\xi(t)$ описывается с помощью характеристик этого графа [168, 110, 112].

Представление об относительном времени, которое ПМП проводит в определенном состоянии, позволяет получить предельные теоремы для отношений. Такого рода теоремы являются естественным обобщением теоремы Деблина для цепей Маркова.

Так, пусть

$$F_{ij}^{+}(x, t) = P\{\xi(t) = j, \ u(t) \leqslant x \mid \xi(0) = i\},$$

$$F_{ij}^{-}(x, t) = P\{\xi(t) = j, \ v(t) \leqslant x \mid \xi(0) = i\},$$

$$_kR_{ij}(t) = (1 - \delta_{jk}) E\{N_j(s_k)/\xi(0) = i\} + \delta_{ij},$$

где

$$s_k = \min\{t, \ \inf\{t > 0: \ \xi(t) = k\}\}.$$

Теорема (Пайк, Шауфель [217]). Для возвратного неприводимого регулярного ПМП

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_{ij}(t)}{R_{kl}(t)} = {}_lR_{ij}(\infty),$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_0^t F_{ij}^{+}(x, u)\, du}{R_{00}(t)} = \pi_l(x).$$

Здесь же, а также в работе Якеля [241] получен ряд результатов для пределов отношений, связанных с табу-вероятностями.

В работе Чеонга [128] для случая, когда $e^{\alpha t}[Q_{ij}(t) - p_{ij}]$ ограничены по t при $\alpha \geqslant 0$, получены более общие результаты, из которых результаты Пайка, Шауфеля, Якеля следуют при $\alpha = 0$. В работах Чеонга [127], Нейтса и Тойгельса [212], Шеля [221] найдена скорость сходимости к стационарному распределению.

Предельные теоремы классической теории вероятностей, такие как закон больших чисел, центральная предельная теорема, закон повторного логарифма обобщаются на полумарковские процессы и процессы, ассоциированные с полумарковскими. В этом направлении доказаны теоремы для считающих процессов с конечным числом состояний [234], рассмотрен случай счетного множества состояний [217], рассматривались предельные теоремы для времени пребывания в случае сходимости к устойчивому закону (не обязательно нормальному) [184].

Результаты указанных работ значительно обобщены и усилены в работах В. В. Анисимова [1—4] и Д. С. Сильвестрова [95, 96, 99].

§ 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПМП В СХЕМЕ СЕРИЙ

В последнее время значительное внимание уделяется изучению различных функционалов от ПМП в схеме серий, т. е. когда ПМП $\xi_\varepsilon(t)$ зависит от параметра ε, принимающего некоторое дискретное или непрерывное множество значений. Одним из наиболее важных функционалов от ПМП, имеющего многочисленные применения, является время пребывания процесса в фиксированной области своего фазового пространства E. Пусть $E = E_0 \cup E_1$. Обозначим через ζ_i время пребывания ПМП $\xi(t)$ в подмножестве E_0 до попадания в какое-либо из состояний подмножества E_1 при условии, что начальным состоянием было $i \in E_0$. Положим $\tilde{T}_i(s) = E\{e^{s\zeta_i}\}$.

Теорема (В. С. Королюк [64]). В случае конечного E $\tilde{T}_i(s)$ являются решениями следующей системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j \in E_0} (\delta_{ij} - \tilde{Q}_{ij}(s)) \tilde{T}_j(s) = \sum_{j \in E_1} \tilde{Q}_{ij}. \tag{5.1}$$

В частности, если m_i есть среднее время пребывания процесса $\xi(t)$, вышедшего из $i \in E_0$, в E_0, то

$$m_i = a_i + \sum_{k \in E_0} p_{ik} m_k. \tag{5.2}$$

Обобщение этой формулы на различные процессы рассматривалось в работах [17, 62, 158] и др.

Пусть $E_1 = \{0\}$ и переходные вероятности вложенной в ПМП $\xi_\varepsilon(t)$ таковы, что $p_{i0}^\varepsilon = \varepsilon q_{i0}$ для $i \in E_1$. В [65, 69,115, 5] показано, что если вложенная в $\xi_0(t)$ цепь Маркова имеет предельное распределение и $a_i < \infty$, $i \in E_0$, то при соответствующей нормировке распределение времени пребывания в классе E_0 стремится к показательному, найдены асимптотические разложения для преобразования Лапласа времен пребывания процесса $\xi_\varepsilon(t)$ в E_0.

В работах [5, 104] установлен вид предельного распределения времени пребывания $\xi_\varepsilon(t)$ в E_0 в случае, когда математические ожидания времен сидения бесконечны.

Одной из первых была рассмотрена задача о сходимости сумм бесконечно малых считающих процессов к предельному. Пусть $\vec{N}_{kr}(t)$, $r = \overline{1, k}$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность считающих процессов, построенных по ПМП $\xi_{kr}(t)$ с общим фазовым пространством $E = \{\overline{1, n}\}$, заданных с помощью матриц $\{Q_{ij}^{(kr)}(x), i, j \in E\}$ $\{P_{ij}^{(kr)}, i, j \in E\}$ и векторов начальных распределений $\{a_i^{(kr)}, i \in E\}$.

Теорема (И. Сапаговас [88]). Если $\vec{N}_{kr}(t)$ удовлетворяют условию бесконечной малости, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\leqslant r\leqslant n} P\left\{\sum_{i\in E} N_{kr}^{(i)}(t)>0\right\}=0,$$

где $N_{kr}^{(i)}(t)$ — число попаданий процесса $\xi_{kr}(t)$ в состояние i за время $(0, t]$, то для сходимости при $k\to\infty$ сумм независимых процессов

$$\vec{N}_k(t)=\sum_{r=1}^{k}\vec{N}_{kr}(t)$$

к процессу Пуассона с ведущей функцией $\vec{\Lambda}(t)=\{\lambda_i(t),\ i\in E\}$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $t\geqslant 0$ выполнялись условия

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{k}\sum_{i\in E} a_i^{(kr)}Q_{ij}^{(kr)}(t)=\lambda_j(t),\quad j\in E,$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{r=1}^{k}\left\{\sum_{i,j,l\in E} a_i^{(kr)}Q_{ij}^{(kr)}(t)*Q_{jl}^{(kr)}(t)\right\}=0,\quad i\in E.$$

В работе М. А. Ястребенецкого [120] были найдены условия сходимости сумм ПМВ к ветвящемуся процессу Пуассона.

Иного типа постановка задач рассматривалась в работе В. С. Королюка, Л. И. Полищук, А. А. Томусяка [66].

Пусть $\xi_\varepsilon(t)$ — ПМП, определенный на E, $E=\bigcup_{k=1}^{r}E_k$, $E_i\cap E_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,\ j=\overline{1,r}$, и вложенная в $\xi_\varepsilon(t)$ цепь Маркова имеет вид:

$$p_{ij}^{\varepsilon}=\begin{cases} p_{ij}^{(k)}+\varepsilon q_{ij}^{(k)}, & i,\ j\in E_k,\\ \varepsilon q_{ij}^{(kl)}, & i\in E_k,\ j\in E_l,\ k\neq l,\end{cases}$$

иначе говоря, вероятности перехода ПМП $\xi_\varepsilon(t)$ из одного класса E_k в другой E_l имеют порядок ε, ε — малый параметр.

Предположим, что

1) цепи Маркова $\{\xi_n^{(k)},\ n\geqslant 0\}$, $k=\overline{1,r}$, с матрицами вероятностей перехода $\{p_{ij}^{(k)},\ i,\ j\in E_k\}$ эргодичны со стационарными распределениями $\rho^{(k)}=\{\rho_i^{(k)},\ i\in E_k\}$;

2) $0<a_i<\infty$, $i\in E$;

3) существуют такие k, l и $i\in E_k$, что $\sum_{j\in E_l} q_{ij}^{(kl)}\neq 0$. Обозначим, далее, через $f(\cdot)$ функцию, принимающую одинаковые значения на классах состояний E_i, т. е. $f(x)=i$, если $x\in E_i$, $i=\overline{1,r}$.

Теорема (В. С. Королюк, Л. И. Полищук, А. А. Томусяк [66]).

$f\left(\xi_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)$ в смысле конечномерных распределений сходится к цепи Маркова, у которой вероятности переходов между состояниями равны

$$\widehat{p}_{kl}=\frac{\rho^{(k)}Qe^{(l)}}{\rho^{(k)}Qe},\quad k,\ l=\overline{1,\ r},\tag{5.3}$$

а параметры времен сидения в k-м состоянии равны

$$\lambda_k=\frac{q_k}{b_k},$$

где

$$q_k=\rho^{(k)}Qe^{(k)},\quad b_k=\rho^{(k)}Ae^{(k)},\quad A=\{a_{ij}p_{ij},\ i,\ j\in E\},\quad e=\sum_{k=1}^{r}e^{(k)},$$

$e^{(k)}$ — вектор-столбец с компонентами

$$e_i^{(k)}=\begin{cases}1, & i\in E_k,\\ 0, & i\overline{\in}E_k.\end{cases}$$

Этот результат был обобщен в работе В. В. Анисимова [10], рассмотревшего общую задачу об асимптотическом укрупнении ПМП без предположения о конечности математических ожиданий времени пребывания в состоянии. В общем случае предельный укрупненный процесс оказывается полумарковским, распределения времен пребывания в состоянии которого найдены явно (см. также [41]).

Наиболее общие предельные теоремы для ПМП в схеме серий в настоящее время получены в работах В. В. Анисимова и Д. С. Сильвестрова [5, 6, 9, 91—98].

Пусть ПМП $\xi_\varepsilon(t)$ принимает конечное или счетное число возможных значений E и зависит от некоторого параметра ε, ξ_n^ε — состояния в момент n-го перехода, θ_n^ε — времена пребывания в состоянии ξ_n^ε. Пусть заданы случайные величины $\gamma_n^\varepsilon(i,\ x)$, $i\in E$, $x\in[0,\ \infty)$, независимые в совокупности и одинаково распределенные при различных значениях n и при фиксированных ε, i, x. В цитированных выше работах изучено предельное поведение при $t\to\infty$ и $\varepsilon\to 0$ следующего функционала:

$$f^\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\nu^\varepsilon(t)}\gamma_n^\varepsilon(\xi_n^\varepsilon,\ \theta_n^\varepsilon)$$

при различных предположениях относительно характеристик ПМП $\xi_\varepsilon(t)$ и $\gamma_n^\varepsilon(i,\ x)$, $\nu^\varepsilon(t)$.

Наиболее полно изучены случаи, когда $\nu^\varepsilon(t)=N^\varepsilon(t)$ — число переходов процесса $\xi_\varepsilon(t)$ за время $(0, t]$, либо $\nu^\varepsilon(t)=$ $=\min\{N^\varepsilon(t), \zeta_\varepsilon\}$, где $\zeta_\varepsilon=\max\left\{n:\prod_{k=1}^{n}\zeta_k^\varepsilon(\xi_k^\varepsilon)=1\right\}$, а $\zeta_k^\varepsilon(i)$ — независимые в совокупности случайные величины, принимающие два значения 0 и 1 с вероятностями $p^\varepsilon(i)$ и $1-p^\varepsilon(i)$ соответственно.

В частности, пусть $E=\{\overline{1, n}\}$, $\nu^\varepsilon(t)=N^\varepsilon(t)$ и $\gamma_n^\varepsilon(i, x)=$ $=\alpha_\varepsilon\varphi_i+\beta_\varepsilon f_i x$, где α_ε и β_ε — нормирующие множители, а φ_i и f_i — действительные параметры. При таком задании функционала $f^\varepsilon(t)$ можно получить совместные предельные распределения векторов $\vec{N}(t)=\{N_i(t), i\in E\}$ и $\vec{\Omega}(t)=\{\Omega_i(t), \in E\}$, где $\Omega_i(t)$ — суммарное время, проведенное процессом $_\varepsilon(t)$ в состоянии i за время $(0, t]$ при $\varepsilon\to 0$.

Основные предположения, при которых доказываются предельные теоремы для функционала $f^\varepsilon(t)$, состоят в следующем. Во-первых, предполагается, что вложенная в ПМП цепь Маркова ξ_n^ε сходится к эргодической предельной цепи Маркова. Во-вторых, предполагается, что одинаково распределенные случайные величины $\gamma_k^\varepsilon(i, x)$ при фиксированных i и x притягиваются к некоторому безгранично делимому распределению. Наконец, предполагается также, что времена пребывания в отдельных состояниях, либо времена возвращения в фиксированное состояние ПМП также притягиваются к некоторому безгранично делимому распределению. При этом используется представление рассматриваемого функционала $f^\varepsilon(t)$ в виде суммы независимых одинаково распределенных величин, накопленных за время возвращения в фиксированное состояние. (Обобщение метода Деблина).

В работах Д. С. Сильвестрова [101, 102] рассматривались также более общие задачи сходимости случайных процессов $f^\varepsilon(st)$, $s\in[0, 1]$ и функционалов от таких процессов, непрерывных в равномерной топологии или в топологии А. В. Скорохода.

Глава II

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

В последнее время появилось значительное число работ по теории массового обслуживания, теории надежности, исследованию операций, в которых изучаются системы с помощью полумарковских процессов. В этот далеко не полный обзор по применениям полумарковских процессов включены, прежде всего, те работы, которые представляют методологический интерес или в которых получены новые результаты.

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Работы, в которых исследуются системы массового обслуживания, можно разделить на те, где анализируются системы массового обслуживания с помощью вложенных полумарковских процессов, процессов марковского восстановления и те, в которых применяются полумарковские процессы для описания систем массового обслуживания.

Так же, как и с помощью вложенных цепей Маркова, при исследовании немарковских систем благодаря вложенным полумарковским процессам можно получить ценную информацию относительно ее параметров. Так, в работе Фабенса [148] исследуется с помощью вложенного полумарковского процесса однолинейная система с ожиданием типа $M|G|1$, когда обслуживание протекает партиями объема K в течение случайного промежутка времени с функцией распределения $H(x)$. Если в очереди имеется меньше, чем K требований, и обслуживающее устройство свободно, то очередное обслуживание начинается в момент времени, когда в очереди станет K требований. Пусть $X(t)$ — число требований в системе в момент t. В работе стационарные вероятности

$$P_i=\lim_{t\to\infty}P\{X(t)=i|X(0)\}$$

определяются через стационарные вероятности ρ_i и p_i для вложенной цепи Маркова $\xi_n = X(t_n+0)$, $n=1, 2, \ldots$, и вложенного полумарковского процесса, где в качестве точек регенерации выбираются моменты $\{\tau_n, n=1, 2, \ldots\}$ ухода требований из системы. Для производящей функции

$$\pi(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\rho_i z^i$$

вложенной цепи Маркова $\{\xi_n\}$ получена формула

$$\pi(z)=\frac{\varphi(1)k(z)}{\varphi(z)}, \tag{6.1}$$

где

$$k(z)=\sum_{j=0}^{\infty}k_j z^j,$$

$$k_j=\int_0^\infty e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^j}{j!}\,dH(u)$$

и

$$\varphi(z)=\frac{z^K-k(z)}{(z-1)(z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{K-1})},$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{K-1}$ — корни внутри единичного круга уравнения $z^K=k(z)$.

Вложенный полумарковский процесс $\xi(t)$ строится таким образом, что его переходы происходят в моменты τ_n, $n = 1, 2, \ldots$, и в моменты τ_n', $n = 1, 2, \ldots$, когда длина очереди равна K.

Для вложенного полумарковского процесса

$$P_i(x) = \begin{cases} H(x), & i \geqslant K, \\ 1 - \sum\limits_{j=0}^{K-i-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}, & i < K, \end{cases} \tag{6.2}$$

где λ — интенсивность входящего потока, а стационарные вероятности вложенного ПМП согласно (4.2) равны:

$$\rho_i^* = \begin{cases} c\rho_i, & i < K, \\ c(\rho + \rho_K), & i = 1, \\ c\rho_i, & i > K, \end{cases} \tag{6.3}$$

где

$$c = \frac{1}{1+\rho} \text{ и } \rho = \sum_{i=0}^{K-1} \rho_i.$$

Стационарные вероятности $F_i(x)$ для линейчатого марковского процесса $\{\xi(t), U(t)\}$ согласно формуле (4.3) с учетом (6.3) равны

$$F_i(x) = \begin{cases} c\rho_i \int\limits_0^x \sum\limits_{j=0}^{K-i-1} \frac{(\lambda u)^j}{j!} e^{-\lambda u} du, & i < K, \\ c(\rho + \rho_k) \int\limits_0^x [1 - H(u)]\, du, & i = K, \\ c\rho_i \int\limits_0^x [1 - H(u)]\, du, & i > K. \end{cases} \tag{6.4}$$

Наконец, стационарные вероятности P_i определяются следующим образом:

$$P_i = \frac{c}{\lambda} \sum_{j=0}^{i} \rho_j, \quad i < K,$$

$$P_i = c \sum_{j=K}^{i} \rho_j \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda u)^{i-j}}{(i-j)!} e^{-\lambda u} [1 - H(u)]\, du +$$

$$+ \rho \int\limits_0^\infty \frac{(\lambda u)^{i-K}}{(i-K)!} e^{-\lambda u} [1 - H(u)]\, du, \quad i \geqslant K.$$

Аналогичным образом исследуются в работе Ламботт [191] однолинейная система $M|G|1$ и $GI|M|1$. По вложенной цепи Маркова $\{\xi_n\}$ конструируется вложенный полумарковский процесс. Показано, что стационарное распределение длины очереди $\{P_i\}$ выражается через стационарные распределения вложенного полумарковского процесса

$$\xi(t) = X_{N(t)}, \quad \text{где} \quad N(t) = \sup\{n\colon \tau_n \leqslant t\},$$

где τ_n — моменты ухода требований в случае системы $M|G|1$ и τ_n — моменты поступления требования в случае системы $GI|M|1$. Для системы $M|G|1$ получено

$$P_i = \sum_{j=0}^{i} \int_0^{\infty} \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = i \mid \xi(t) = i,\ u(t) = x\}\, dF_j^{+}(x),$$

где

$$F_j^{+}(x) = \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = j,\ u(t) \leqslant x\},$$

а для системы $GI|M|1$

$$P_i = \sum_{j=0}^{i} \int_0^{\infty} \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = i|\xi(t) = j,\ v(t) = x\}\, dF_j^{-}(x),$$

где

$$F_j^{-}(x) = \lim_{t\to\infty} P\{\xi(t) = j,\ v(t) \leqslant x\}.$$

В работе Цинлара [141] исследуются однолинейные системы $M|G|1$ и $GI|M|1$ с ожиданием с помощью процессов марковского восстановления.

Система $GI|M|1$ описывается процессом марковского восстановления, $\{\xi_n, \tau_n\}$, где $X(t)$ — длина очереди в момент t, τ_n — момент поступления n-го требования и $\xi_n = X(\tau_n - 0)$.

Уравнение марковского восстановления (2.1) в этом случае имеет вид:

$$P_j(X(t) = k) = [1 - F(t)]\, H_{jk}(t) + \\ + \sum_{\nu} \int_0^{t} Q_{j\nu}(du)\, P_{\nu}(X(t-u) = k), \tag{6.6}$$

где

$$H_{jk}(t) = \begin{cases} e^{-\mu t} \dfrac{(\mu t)^{j+1-k}}{(j+1-k)!}, & 0 < k < j+1, \\ \displaystyle\sum_{n=j+1}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}, & k = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$\sum_j Q_{ij}(x) = P_i(x) = F(x)$ — ф. р. промежутков времени между поступлениями требований. Применяя теорему 3.3 для (6.6), получим, что при $\alpha\mu > 1$, где $\alpha = \int\limits_0^\infty [1 - F(x)]\,dx < \infty$, а μ — интенсивность обслуживания, существует стационарное распределение длины очереди

$$P_i = \frac{1}{\alpha\mu}(1-\omega)\,\omega^{i-1},$$

где ω — наименьший корень уравнения

$$z = \overline{F}(\mu(1-z)).$$

В случае системы $M|G|1$ процесс $\{\xi_n, \tau_n\}$ является марковским процессом восстановления, где τ_n — моменты ухода требований, а $\xi_n = X(\tau_n + 0)$ — длина очереди в моменты ухода из системы. В этом случае уравнение марковского восстановления имеет вид:

$$P_j\{X(t) = k\} = \begin{cases} \int\limits_0^t R_{j0}(du)\, e^{-\lambda(t-u)}, & \text{если } k = 0, \\ \int\limits_0^t R_{j0}(du) \int\limits_0^{t-u} \lambda e^{-\lambda x}[1 - H(t-u- \\ \quad - x)]\, H_{k-1}(t-u-x)\,dx + \\ \quad + \sum\limits_{\nu=1}^{k} \int\limits_0^t R_{j\nu}(du)\,[1 - H(t-u)] \times \\ \quad \times H_{k-\nu}(t-u), \; k > 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

где $R_{ij}(t)$ — элементы матрицы $R(t) = \sum\limits_n Q^n(t)$, а

$$H_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Если $\rho = \lambda\beta$; где λ — интенсивность входящего потока и $\beta = \int\limits_0^\infty [1 - H(u)]\,du < \infty$ — математическое ожидание времени обслуживания, то

$$P_k = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } k = 0, \\ \lambda \int\limits_0^\infty [1 - H(x)] \left[\sum\limits_{\nu=1}^{k} \rho_k H_{k-\nu}(x) + \rho_0 H_{k-1}(x)\right] dx, & k > 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Из (6.8), переходя к производящей функции, получим известную формулу Хинчина — Поллячека:

$$\sum p_k z^k = \frac{(1-\rho)(z-1)\widetilde{H}(\lambda(1-z))}{z - \widetilde{H}(\lambda(1-z))} = \sum \rho_k z^k.$$

В статье Шеля [222] исследуется связь между стационарным распределением вложенной цепи Маркова и стационарным распределением исходного процесса. Для систем $M|G|1$ предполагается, что функция распределения времени обслуживания зависит от длины очереди в момент ухода требований. Такая система изучается с помощью вложенного полумарковского процесса, заданного вероятностями переходов:

$$Q_{ij}(x)=\begin{cases}(1-e^{-\lambda x})*R_j^0(x) & \text{для любого } j,\ i=0\\ R_{j-i+1}^i(x) & j\geqslant i-1\geqslant 0,\\ 0 & j\leqslant i-2\end{cases} \qquad (6.9)$$

и вложенной цепи Маркова, для которой вероятности перехода равны

$$p_{ij}=\begin{cases}R_j^0(\infty) & \text{для любого } j,\ i=0\\ R_{j-i+1}^i(+\infty) & j\geqslant i-1\geqslant 0,\\ 0 & j\leqslant i-2,\end{cases}$$

где

$$R_k^i(x)=\frac{1}{k!}\int_0^x e^{-\lambda v}(\lambda v)^k\,dH_i(v),$$

$$b_j=\int_0^\infty[1-H_j(v)]\,dv.$$

Показано, что вложенная цепь Маркова эргодическая, если $\sup\limits_{i\geqslant j}\lambda b_i<1$ для некоторого целого числа j и, что верна теорема Хинчина о стационарности длины очереди.

Аналогично исследуется однолинейная система $GI|M|1$, когда распределение промежутков времени между поступлениями требований $G_i(x)$ зависит от длины очереди в момент поступления требования. Найдено стационарное распределение длины очереди $P_k=\dfrac{1}{\mu\sum\limits_i\rho_i\alpha_i^{\rho_k}}$, где ρ_i — стационарное распределение вложенной цепи Маркова, а

$$\alpha_i=\int_0^\infty[1-G_i(x)]\,dx<\infty.$$

Интересное исследование однолинейной системы с ожиданием с помощью вложенного полумарковского процесса проводится в работе Нейтса [209]. Пусть $X(t)$ — число требований в системе в момент t. Выберем в качестве точек регенерации моменты τ_n следующим образом: $\tau_0=0$ и τ_{n+1}, $n>0$ — моменты времени, в которые все требования, имеющиеся в моменты τ_n, будут полностью обслужены. Если в момент τ_n нет требований, то τ_{n+1} — момент времени, когда первое поступившее требование после момента τ_n будет обслужено. Строится вложенный полумарковский процесс

$$\xi(t) = X_{N(t)},$$

где

$$\xi_n = X(\tau_n + 0) \text{ и } N(t) = \sup\{n : \tau_n \leqslant t\}$$

в предположении, что $X(\tau_0) = i$, для которого

$$Q_{ij}(x) = \int_0^x e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^j}{j!} dH_i(u), \ i > 0, \ j \geqslant 0,$$

$$Q_{0j}(x) = \int_0^x [1 - e^{-\lambda(x-u)}] \, dQ_{1j}(u), \quad j \geqslant 0, \tag{6.10}$$

где $H_i(x)$ i-кратная свертка $H(x)$.

Вводится вероятность

$${}_0P_{ij}^{(n)}(t) = P\{\tau_n \leqslant t, \xi_n = j, \xi_k \neq 0, \ k = 0, \ldots, n-1, \xi_0 = i\}$$

и показывается, что производящая функция

$${}_0P_i^{(n)}(s, z) = \sum_{j=0}^{\infty} {}_0p_{ij}^{(n)}(s)\, z^j,$$

где ${}_0P_{ij}^{(n)}(s)$—преобразование Лапласа — Стилтьеса ${}_0P_{ij}^{(n)}(t)$ может быть с помощью функций $\gamma_n(s, z)$ представлена в виде ${}_0P_i^{(n)}(s, z) = \gamma_n^i(s, z) - \gamma_{n-1}^i(s, 0)$, $n \geqslant 1$.

Основные характеристики системы выражаются через функции $\gamma_n(s, z)$, которые определяются с помощью рекуррентных формул:

$$\gamma_0(s, z) = z;$$

$$\gamma_{n+1}(s, z) = \widetilde{H}(s + \lambda - \lambda\gamma_n(s, z)), \ n \geqslant 0.$$

Показывается, что при $\lambda b < 1$, $\lim_{n\to\infty} \gamma_n(s, 0) = \gamma(s)$ является преобразованием Лапласа — Стилтьеса для функции распределения периода занятости при $i = 1$, а производящая функция стационарного распределения вложенной цепи Маркова имеет вид

$$\rho(z) = 1 - \rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma_n(0, z))$$

и

$$\rho_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \gamma_n(0,0)]}.$$

С помощью рассмотренного вложенного полумарковского процесса определяется распределение для виртуального времени ожидания $\eta(t)$

$$\int_0^\infty e^{-st} M\{e^{-\eta(t)\theta} | X(0) = i\} dt = \frac{\gamma^i(s) - s\gamma^i(s)[s + \lambda(1 - \gamma(s))]^{-1}}{s - \theta + \lambda[1 - \rho(\theta)]}.$$

В работе Нейтса [201] с помощью рассмотренного вложенного полумарковского процесса исследуются приоритетные системы $M|G|1$, в предположении, что требования к моменту t упорядочены в очереди согласно длительности их времен обслуживания (в порядке убывания или в порядке возрастания).

Обозначим через $\underline{\eta}(t, x)$ и $\overline{\eta}(t, x)$ виртуальное время ожидания требования с временем обслуживания $x (x > 0)$, в случае, когда требования обслуживаются в порядке возрастания времени обслуживания, соответственно в порядке убывания времени обслуживания.

Показано, что

$$M_x M_{\overline{\eta}}(\infty, x) = \frac{\lambda\delta}{2(1 - \lambda^2 b^2)} \left[1 + 2\lambda \int_0^\infty u H(u)\, dH(u)\right],$$

где

$$\delta = \int_0^\infty x^2 dH(x), \quad \beta = \int_0^\infty x dH(x)$$

и

$$M_x M_{\underline{\eta}}(\infty, x) = \frac{\lambda\delta}{2(1 - \lambda^2\delta^2)} \left[1 + 2\lambda\delta - 2\lambda \int_0^\infty u H(u)\, dH(u)\right].$$

В работе Нейтса [202] обобщается модель системы с ожиданием $M|G|1$ на случай, когда система может находиться в m различных фазах. Распределение длительности обслуживания $H_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, и интенсивности входящего потока λ_i, $i = 1, \ldots, m$, зависит от номера фазы, а времена пребывания системы в i-й, $i=1, \ldots, m$, фазе являются независимыми показательно-распределенными случайными величинами с интенсивностями α_i, $i = 1, \ldots, m$.

Если I_t — фаза, в которой находится система в момент t, а $N(t_1, t_2)$ — число поступлений требований за (t_1, t_2), тогда

$$P_{ij}(n, t) = P\{I_t = j,\ N_t = n \mid I_0 = i\},\ N_t = N(0, t),$$

удовлетворяют уравнению марковского восстановления:

$$P_{ij}(n, t) = \delta_{ij} e^{-(\lambda_i + \alpha_i)t} \frac{(\lambda_i t)^n}{n!} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \alpha_i p_{ik} \sum_{l=0}^{n} \int_0^t e^{-(\lambda_i + \alpha_i)\tau} \frac{(\lambda_i \tau)^l}{l!} P_{kj}(t - \tau, n - l)\, d\tau. \quad (6.11)$$

Показано, что длины очереди в моменты ухода требований связаны соотношением

$$\nu_{n+1} = (\nu_n - 1 + \varkappa_n)^+,$$

где $\varkappa_n$ — число требований, поступивших в систему за время обслуживания n-го требования. Если J_n — фаза в момент ухода τ_n n-го требования, то $\{J_n, \nu_n, \tau_n\}$ образует процесс марковского восстановления, порожденный полумарковской матрицей:

$$Q(i, k, j, k', x) = \int_0^x P_{ij}(k' - k + 1, u)\, dH_i(u), \quad k' \geqslant k - 1 \geqslant 0,$$

$$Q(i, k, j, k', x) = 0, \quad k' < k - 1, \quad (6.12)$$

$$Q(i, 0, j, k' x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \int_0^x P_{ik}(0, u) Q(k, 1, j, k', x - u)\, du, \ k = 0.$$

В работе найдены необходимые и достаточные условия существования стационарности системы:

$$\rho^* < 1, \quad (6.13)$$

где

$$\rho^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \int_0^\infty k_i(t)\, dH_i(t), \quad k_{ij}(t) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} P_{ij}(z, t), \quad k_i(t) = \sum_{j=1}^{m} k_{ij}(t),$$

а π_i удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m} \pi_i \int_0^\infty P_{ij}(1, u)\, dH_i(u) = \pi_j, \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1.$$

С помощью построенного вложенного процесса марковского восстановления определены различные характеристики системы.

Многие системы массового обслуживания могут быть описаны случайными процессами, поведение которых во времени определяется цепью Маркова и полумарковским процессом. Такие процессы рассматривались в работах И. А. Ежова [47, 48]. В [47] показано, что для однолинейной системы с ожиданием типа $M|G|1$ определение характеристик периода занятости системы, максимальной длины очереди сводится к определению времени пребывания цепи Маркова с полумарковским вместительством случая в определенном подмножестве состояний.

В статье И. А. Ежова и В. С. Королюка [55] аналогичные характеристики определяются с помощью цепи Маркова с полумарковским вмешательством случая для систем типа $M|G|1$, $GI|M|1$, когда требования поступают группами по ν_n, где ν_n — случайная величина с распределением $r_m = P\{\nu_n = m\}$. В частности, получено для системы $M|G|1$ функциональное уравнение для производящей функции $\varphi(s) = Me^{-s\gamma_0^{(1)}}$ периода занятости

$$\varphi(s) = \widetilde{H}[s + \lambda - \lambda R(\varphi(s))],$$

где $R(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m r_m$, обобщающее известный результат Такача.

Ряд характеристик систем массового обслуживания выражается через характеристики времен пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. Так для систем массового обслуживания, которые могут быть описаны полумарковским процессом, и вероятности перехода которого удовлетворяют условиям

$$Q_{ij}(x) > 0, \quad j \leqslant i+1,$$
$$Q_{ij}(x) = 0, \quad j > i+1,$$

в работе С. М. Броди [21] получены следующие рекуррентные формулы

$$\widetilde{T}_{k-1}^{(k)}(s) = \frac{\widetilde{Q}_{k-1,k}(s)}{1 - \sum_{i=1}^{k-2} \widetilde{Q}_{k-1,i}(s) \prod_{j=1}^{k-2} \widetilde{T}_j^{(j+1)}(s) - \widetilde{Q}_{k-1,k-1}(s)}, \quad k > 2, \tag{6.14}$$

и

$$p_{k-1,k} m_{k-1}^{(k)} = a_{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} p_{k-1,i} \sum_{j=1}^{k-2} m_j^{(j+1)},$$

где $\zeta_{k-1}^{(k)}$ — время пребывания полумарковского процесса в множестве состояний $E_{k-1} = \{0, \ldots, k-1\}$, началом в i-ом состоянии $E_k \subset E$, где E — множество состояний полумарковского процесса. С помощью $T_{k-1}^{(k)}(s)$ и $m_{k-1}^{(k)}$ найдены некоторые характеристики систем массового обслуживания с потерями и с ограниченной длиной очереди.

Исследуется система с потерями $GI|M|1$, $M|G|1$ с помощью ПМП в [73].

Имеется ряд работ, у которых описываются системы массового обслуживания, когда входящий поток или время обслуживания является полумарковским.

В работе Цинлара [137] изучена однолинейная система с показательным распределением длительности обслуживания и конечным числом типов требований. Типы требований, последовательно поступающих в систему, образуют однородную цепь Маркова. Интервал между последовательным поступлением требований может зависеть от типов последних двух требований. Автор нашел аналитические выражения для основных характеристик процесса.

В работе С. Н. Симоновой [103] рассматривается многолинейная система с потерями и входящим полумарковским потоком, в предложении, что время обслуживания требования i-го типа имеет показательное распределение с параметром μ_i. Функционирование такой системы описывается однородным марковским процессом $\{\nu_1(t), ..., \nu_k(t), \gamma(t), v(t)\}$, где $\nu_i(t)$ — число требований i-го типа в момент t, $\gamma(t)$ — тип требования, поступающего последним к моменту t, $v(t)$ — время, прошедшее с момента последнего поступления требования к моменту t. Получены формулы для стационарного распределения вероятностей.

Обобщается формула Эрланга в работе Франкена [155] на случай, когда входящий поток является полумарковским, т. е. предполагается, что имеется k типов требований и задана стохастическая матрица $R = \{r_{ij}, i, j \in k\}$, а также семейство функций распределения $G_{ij}(x)$, $i, j \in k$, с конечными средними. Пусть $X(t)$ — число приборов, занятых обслуживанием в момент t. Показывается, что $\{\xi_n, \nu_n\}$ является однородной цепью Маркова, где $\xi_n = x(\tau_n - 0)$, а τ_n — момент поступления n-го требования, ν_n — тип поступившего требования в τ_n. Определяется стационарное распределение

$$p_i^* = \lim_{n\to\infty} \sum_j p\{\xi_n = i, \ \nu_n = j\}.$$

Такая же система исследуется в работе Цинлара [137]. Пусть $X(t)$ — число требований в системе в момент t, а $\xi(t)$ — тип обслуживаемого требования в момент t, и $u_1, u_2, ...$ ..., $\tau_1, \tau_2, ...$ — моменты поступления и ухода требований из системы. Очевидно, что

$$\xi(t) = \begin{cases} \xi_{n-1}, & x(t) = 0, \quad \tau_{n-1} < t < u_n, \\ \xi_n, & x(t) \geqslant 1, \quad \tau_{n-1} < t < \tau_n. \end{cases}$$

В работе изучаются свойства процесса $\{\xi(t), X(t)\}$. При некоторых предположениях относительно матрицы $Q(t)$ показано, что $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\xi(t) = i, \ x(t) = j \mid \xi(0)\}$ существует и не зависит от $\xi(0)$ и $x(0)$, когда

$$\lambda \lim_{n\to\infty} M\gamma_n < 1.$$

Показано, что

$$P\{\xi(t)=j\} = \lim_{n\to\infty} P\{\xi(\tau_n+0)=j\}.$$

§ 7. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Полумарковские процессы находят большое применение в теории надежности резервированных систем, систем с переменным режимом работы, при анализе систем с большим числом элементов.

В работе В. С. Королюка, А. А. Томусяка [67] используется конструктивное построение полумарковских процессов (см. стр. 51) для описания функционирования различных резервированных систем. Рассматривается резервированная система, состоящая из n однотипных рабочих устройств, работающих независимо, m резервных устройств того же типа, находящихся в холодном резерве и r восстанавливающих устройств, работающих независимо. Предполагается, что время работы и время восстановления каждого устройства распределены по показательному заказу с параметрами λ и μ соответственно. Система считается в рабочем состоянии, если работает m устройств. Пусть e_i — состояние системы, соответствующее тому, что r устройств занято. Полумарковский процесс, описывающий функционирование рассматриваемой резервированной системы, задается функциями распределения:

$$S_{i,i-1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-i\mu x}, & 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 1-e^{-r\mu x}, & i > r; \end{cases}$$

$$S_{i,i+1}(x) = \begin{cases} 1-e^{-n\lambda x}, & 1 \leqslant i \leqslant m, \\ 1-e^{-(m+n-i)\lambda x}, & i > m; \end{cases}$$

$$S_{0,1}(x) = 1-e^{-n\lambda x}.$$

Для определения характеристик времени безотказной работы системы следует определить согласно формуле (см. стр. 51) переходные вероятности $p_{i,i\pm1}$, $Q_{i,i\pm1}(x)$ и затем решить системы линейных алгебраических уравнений (5.1) (5.2) при $E_1=\{e_0, e_1, \ldots, e_m\}$.

При больших r и m решение систем уравнений представляет значительные трудности. В этом случае удобно пользоваться следующими рекуррентными формулами

$$m_0^{(m+1)} = \frac{a_m + m_0^m - q_m m_0^{m-1}}{p_m}, \quad p_{i,i+1}=p_i, \; p_{i,i-1}=q_i, \qquad (7.1)$$

$m_0^0=0$, $m_0^l=a_0$, a_l — среднее время пребывания ПМП в состоянии e_l и

$$\widetilde{T}_0^{(m+1)}(s)=\frac{\widetilde{T}_0^{(m)}(s)\,\widetilde{T}_0^{(m-1)}(s)\,\widetilde{Q}_{m,m+1}(s)}{\widetilde{T}_0^{(m-1)}(s)-\widetilde{T}^{(m)}(s)\,\widetilde{Q}_{m,m-1}(s)}. \qquad (7.2)$$

Некоторые случаи таких систем решаются с помощью полумарковского процесса в [22].

В [67] рассматривается резервированная система, когда имеется одно восстанавливающее устройство, время работы каждого имеет произвольную функцию распределения.

С помощью вложенного полумарковского процесса определяются характеристики времени безотказной работы дублированной системы с холодным резервированием в работе В. С. Королюка [64]. Выбираются в качестве точек регенерации (переходов полумарковского процесса) моменты отказа работающего устройства. Вероятности перехода для такой системы определяются следующим образом

$$\begin{aligned} &Q_{01}(x)=F(x),\\ &Q_{11}(x)=\int_0^x H(u)\,dF(u),\\ &Q_{12}(x)=F(x)-\int_0^x H(u)\,dF(u), \end{aligned} \qquad (7.3)$$

где $F(x)$ — функция распределения безотказной работы рабочего устройства, $H(x)$ — функция распределения времени восстановления. Используя формулы для (5.1), (5.2), автор определяет математические ожидания и преобразования Лапласа — Стилтьеса времени безотказной работы, т. е. времени пребывания полумарковского процесса в множестве состояний в подмножестве состояний $\{e_0, e_1\}$ (e_i — состояние системы, когда работает i устройств).

Цинларом [141] рассмотрена система, состоящая из конечного числа элементов m, время безотказной работы которых имеет показательное распределение с интенсивностью λ_i, а $H_k(x)$ — функция распределения времени восстановления, если отказал k-ый элемент системы. Пусть τ_n — моменты отказа системы и ξ_n — тип отказавшего элемента в момент τ_n. Если $H_k(+\infty)<1$, для некоторых k, то система описывается неконсервативным процессом марковского восстановления $\{\xi_n, \tau_n, l\}$, где l — число отказов за время работы системы и $\tau_{l-1}=z<\infty$ с

$$Q_{ij}(x) = \int_0^x H_j(x-u)\lambda_k e^{-\lambda_k u} du,$$

$$Q_{ij}(\infty) = \frac{\lambda_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k} H_j(+\infty). \tag{7.4}$$

Уравнение марковского восстановления для такой системы

$$P_j\{x(t)=k,\ \varepsilon(t)=0\} =$$

$$= \delta_{jk}[H_j(\pm\infty) - H_j(t)] + \sum_{\nu} \int_0^t Q_{j\nu}(du)\, Q_{\nu k}(t-u), \tag{7.5}$$

где $x(t)$ — тип последнего перед моментом t отказавшего элемента, а $\varepsilon(t)=0$ или 1 согласно тому, работает или не работает система в момент $t < z$.

Если $H_k(+\infty)=1$ для всех k, то $L=\infty$ и $z=\infty$ с вероятностью 1. Из (7.5) получено, согласно (3.3),

$$\lim_{t\to\infty} P_j\{x(t)=k,\ \varepsilon(t)=0\} = \frac{\lambda_k b_k}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k b_k},$$

где $b_k = \int_0^\infty [1-H_k(u)]\, du$

и

$$\lim_{t\to\infty} P_j\{\varepsilon(t)=1\} = \frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k b_k}.$$

При решении задач теории надежности, работающих с переменным режимом работы, используются вложенные полумарковские процессы для цепи Маркова, управляемой полумарковским процессом в работах С. М. Броди, В. Д. Шпака [24], С. М. Броди, О. Н. Власенко [22], С. М. Броди, О. Н. Власенко, Б. Г. Марченко [23]. В [24] показано, что такие вложенные полумарковские процессы задаются вероятностями перехода

$$P_{kl}^{ij}(x) = \int_0^x \pi_{ij}^{(k)}(u)\, dQ_{kl}(u), \tag{7.6}$$

где $\pi_{ij}^{(k)}(t) = P(z_k(t) = f_j / z_k(0) = f_i)$. В случае, когда цепь

Маркова $z_k(t)$ имеет поглощающее состояние $f_0 \in F$, то

$$P_{kl}^{ij}(x) = \int_0^x \bar{\pi}_{ij}^{(k)}(u)\, dQ_{kl}(u), \quad f_i \neq f_0,\ f_j \neq f_0 \qquad (7.7)$$

и

$$\bar{\pi}_{ij}^{(k)}(t) = P\{z_k(t) = f_j,\ z_k(u) \neq f_0,\ 0 \leqslant u \leqslant t / z_k(0) = f_i\}.$$

Получены системы линейных алгебраических уравнений для преобразований Лапласа — Стилтьеса времен пребывания вложенного полумарковского процесса и средних времен пребывания в заданном множестве состояний. В [22] рассматривается система, которая может находиться в n режимах. Предполагается, что система, находясь в k режиме работы, может проработать безотказно случайное время η_k, где η_k — показательно-распределенная случайная величина. Такая система описывается вложенным полумарковским процессом, с цепью Маркова $z_k(t)$, $k = 1, 2$, с двумя состояниями и поглощающим состоянием f_0 при $k = 1, 2$, для которого вероятности перехода (7.7) имеют вид:

$$P_{kl}^{11}(x) = \int_0^x e^{-\lambda_l u} dQ_{kl}(u), \quad 1 \leqslant k, l \leqslant n,$$

$$P_{kl}^{1,0}(x) = \int_0^x (1 - e^{-\lambda_l u})\, dP_k(u).$$

В работе вычисляется математическое ожидание и преобразования Лапласа — Стилтьеса для времени безотказной работы в случае, когда $Q_{kl}(x) = r_{kl}H_k(x)$, где r_{kl} — элементы стохастической матрицы, а $H_k(x)$ — функции распределения времени пребывания системы в k-ом режиме. В статье [22] рассматривается частный случай системы с переменным режимом, когда $n = 2$. Для такой же системы, когда в одном из режимов состояние f_0 не является поглощающим, получены некоторые характеристики надежности системы в работе С. М. Броди, Б. Г. Марченко, О. Н. Власенко [24].

В работе Барлоу и Прошан [123] среднее число отказов за $(0, t)$ и некоторые стационарные характеристики надежности выражаются через средние времена возвращения μ_{ij} полумарковского процесса из состояния i в состояние j.

В статье И. А. Ушакова [116] получена формула для математического ожидания времени пребывания полумарковского процесса при $t \to \infty$ в подмножестве состояний $E_1 \subset E$, при условии, что в момент t процесс находится в этом подмножестве состояний.

§ 8. УПРАВЛЯЕМЫЕ ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Важным частным случаем динамического программирования являются марковские управляемые процессы. Естественные обобщения результатов и алгоритмов решения для управляемой марковской цепи на управляемые полумарковские процессы содержатся в работах Ховарда [167] и Джевелла [180, 181]. Это обобщение состоит в том, что время, проведенное системой между переходами, является случайной величиной с произвольным законом распределения, следовательно, может быть охвачен широкий круг задач без существенного усложнения вычисления оптимальных стратегий. Предполагается, что если полумарковский процесс находится в состоянии i и переходит на следующем шаге в состояние j, то доход, получаемый от этого перехода, равен $D_{ij}(t)$, который зависит от i, j, ξ_{ij} и от времени t с момента начала перехода $(0 \leqslant t \leqslant \xi_{ij})$. В работе Джевелла [180] подробно анализируется частный случай линейного поведения дохода, когда

$$D_{ij}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ D_{ij} + d_{ij}t & (0 < t < \xi_{ij}) \end{cases}$$

— средний одношаговый переоцененный доход при выходе из состояния e_l равен:

$$S_l = \sum_E p_{lj}\rho_{lj}.$$

В дальнейшем решается основная задача, состоящая в выборе для всех состояний e_i управлений d_i, которые максимизируют полный ожидаемый доход за время эксперимента, т. е. определение оптимальной стратегии. Показано, что в случае, когда ПМП имеет единственную вложенную цепь Маркова, которая является эргодической, и все a_{ij} конечны, то для ожидаемого дохода, полученного от процесса, эволюционирующего в течение промежутка времени t, при условии, что он начался в состоянии e_i и использовалась оптимальная стратегия, имеет место следующая предельная формула

$$\lim_{t\to\infty} v_l(t) = gt + w_l, \tag{8.1}$$

где

$$g = \frac{\sum \rho_l s_l}{\sum\limits_l \rho_l m_l^{(1)}},$$

а

$$w_l = s_l + \sum_l \left\{ s_j \left[\frac{\mu_{jj}^{(2)}}{2\mu_{jj}^{(1)}} - \frac{\mu_j^{(1)}}{\mu_{jj}^{(1)}} \right] - \frac{c_j}{\mu_{jj}^{(1)}} \right\},$$

c_j — некоторая константа.

Приведен иллюстрирующий пример из теории надежности.

В работе Росса [219] рассматриваются управляемые полумарковские, определенные вероятностями переходов $P(\cdot|x,\alpha)$ и функциями распределения $F(\cdot|x,\alpha,y)$ длительности пребывания процесса в состоянии $x \in X$ до перехода в состояние y при управлении $\alpha \in A$. Если выбрано управление α, то доход, накопленный за время $t \leqslant \Theta_x$, где Θ_x — время пребывания в x, равен $C(t|x,\alpha)$.

Предполагается, что существуют такие $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, что

$$\int\limits_{y \in X} F(\delta \mid x, \alpha, y)\, dP(y \mid x, \alpha) < 1 - \varepsilon. \qquad (8.2)$$

Решается задача о выборе такой стратегии, которая минимизирует математическое ожидание дохода в единицу времени.

В статье Л. Г. Губенко, Э. С. Штатланда [40] определяются условия существования оптимальных стратегий, принадлежащих определенному классу. В качестве стратегии R выбирается марковская стационарная, для которой управляемый процесс является полумарковским.

Управляющие полумарковские процессы используются при решении задач оптимизации, систем массового обслуживания, оптимального выбора режимов и синтеза, сложных технических устройств в работах [44, 106—108]. В работах И. Б. Герцбаха [35, 36] приводятся задачи, связанные с выбором оптимальных способов восстановления систем, которые могут быть описаны с помощью полумарковских процессов. Показано, что задача выбора режимов и профилактики, способа резервирования многих систем сводится к минимизации средних потерь, вычисленных при достаточно больших t. И. Б. Герцбах в [37] решает задачу выбора оптимальной стратегии профилактики систем, используя метод нахождения оптимального управления полумарковского процесса.

В работе М. Г. Теплицкого [109] применяется алгоритм для определения оптимальной стратегии управляемого полумарковского процесса к задачам теории массового обслуживания, чтобы выбрать режим обслуживающих устройств с максимальной производительностью.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Анисимов (Анісімов) В. В.**, Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 3, 3—15 (РЖМат, 1971, 8В61)

2. — , Предельные теоремы для полумарковских процессов. I, II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 2, 3—21 (РЖМат, 1971, 3В22; 3В23)

3. — , Предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний. Докл. АН СССР, 1970, **193**, № 3, 503—505 (РЖМат, 1970, 12В31)
4. — , Предельные распределения функционалов от полумарковского процесса, заданных на фиксированном множестве состояний до момента первого выхода. Докл. АН СССР, 1970, **193**, № 4, 743—745 (РЖМат, 1971, 3В24)
5. — , Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на подмножестве состояний цепи Маркова до момента выхода, в схеме серий. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, вып. 4, 18—26 (РЖМат, 1971, 12В112)
6. — , Предельные теоремы для сумм случайных величин на цепи Маркова, связанные с выходом из множества, образующего в пределе один класс. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, вып. 4, 3—17 (РЖМат, 1971, 12В111)
7. — , Деякі теореми про граничі разподіли сум випадкових величин, зв'язаних в однорідний ланцюг Маркова. Доповіді АН УРСР, 1970, **А**, № 2, 99—103 (РЖМат, 1970, 9В26)
8. — , Многомерные предельные теоремы для цепей Маркова с конечным числом состояний. Докл. АН СССР, 1972, **204**, № 3, 519—521 (РЖМат, 1972, 9В41)
9. — , Некоторые предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным множеством состояний в схеме серий. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, вып. 6, 3—13 (РЖМат, 1972, 9В40)
10. — ,О предельном поведении полумарковского процесса с расщепляющимся множеством состояний. Докл. АН СССР, 1972, **206**, № 4, 777—779 (РЖМат, 1973, 2В62)
11. **Арсенишвили (Арсенішвілі) Г. Л.,** Деякі питання теорії складних напівмарковських процесів. Тезисы докладов V Научной конференции молодых математиков Украины. Киев, 1970
12. — , Некоторые вопросы из теории полумарковских процессов r-го порядка. В сб. Вопросы разработки и внедрения средств вычисл. техн. Тбилиси, 1970, 128—132 (РЖМат, 1971, 5В50)
13. — , Некоторые вопросы теории полумарковских процессов r-го порядка. Докл. III конф. молодых науч. работников и аспирантов, ТНИИСА, 1970
14. — , Об одном классе функционалов для сложных полумарковских процессов с дискретным вмешательством случая. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1970, **58**, № 1, 25—28 (РЖМат, 1970, 11В45)
15. — , Е ж о в И. И., Об одной предельной теореме для полумарковских процессов r-го порядка. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1969, **53**, № 1, 25—28 (РЖМат, 1969, 10В30)
16. — , — , Об одном обобщении цепей Маркова с полумарковским вмешательством случая. Сакартвелос ССР Мецниеребата Академиис моамбе, Сообщ. АН ГрузССР, 1969, **54**, № 2, 285—288 (РЖМат, 1970, 1В73)
17. — , — , О распределении времени пребывания в заданной области полумарковским процессом r-го порядка. Тбилисис университети гамокхенибити математикис институти. Шромеби, Тр. Ин-т прикл. мат. Тбилис. ун-та, 1969, № 2, 151—157 (РЖМат, 1970, 8В56)
18. **Баклан В. В.,** Эргодическая теорема для марковских процессов с дискретным вмешательством случая. Укр. мат. ж., 1967, **19**, № 5, 123—126 (РЖМат, 1968, 7В36)
19. **Беляев Ю. К.,** Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. Тр. VI Всес. совещания по теории

вероятностей и мат. стат. Вильнюс, 1960. Гос. изд-во полит. и науч. лит. ЛитССР, 1962, 309—323 (РЖМат, 1964, 5B146)

20. **Броди С. М.**, Об одной предельной теореме теории массового обслуживания. Укр. мат. ж., 1963, **15**, № 1, 76—79 (РЖМат, 1964, 6B428)

21. — , Исследование систем массового обслуживания с помощью полумарковских процессов. Кибернетика, 1965, № 6, 55—58 (РЖМат, 1966, 9B233)

22. — , Власенко О. Н., Надежность систем со многими режимами работы. В сб. Теория надежности и массовое обслуж. М., Наука, 1969, 165—171 (РЖМат, 1970, 5B231)

23. — , — , Марченко Б. Г., Расчет и планирование испытаний систем на надежность. Киев, Наук. думка, 1970, 192 стр. (РЖМат, 1970, 9B247K)

24. — , Шпак В. Д., Применение ассоциированных полумарковских процессов в анализе надежности систем. I. Кибернетика, 1970, № 5, 90—96 (РЖМат, 1971, 9B318)

25. **Валах В. Я., Королюк В. С.**, Стохастические автоматы со случайным временем реакции и их функционирование в случайных средах. В сб. Автоматы, гибридн. и управляющ. машины. М., Наука, 1972, 38—45 (РЖМат, 1972, 7B371)

26. **Виноградов О. П.**, Задача о распределении максимума длины очереди и ее применение. Теория вероятностей и ее применения, 1968, **13**, № 2, 366—375 (РЖМат, 1969, 2B63)

27. — , Предельные распределения для момента первой потери требования в однолинейной системе массового обслуживания с ограниченным числом мест для ожидания. Мат. заметки, 1968, **3**, № 5, 541—546 (РЖМат, 1968, 10B78)

28. — , Распределение максимума длины очереди в однолинейной системе массового обслуживания. Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Математика, Изв. АН АрмССР, 1968, **3**, № 3, 257—262 (РЖМат, 1969, 2B64)

29. **Висков О. В.**, О системе массового обслуживания с марковской зависимостью между поступлениями требований. Trans 4th Prague Conf. Inform. Theory, Statist. Decis. Funct. Random Process, 1965, Prague, 1967, 627—634 (РЖМат, 1969, 2B57)

30. — , Две асимптотические формулы теории массового обслуживания. Теория вероятностей и ее применения, 1964, **9**, № 1, 177—178 (РЖМат, 1964, 8B69)

31. — , О времени ожидания в смешанной системе массового обслуживания. Тр. Матем. ин-та. АН СССР, 1964, **71**, 26—34 (РЖМат, 1965, 4B25)

32. — , Исмаилов А. И., Система массового обслуживания с ограниченной очередью. Науч. тр. Ташкент. ун-т, 1972, вып. 402, 17—29 (РЖМат, 1972, 7B77)

33. **Гергей Т.**, Ежов И. И. (Єжов I. I.), Цуканов И. Н. (Цуканов I. М.), Цепи Маркова, управляемые сложным процессом восстановления. В сб. Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. I. Киев, 1969, 93—109 (РЖМат, 1970, 7B51)

34. — , — , — , Про стаціонарний розподіл станів однієї системи масового обслуговування. Доповіді АН УРСР, 1971, **А**, № 10, 876—878, 955 (РЖМат, 1972, 1B121)

35. **Герцбах И. Б.**, Формулировка некоторых оптимальных задач теории надежности. LatvPSR Zinātņu Akad. vēstis, Изв. АН ЛатвССР, 1963, № 8, 25—31 (РЖМат, 1964, 9B79)

36. — , Модели профилактики. (Теоретические основы планирования профилактических работ). М., Сов. радио, 1969, 214 стр. (РЖМат, 1969, 8B133K)

37. — , Оптимальное управление полумарковским процессом при нали-

чии ограничений на вероятности состояний. Кибернетика, 1970, № 5, 56—61 (РЖМат, 1971, 6В87)
38. **Гнеденко Б. В.,** О ненагруженном дублировании. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 4, 3—12 (РЖМат, 1965, 2В291)
39. — , Коваленко И. Н., Введение в теорию массового обслуживания. М., Наука, 1966, 431 стр. (РЖМат, 1968, 12В83К)
40. **Губенко Л. Г.,** Штатланд Э. С., Об управляемых полумарковских процессах. Кибернетика, 1972, № 2, 26—29 (РЖМат, 1972, 9В56)
41. **Гусак Д. В.,** Королюк В. С., Асимптотическое поведение полумарковских процессов с расщепляемым множеством состояний. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, вып. 5, 43—50 (РЖМат, 1971, 11В90)
42. **Дикарев В. Е.,** Исследование надежности восстанавливаемых систем методом марковских процессов с дискретным вмешательством случая. В сб. Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 2. Киев, 1969, 22—32 (РЖМат, 1970, 9В239)
43. — , Обслуживание комплекса сложных систем. В сб. Теор. кибернетика. Вып. 3. Киев, 1970, 80—97 (РЖМат, 1971, 6В684)
44. — , Стратегии профилактического обслуживания системы при неполной проверке ее работоспособности. В сб. Мат. методы исслед. и оптимиз. систем. Вып. 4. Киев, 1970, 25—36 (РЖМат, 1971, 6В550)
45. **Добрыдень В. А.,** Оптимальное наблюдение полумарковского процесса. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 4, 47—49 (РЖМат, 1972, 2В265)
46. **Ежов И. И.,** *О времени достижения заданной области в случае цепи Маркова с дискретным вмешательством случая.* Доповiдi АН УРСР, 1966, № 7, 851—854 (РЖМат, 1966, 12В42)
47. — , Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс. Укр. мат. ж., 1966, 18, № 1, 48—65 (РЖМат, 1966, 9В40)
48. — , Эргодическая теорема для марковских процессов, описывающих общие системы массового обслуживания. Кибернетика, 1966, № 5, 79—81 (РЖМат, 1967, 5В48)
49. — , Эргодические теоремы для марковских процессов с дискретным вмешательством случая. Доповiдi АН УРСР, 1966, № 5, 579—582 (РЖМат, 1966, 10В35)
50. — , Об одном обобщении процессов восстановления. Вiсник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1968, № 10, 55—59 (РЖМат, 1969, 6В60)
51. — , О распределении минимума полумарковского процесса, описывающего однолинейную систему обслуживания с ожиданием. В сб. Надежность и эффективн. дискретн. систем. Рига, Зинатне, 1968, 27—45 (РЖМат, 1969, 3В43)
52. — , Эргодическая теорема для вероятностных процессов с полумарковским вмешательством случая. Укр. мат. ж., 1968, 20, № 3, 384—388 (РЖМат, 1969, 11В48)
53. — , О распределении величины перескока заданного уровня последовательностью максимумов случайных величин, управляемых цепью Маркова. Укр. мат. ж., 1969, 21, № 6, 831—836 (РЖМат, 1970, 7В53)
54. — , Гергей Т., Цуканов И. Н., Время пребывания цепи Маркова, управляемой сложным процессом восстановления, в заданной области. В сб. Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 2. Киев, 1969, 99—108 (РЖМат, 1970, 7В52)
55. — , Королюк В. С., Полумарковские процессы и их приложения. Кибернетика, 1967, № 5, 58—65 (РЖМат, 1968, 11В50)
56. — , Призва Г. И., Об одном обобщении цепей Маркова с непрерывным временем. Вiсник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1966, № 5, 145—152 (РЖМат, 1968, 4В48)
57. — , — , Некоторые предельные теоремы для функционалов от сумм случайных величин, управляемых цепью Маркова. Кибернетика, 1969, № 3, 63—67

58. — , Скороход А. В., Марковские процессы, однородные по второй компоненте. I. Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, № 1, 3—14 (РЖМат, 1969, 11В42)
59. — , — , Марковские процессы, однородные по второй компоненте. II. Теория вероятностей и ее применения, 1969, **14**, № 4, 679—692 (РЖМат, 1970, 7В48)
60. **Закусило О. К.**, Редеющие полумарковские процессы. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, вып. 6, 54—59 (РЖМат, 1972, 8В66)
61. **Зубова А. Ф.**, О холодном резервировании с восстановлением. Автоматика и телемеханика, 1965, **26**, № 10, 1800—1808 (РЖМат, 1966, 5В155)
62. **Ковалева Л. М.**, О времени пребывания двух независимых полумарковских процессов в заданном состоянии. Укр. мат. ж., 1968, **20**, № 6, 837—841 (РЖМат, 1969, 4В58)
63. — , О времени пребывания в заданном состоянии простейшей полумарковской системы. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 1, 100—108 (РЖМат, 1970, 6В64)
64. **Королюк В. С.**, Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. Укр. мат. ж., 1965, **17**, № 3, 123—128 (РЖМат, 1965, 10В32)
65. — , Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний. Укр. мат. ж., 1969, **21**, № 6, 842—845 (РЖМат, 1970, 7В50)
66. — , Полищук Л. И., Томусяк А. А., Об одной предельной теореме для полумарковских процессов. Кибернетика, 1969, № 4, 144—145 (РЖМат, 1970, 2В59)
67. — , Томусяк А. А., Описание функционирования резервированных систем посредством полумарковских процессов. Кибернетика, 1965, № 5, 55—59 (РЖМат, 1967, 9В140)
68. — , — , О некоторых стационарных характеристиках полумарковских процессов. Кибернетика, 1971, № 5, 65—68 (РЖМат, 1972, 2В64)
69. — , Турбин А. Ф., Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 2, 133—143 (РЖМат, 1971, 3В37)
70. — , — , Об одном методе доказательства предельных теорем для некоторых функционалов от полумарковских процессов. Укр. мат. ж., 1972, **24**, № 2, 234—240 (РЖМат, 1972, 8В27)
71. **Креденцер Б. П.**, Об оптимальной загрузке двухприоритетной системы обслуживания с ожиданием. Автоматика и телемеханика, 1970, № 9, 145—150 (РЖМат, 1971, 3В47)
72. — , Оценка надежности систем с аппаратурной и временной избыточностями и мгновенным обнаружением отказов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 4, 58—69 (РЖМат, 1972, 2В266)
73. **Кухта Т. К.**, Определение вероятности потери с помощью полумарковских процессов. В сб. Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. I. Киев, 1968, 67—73 (РЖМат, 1969, 9В49)
74. **Лев Г. Ш.**, О сходимости полумарковских процессов умножения со сносом к диффузионному процессу. Теория вероятностей и ее применения, 1972, 17, № 3, 583—588 (РЖМат, 1972, 11В63)
75. — , Полумарковские процессы умножения со сносом. Теория вероятностей и ее применения, 1972, **17**, № 1, 160—166 (РЖМат, 1972, 7В68)
76. **Матвиишин Я. А.**, Сучков Л. Н., Об одной задаче оптимального управления полумарковским объектом. В сб. Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 2. Киев, 1969, 42—49 (РЖМат, 1970, 8В80)
77. **Морозов В. Г.**, О топологических методах исследования конечных полумарковских автоматов. В сб. Автоматы, гибридн. и управляющ. машины. М., Наука, 1972, 50—59 (РЖМат, 1972, 7В370)
78. **Попов П. И.**, Черенков А. П., Асимптотический метод расчета на-

дежности марковских систем. В сб. Теория надежности и массовое обслуж., М., Наука, 1969, 178—183 (РЖМат, 1970, 7В222)
79. **Пресман Э. Л.**, Время пребывания одной системы в неисправном состоянии. Тр. Матем. ин-та. АН СССР, 1964, **71**, 78—81 (РЖМат, 1965, 4В27)
80. **Призва (Прізва Г. Й.) Г. И.**, О распределении некоторых функционалов от сумм случайных величин, управляемых цепью Маркова. Тезисы Всесоюзного межвузовского симпозиума по прикладной математике и кибернетике. Горький, 1967
81. — , Про одну граничну теорему для напівмарковських процесів. Доповіді АН УРСР, 1967, **А**, № 9, 820—824 (РЖМат, 1969, 3В38)
82. — , Об одном обобщении функций восстановления. Тр. IV Республиканской конференции молодых математиков Украины. Киев, 1968
83. — , Эргодична теорема для одного класу марковських процесів. Доповіді АН УРСР, 1968, **А**, № 8, 720—723 (РЖМат, 1969, 7В35)
84. — , Симонова С. Н., О распределении величины первого перескока. Укр. мат. ж., 1967, **19**, № 3, 117—121 (РЖМат, 1968, 11В51)
85. **Рыков В. В.**, Ястребенецкий М. А., Регенерирующие процессы с несколькими типами точек регенерации. В сб. Большие системы. Массовое обслуж. Надежность. М., Наука, 1970, 203—208 (РЖМат, 1971, 4В82)
86. — , — , О регенерирующих процессах с несколькими типами точек регенерации. Кибернетика, 1971, 3, 82—86 (РЖМат, 1972, 1В106)
87. **Сапаговас И.**, О сходимости сумм марковских процессов восстановления к процессу Пуассона. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1966, **6**, № 2, 271—277 (РЖМат, 1967, 6В25)
88. — , О сходимости сумм марковских процессов восстановления к многомерному процессу Пуассона. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1969, **9**, № 4, 817—826 (РЖМат, 1970, 8В90)
89. **Сильвестров (Сільвестров) Д. С.**, Асимптотическое поведение времени достижения для сумм случайных величин, управляемых регулярным полумарковским процессом. Докл. АН СССР, 1969, **189**, № 5, 949—951 (РЖМат, 1970, 4В24)
90. — , Граничні розподіли для випадкового блукання на прямій, зв'язаного в ланцюг Маркова. Доповіді АН УРСР, 1970, **А**, № 4, 326—329 (РЖМат, 1970, 12В30)
91. — , Предельные теоремы для дискретного случайного блуждания на полупрямой, управляемого цепью Маркова. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 1, 193—204 (РЖМат, 1970, 9В56)
92. — , Предельные теоремы для дискретного случайного блуждания на полупрямой, управляемого цепью Маркова. II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 2, 158—166 (РЖМат, 1971, 3В25)
93. — , Предельные теоремы для непрерывного блуждания на полупрямой, управляемого марковским процессом с двумя состояниями, в схеме серий. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 1, 205—215 (РЖМат, 1970, 9В57)
94. — , Предельные теоремы для непрерывного блуждания на полупрямой, управляемого марковским процессом с двумя состояниями, в схеме серий. II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 2, 167—171 (РЖМат, 1971, 3В26)
95. — , Предельные теоремы для полумарковских процессов и их применения. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 3, 155—172 (РЖМат, 1971, 8В59)
96. — , Предельные теоремы для полумарковских процессов и их применения. II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1970, вып. 3, 173—194 (РЖМат, 1971, 8В60)
97. — , Предельные теоремы для функционалов от процессов ступенчатых сумм случайных величин, определенных на полумарковском про-

цессе с конечным множеством состояний. Докл. АН СССР, 1970, 195, № 5, 1036—1038 (РЖМат, 1971, 7В60)
98. — , Граничні теореми для напівмарковських процесів. Доповіді АН УРСР, 1971, А, № 11, 987—989 (РЖМат, 1972, 2В28)
99. — , Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. Изд-во Киев. ун-та. Киев, 1971.
100. — , Предельные теоремы для полумарковских схем суммирования. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, вып. 4, 153—170 (РЖМат, 1971, 12В55)
101. — , О сходимости слабозависимых процессов в равномерной топологии. I. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, вып. 6, 109—117 (РЖМат, 1972, 9В23)
102. — , О сходимости слабозависимых процессов в равномерной топологии. II. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, вып. 7, 132—145 (РЖМат, 1973, 1В56)
103. **Симонова С. Н.**, О многолинейной системе с потерями с входящим полумарковским потоком требований. Кибернетика, 1967, № 6, 48—53 (РЖМат, 1968, 6В59)
104. **Соловьев А. Д.**, Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1964, № 5, 119—121 (РЖМат, 1965, 6В114)
105. — , Резервирование с быстрым восстановлением. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1970, № 1, 56—71 (РЖМат, 1970, 7В234)
106. **Сучков Л. Н.**, Оптимизация характеристик надежности сложных систем с помощью управляемых полумарковских процессов. В сб. Материалы IV Респ. научн. конференции молодых исследователей по системотехнике, 1969. Т. 2. Киев, 1969, 89—92 (РЖМат, 1970, 4В236)
107. — , Оптимизация времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний. В сб. Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 1. Киев, 1969, 67—73 (РЖМат, 1970, 10В74)
108. — , Оптимизация показателей надежности сложных систем, функционирование которых представимо посредством полумарковских процессов. В сб. Сложн. системы и моделир. Тр. Семинара. Вып. 2. Киев, 1969, 33—41 (РЖМат, 1970, 9В235)
109. **Теплицкий М. Г.**, Отыскание оптимальной дисциплины обслуживания для одной системы массового обслуживания с управляемым режимом работы приборов. Автоматика и вычисл. техн., 1968, № 6, 61—65 (РЖМат, 1969, 8В31)
110. **Томусяк А. А.**, Про достатні умови і спосіб знаходження эргодичного розподілу напівмарковського процесу. Звітно-наукова конференція кафедр Київського педінституту. Тези доповідей. Київ, 1966
111. — , Час перебування напівмарковського процесу на зчисленій множині станів. Звітно-наукова конференція кафедр Київського педінституту. Тези доповідей. Київ, 1967
112. — , Вычисление эргодического распределения марковских и полумарковских процессов. Кибернетика, 1969, № 1, 68—71 (РЖМат, 1970, 2В60)
113. — , Про одну задачу проектування резервованих систем з відновленням. Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех., 1970, № 12, 96—99 (РЖМат, 1971, 5В296)
114. **Турбин А. Ф.**, Применение теории возмущения линейных операторов к решению некоторых задач, связанных с цепями Маркова и полумарковскими процессами. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1972, вып. 6, 118—128 (РЖМат, 1972, 8В65)
115. — , Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в приводимом подмножестве состояний. Линейный случай. Теория вероятностей и мат. стат. Межвед. науч. сб., 1971, вып. 4, 179—194 (РЖМат, 1971, 11В89)
116. **Ушаков И. А.**, О вычислении среднего стационарного времени пребы-

вания полумарковского процесса в подмножестве состояний. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 4, 62—65 (РЖМат, 1970, 4В55)
117. **Франкен П.**, Уточнение предельной теоремы для суперпозиции независимых процессов восстановления. Теория вероятностей и ее применения, 1963, 8, № 3, 341—349 (РЖМат, 1964, 4В24)
118. **Халиль З. С.**, Об одной задаче резервирования с восстановлением. Elektron. Informationsverarb. und Kybernet., 1968, 4, № 5, 327—340 (РЖМат, 1970, 2В311)
119. **Ястребенецкий М. А.**, Об одном классе регенерирующих случайных процессов. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 5, 50—60 (РЖМат, 1970, 5В93)
120. — , О сходимости сумм марковских процессов восстановления к ветвящемуся процессу Пуассона. Кибернетика, 1972, № 1, 95—98 (РЖМат, 1972, 6В66)
121. **Anselone P. M.**, Ergodic theory for discrete semi-Markov chains. Duke Math. J., 1960, **27**, № 1, 33—40 (РЖМат, 1961, 2В19)
122. **Barlow R. E.**, Applications of semi-Markov processes to counter problems. Stud. appl. prob. and manag. sci., Stanford, Calif., Univ. Press, 1962, 34—62 (РЖМат, 1966, 11В276)
123. — , Proschan F., Mathematical theory of reliability. New York, Wiley, 1965, XIII, 256 (РЖМат, 1967, 4В148К); русский перевод: Барлоу Р. Е., Прошан Ф., Математическая теория надежности. М., Сов. радио, 1969, 488 стр. (РЖМат, 1969, 9В157К)
124. **Berman S. M.**, Note on extreme values, competing risks and semi-Markov processes. Ann. Math. Stat., 1963, **34**, № 3, 1104—1106 (РЖМат, 1964, 7В163)
125. **Bhat U. Narayan**, Imbedded Markov chain analysis of single server bulk queues. J. Austral. Math. Soc., 1964, **4**, № 2, 244—263 (РЖМат, 1965, 2В452)
126. **Cane V. R.**, Behaviour sequences as semi-Markov chains. J. Roy. Statist. Soc., 1959, **B21**
127. **Cheong C. K.**, Geometric convergence of semi-Markov transition probabilities. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1967, **7**, № 2, 122—130 (РЖМат, 1968, 4В35)
128. — , Ergodic and ratio limit theorems for α-recurrent semi-Markov processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, **9**, № 4, 270—286 (РЖМат, 1970, 1В42)
129. — , Quasi-stationary distributions in semi-Markov processes. J. Appl. Probab., 1970, № 2, 388—399 (РЖМат, 1971, 4В39)
130. — , Quasi-stationary distributions in semi-Markov processes. Correction. J. Appl. Probab., 1970, **7**, № 3, 788 (РЖМат, 1971, 6В59)
131. — , Heathcote C. R., On the rate of convergence of waiting times. J. Austral. Math. Soc., 1965, **5**, № 3, 365—373 (РЖМат, 1966, 5В34)
132. — , De Smit Jos H. A., Janssen J., Lambotte J.-P., Teugels I. L., Vandewiele G., Definitions, classification and limit theorems. Notes on semi-Markov theory. Part I. Core discussion paper № 7118, 1971
133. — , — , Teugels I. L., Notes on semi-Markov processes. Part II. Bibliography. Core discussion paper № 7121, 1971
134. **Çinlar E.**, Decomposition of a semi-Markov process under a Markovian rule. Austral. J. Stat., 1966, **8**, № 3, 163—170 (РЖМат, 1967, 11В32)
135. — , Decomposition of a semi-Markov process under a state dependent rule. SIAM J. Appl. Math., 1967, **15**, № 2, 252—263 (РЖМат, 1969, 2В48)
136. — , Time dependence of queues with semi-Markovian services. J. Appl. Probab., 1967, **4**, № 2, 356—364 (РЖМат, 1969, 2В67)
137. — , Queues with semi-Markovian arrivals. J. Appl. Probab., 1967, **4**, № 2, 365—379 (РЖМат, 1968, 4В57)
138. — , On the superposition of m-dimensional point processes. J. Appl. Probab., 1968, **5**, № 1, 169—176 (РЖМат, 1969, 1В78)

139. — , Some joint distributions for Markov-renewal processes. Austral J. Stat., 1968, **10**, № 1, 8—20 (РЖМат, 1969, 11В82)
140. — , On semi-Markov processes on arbitrary spaces. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1969, **66**, № 2, 381—392 (РЖМат, 1970, 5В57)
141. — , Markov renewal theory. Adv. Appl. Probab., 1969, **1**, № 2, 123—187 (РЖМат, 1970, 11В82)
142. — , On dams with continuous semi-Markovian inputs. J. Math. Anal. Appl., 1971, **35**, № 2, 434—448 (РЖМат, 1972, 3В58)
143. **Denardo E. V.**, Markov renewal programs with small interest rates. Ann. Math. Stat., 1972, **42**, № 2, 477—496 (РЖМат, 1972, 1В332)
144. — , Fox B. L., Multichain Markov renewal programs. SIAM J. Appl. Math., 1968, **16**, 468—487
145. **Derman C.**, Remark concerning two-state semi-Markov processes. Ann. Math. Stat., 1961, **32**, № 2, 615—616 (РЖМат, 1962, 4В19)
146. **Disney R. L.**, Hall W. K., Finite queues in parallel under a generalized channel selection rule. J. Appl. Probab., 1971, 8, 413—416
147. — , Vlah T. L., The departure process from the $GI/G/I$ queue. J. Appl. Probab., 1969, **6**, 704—707
148. **Fabens A. J.**, The solution of queueing and inventory models by semi-Markov processes. J. Roy. Statist. Soc., 1961, **B23**, № 1, 113—127 (РЖМат, 1962, 2В429)
149. — , Karlin S., Generalized renewal functions and stationary inventory models. J. Math. Anal. Appl., 1962, **5**, 461—487 (РЖМат, 1965, 1В310)
150. — , Perera A. G. A. D., A correction to "The solution of queueing and inventory models by semi-Markov processes". J. Roy. Statist. Soc., 1963, **B25**, № 2, 455—456 (РЖМат, 1965, 1В301)
151. **Feller W.**, On semi-Markov processes. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1964, **51**, № 4, 653—659 (РЖМат, 1965, 2В86)
152. **Fox B. L.**, Markov renewal programming by linear fractional programming. SIAM J. Appl. Math., 1966, **14**, № 6, 1418—1432 (РЖМат, 1967, 9В79)
153. — , Existence of stationary optimal policies for some Markov renewal programs. SIAM Rev., 1967, **9**, № 3, 573—576 (РЖМат, 1968, 11В69)
154. — , (g, w)-optimal in Markov renewal programs. Manag. Sci., 1968, **15**, № 3, 210—212 (РЖМат, 1969, 12В67)
155. **Franken P.**, Erlangsche Formeln für semimarkowschen Eingang. Electron. Informationsverarb. und Kybern., 1968, **4**, № 3, 197—204 (РЖМат, 1969, 5В48)
156. **Gaver D. P., Jr.**, Imbedded Markov chain analysis of a waiting-line process in continuous time. Ann. Math. Stat., 1959, **30**, № 3, 698—720 (РЖМат, 1961, 12В210)
157. — , An absorption probability problem. J. Math. Anal. Appl., 1964, **9**, № 3, 384—393 (РЖМат, 1965, 6В48)
158. **Gergely T.**, Tsukanow I. N., Yezhow I. I., Markov chains governed by complicated renewal processes. Adv. Appl. Probab., 1970, **2**, № 2, 287—322 (РЖМат, 1971, 5В51)
159. **Gupta Y. P.**, Some results for zero order Markov renewal processes. J. Indian Statist. Assoc., 1972, **10**
160. **Harris C. M.**, Queues with state-dependent stochastic service rates. Operat. Res., 1967, **15**, № 1, 117—130 (РЖМат, 1967, 9В313)
161. **Hatori Hirohisa**, A limit theorem on (J, X)-processes. Kodai Math. Sem. Rep., 1966, **18**, № 4, 317—321 (РЖМат, 1967, 8В12)
162. — , Mori Toshio, An improvement of a limit theorem on (J, X)-processes. Kodai Math. Sem. Rep., 1966, **18**, № 4, 347—352 (РЖМат, 1967, 8В13)
163. — , — , A renewal type theorem on continuous time (J, X)-processes. Kodai Math. Sem. Rep., 1967, **19**, № 4, 404—409 (РЖМат, 1968, 10В42)
164. — , — , Oodaira Hiroshi, A renewal theorem on (J, X)-pro-

cesses. Kodai Math. Sem. Rep., 1967, **19**, № 2, 159—164 (РЖМат, 1968, 3B21)

165. — , — , — , A remark concerning a renewal theorem on (J, X)-processes. Kodai Math. Sem. Rep., 1967, **19**, № 2, 189—192 (РЖМат, 1968, 3B22)
166. **Hawkes A. G.**, Bunching in a semi-Markov process. J. Appl. Probab., 1970, **7**, № 1, 175—182 (РЖМат, 1970, 10B57)
167. **Howard R. A.**, Semi-Markov decision processes. Bull. Inst. Int. Statist., 1964, **40**
168. — , Research in semi-Markovian decision structures. J. Oper. Res. Soc. Japan, 1964, **6**, № 4, 163—199 (РЖМат, 1967, 6B67)
169. — , System analysis of semi-Markov processes. IEEE Trans. Milit. Electron., 1964, **8**, № 2, 114—124 (РЖМат, 1965, 2B75)
170. **Hunter J. J.**, On the moments of Markov renewal processes. Adv. Appl. Probab., 1969, **1**, № 2, 188—210 (РЖМат, 1970, 11B80)
171. — , On the renewal density matrix of a semi-Markov process. Sankhyā, 1969, **A31**, № 3, 281—308 (РЖМат, 1970, 10B56)
172. **Jacod J.**, Un théorème de renouvellement pour les chaînes semi-Markoviennes. C. r. Acad. sci., 1970, **270**, № 4, A255—A258 (РЖМат, 1970, 8B55)
173. — , Chaînes semi-Markoviennes transientes et récurrentes, chaînes positives. C. r. Acad. sci., 1970, **270**, № 12, A776—A779 (РЖМат, 1970, 12B50)
174. — , Théorème de renouvellement et classification pour les chaînes semi-Markoviennes. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1971, **B7**, № 2, 83—129 (РЖМат, 1972, 1B159)
175. — , Générateurs infinitésimaux des processus à accroissements semi-Markoviens. Ann. Inst. H. Poincaré, 1971, **B7**, № 3, 219—233 (РЖМат, 1972, 2B50)
176. **Janssen J.**, Processus de renouvellements Markoviens et processus semi-Markoviens. *Cah. Cent. étud. rech. opér.*, 1964, **6**, 81—105
177. — , Processus de renouvellements Markoviens. 2-e partie. Stationnarité et Application à un problèm d'invalidité. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1965, **7**, 126—141
178. — , Application des processus semi-Markoviens à un problème d'invalidité. Bull. l'ARAB, 1966, **63**, 35—52
179. — , Les processus $(J—X)$. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1969, **11**, № 4, 181—214 (РЖМат, 1970, 11B20)
180. **Jewell W. S.**, Markov-renewal programming. I. Formulation, finite return models. Oper. Res., 1963, **11**, № 6, 938—948 (РЖМат, 1964, 9B218)
181. — , Markov-renewal programming. II. Infinite return models, example. Oper. Res., 1963, **11**, № 6, 949—971 (РЖМат, 1964, 9B219); русский перевод: Джевелл В. С., Управляемые полумарковские процессы. Кибернет. сб. М., Мир, 1967, 97—140
182. — , Fluctuations of a renewal-reward process. J. Math. Anal. and Appl., 1967, **19**, № 2, 309—329 (РЖМат, 1969, 5B71)
183. **Keilson J.**, On the matrix renewal function for Markov renewal processes. Ann. Math. Stat., 1969, **40**, № 6, 1901—1907 (РЖМат, 1971, 6B62)
184. **Kesten H.**, Occupation times for Markov and semi-Markov chains. Trans. Amer. Math. Soc., 1962, **103**, № 1, 82—112 (РЖМат, 1963, 2B111)
185. **Kshirsagar A. M.**, Gupta Y. P., Asymptotic values of the first two moments in Markov renewal processes. Biometrika, 1967, **54**, № 3-4, 597—603 (РЖМат, 1968, 5B35)
186. — , — , Mean and variance of the number of renewals in certain Markov renewal processes. J. Indian Statist. Assoc., 1968, **6**, № 1, 2
187. — , — , Some results in Markov renewal processes. Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1969, **18**, № 70, 61—72 (РЖМат, 1970, 6B102)

188. — , — , Distribution of the number of Markovian renewals in an arbitrary interval. Austral. J. Statist., 1970, **12**, № 1, 58—63 (РЖМат, 1971, 1В59)
189. — , Wysocki R., Some distribution and moment formulae for the Markov renewal process. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, **68**, № 1, 159—166 (РЖМат, 1971, 2В46)
190. **Kurtz T. G.**, Comparison of semi-Markov and Markov processes. Ann. Math. Stat., 1971, **42**, № 3, 991—1002 (РЖМат, 1972, 1В158)
191. **Lambotte J.-P.**, Processus semi-Markoviens et files d'attente. Cah. Cent. étud. rech. opér., 1968, **10**, № 1, 21—31 (РЖМат, 1969, 11В54)
192. — , Teghem J., Utilisation de la théorie des processus semi-Markoviens dans l'étude de problèmes de files d'attente. Queuing Theory. London, 1967, 61—64 (РЖМат, 1970, 10В59)
193. **Lévy P.**, Systèmes semi-Markoviens à au plus une infinité dénombrable d'états possibles. Proc. Int. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 294—295 (РЖМат, 1956, 638)
194. — , Processus semi-Markoviens. Proc. Int. Congr. Math., 1954, **3**, Groningen-Amsterdam, 1956, 416—426 (РЖМат, 1958, 5930)
195. **Lippman S. A.**, Maximal average-reward policies for semi-Markov decision processes with arbitrary state and action space. Ann. Math. Stat., 1971, **42**, № 5, 1717—1726 (РЖМат, 1972, 6В56)
196. **McLean R. A.**, Neuts M. F., The integral of a function defined on a semi-Markov process. SIAM J. Appl. Math., 1967, **15**, № 3, 726—737 (РЖМат, 1969, 2В47)
197. **Moore E. H.**, A semi-Markov process model for secondary acquisition systems. IEEE Trans. Aerospace and Electron. Syst., 1969, **5**, № 1, 33—38 (РЖМат, 1969, 10В151)
198. — , Pyke R., Estimation of the transition distributions of a Markov renewal process. Ann. Inst. Statist. Math., 1968, **20**, № 3, 411—424 (РЖМат, 1969, 11В210)
199. **Nair S. S.**, Semi-Markov analysis of two queues in series attended by a single server. Bull. Soc. math. Belg., 1970, **22**, № 4, 355—367 (РЖМат, 1971, 11В95)
200. — , A single server tandem queue. J. Appl. Probab., 1971, **8**, № 1, 95—109 (РЖМат, 1971, 12В119)
201. — , Neuts M. F., A priority rule based on the ranking of the service times for the *M/G/1* queue. Oper. Res., 1969, **17**, № 3, 466—477 (РЖМат, 1970, 3В504)
202. **Neuts M. F.**, Generating functions for Markov renewal processes. Ann. Math. Stat., 1964, **35**, № 1, 431—434 (РЖМат, 1965, 2В95)
203. — , The busy period of a queue with batch service. Oper. Res., 1965, **13**, № 5, 815—819 (РЖМат, 1966, 10В235)
204. — , Semi-Markov analysis of a bulk queue. Bull. Soc. math. Belg., 1966, **18**, № 1, 28—42 (РЖМат, 1966, 12В57)
205. — , The single server queue with Poisson input and semi-Markov service times. J. Appl. Probab., 1966, **3**, № 1, 202—230 (РЖМат, 1967, 3В47)
206. — , A general class of bulk queues with Poisson input. Ann. Math. Stat., 1967, **38**, № 3, 759—770 (РЖМат, 1971, 7В87)
207. — , Two Markov chains arising from examples of queues with state-dependent service times. Sankhyā, Indian J. Statist., 1967, **29**, № 3, 259—264 (РЖМат, 1968, 6В56)
208. — , Two queues in series with a finite, intermediate waiting-room. J. Appl. Probab., 1968, **5**, № 1, 123—142 (РЖМат, 1969, 3В48)
209. —, The queue with Poisson input and general service times, treated as a branching process. Duke Math. J., 1969, **36**, № 2, 215—231 (РЖМат, 1970, 6В65)
210. — , Two servers in series, studied in terms of a Markov renewal branching process. Adv. Appl. Probab., 1970, **2**, № 1, 110—149 (РЖМат, 1971, 2В45)

211. — , A queue subject to extraneous phase changes. Adv. Appl. Probab., 1971, 3, № 1, 78—119 (РЖМат, 1971, 12В135)
212. — , Teugels J. L., Exponential ergodicity of the *M/G/1* queue. SIAM J. Appl. Math., 1969, **17**, № 5, 921—929 (РЖМат, 1970, 7В58)
213. **Orey S.,** Change of time scale for Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **99**, № 3, 384—397 (РЖМат, 1963, 7В130)
214. **Pearce C.,** A queueing system with non-recurrent input and batch servicing. J. Appl. Probab., 1965, **2**, № 2, 442—448 (РЖМат, 1966, 10В53)
215. **Pyke R.,** Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. Ann. Math. Stat., 1961, **32**, № 4, 1231—1242 (РЖМат, 1963, 8В146)
216. — , Markov renewal processes with finitely many states. Ann. Math. Stat., 1961, **32**, № 4, 1243—1259 (РЖМат, 1963, 8В147)
217. —, Schaufele R. A. Limit theorems for Markov renewal processes. Ann. Math. Stat., 1964, **35**, № 4, 1746—1764 (РЖМат, 1967, 12В31)
218. — , — , The existence and uniqueness of stationary measures for Markov renewal processes. Ann. Math. Stat., 1966, **37**, № 6, 1439—1462 (РЖМат, 1971, 10В144)
219. **Ross S. M.,** Average cost semi-Markov decision processes. J. Appl. Probab., 1970, **7**, № 3, 649—656 (РЖМат, 1971, 6В88)
220. **Schäl M.,** Markov renewal processes with auxiliary paths. Ann. Math. Stat., 1970, **41**, № 5, 1604—1623 (РЖМат, 1971, 10В145)
221. — , Rates of convergence in Markov renewal processes with auxiliary paths. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1970, **16**, № 1, 29—38 (РЖМат, 1971, 5В98)
222. — , The analysis of queues with state-dependent parameters by Markov renewal processes. Adv. Appl. Probab., 1971, **3**, № 1, 155—175 (РЖМат, 1971, 12В129)
223. **Schaufele R.,** Potentials associated with recurrent Markov processes. J. Math. Anal. Appl., 1966, **13**, № 2, 303—336 (РЖМат, 1968, 2В53)
224. **Schweitzer P. J.,** Iterative solution of the functional equations of undiscounted Markov renewal programming. J. Math. Anal. Appl., 1971, **34**, № 3, 495—501 (РЖМат, 1972, 3В445)
225. **Serfozo R. F.,** Functions of semi-Markov processes. SIAM J. Appl. Math., 1971, **20**, № 3, 530—535 (РЖМат, 1971, 12В109)
226. — , Random time transformations of semi-Markov processes. Ann. Math. Stat., 1971, **42**, № 1, 176—188 (РЖМат, 1972, 1В157)
227. **Smith W. L.,** Regenerative stochastic processes. Proc. Roy. Soc., 1955, **A232**, 6—31 (РЖМат, 1959, 621)
228. — , Some peculiar semi-Markov processes. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probab., 1965—1966. Vol. 2. Part 2, Berkeley — Los Angeles, 1967, 255—263 (РЖМат, 1970, 3В72)
229. — , Remarks on the paper "Regenerative stochastic processes". Proc. Roy. Soc., 1960, **A256**, № 1287, 496—501 (РЖМат, 1961, 2В30)
230. **Stone L. D.,** On the distribution of the maximum of a semi-Markov process. Ann. Math. Stat., 1968, **39**, № 3, 947—956 (РЖМат, 1971, 9В109)
231. — , On the distribution of the supremum functional for semi-Markov processes with continuous state spaces. Ann. Math. Stat., 1969, **40**, № 3, 844—853 (РЖМат, 1971, 8В96)
232. — , Distribution of time above a threshold for semi-Markov jump processes. J. Math. Anal. and Appl., 1970, **30**, № 3, 576—591 (РЖМат, 1971, 3В36)
233. **Störmer H.,** Semi-Markoff-Prozesse mit endlich vielen Zuständen. Theorie und Anwendungen. Lect. Notes Oper. Res. and Math. Syst., 1970, № 34, VII, 128S. (РЖМат, 1971, 5В62)
234. **Taga Yasushi,** On the limiting distributions in Markov renewal processes with finitely many states. Ann. Inst. Statist. Math., 1963, **15**, № 1, 1—10 (РЖМат, 1964, 12В34)
235. **Takács L.,** Bizonyos típusú rekurrens sztochasztikus folyamatok vizs-

gálatáról. Magyar tud. akad. Mat. Kutató. int. közl, 1954, 3, № 1-2, 115—128 (РЖМат, 1961, 10В26)
236. — , On a generalization of the renewal theory. Magyar tud. akad. Mat. kutató. int. közl, 1957, 2, № 1-2, 91—103 (РЖМат, 1963, 11В152)
237. — , On a sojourn time problem. Теория вероятностей и ее применения, 1958, 3, № 1, 61—69 (РЖМат, 1958, 7962)
238. — , On a sojourn time problem in the theory of stochastic processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 93, № 3, 531—540 (РЖМат, 1961, 10В27)
239. **Teugels J. L.**, Exponential ergodicity in Markov renewal processes. J. Appl. Probab., 1968, 5, № 2, 387—400 (РЖМат, 1969, 4В55)
240. — , Regular variation of Markov renewal functions. J. London Math. Soc., 1970, 2, № 1, 179—190 (РЖМат, 1972, 1В181)
241. **Yackel J.**, Limit theorems for semi-Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 123, № 2, 402—424 (РЖМат, 1967, 5В24)
242. — , A random time change relating semi-Markov and Markov processes. Ann. Math. Stat., 1968, 39, № 2, 358—364 (РЖМат, 1971, 10В105)

7 Заказ № 382