П. А. Бородин, Об одном условии на многочлен, достаточном для минимальности его нормы на заданном компакте, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, номер 4, 14–18

Замечание. Условие (c) теорем сильно ограничивает множество удовлетворяющих ему законов распределения. Поэтому тестовую статистику ψ_n целесообразно применять для статистических выводов в условиях активного эксперимента (когда исследователь сам выбирает план эксперимента). Как известно из теории оптимального планирования [5], в условиях активного эксперимента оптимальными являются планы с конечным числом значений, а такие планы (т.е. распределения X_1) удовлетворяют условию (c).

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Н. Тюрину, под руководством которого выполнена эта работа, а также М. В. Болдину и В. Н. Тутубалину за ценные замечания и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Theil H.* A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis // Ned. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1950. **53**. 386–392.
2. *Oja H.* Descriptive statistics for multivariate distributions // Stat. and Probab. Lett. 1983. **1**. 327–332.
3. *Serfling R.J.* Approximation Theorems of Mathematical Statistics. N.Y.: John Wiley, 1980.
4. *Hannan E.G.* The asymptotic power of tests based upon multiple correlation // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1956. **18**. 227–233.
5. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию
29.04.2005

УДК 517.53

ОБ ОДНОМ УСЛОВИИ НА МНОГОЧЛЕН, ДОСТАТОЧНОМ ДЛЯ МИНИМАЛЬНОСТИ ЕГО НОРМЫ НА ЗАДАННОМ КОМПАКТЕ

П. А. Бородин

Пусть K — бесконечный компакт в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Среди всех многочленов $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ заданной степени n со старшим коэффициентом 1 существует и единствен многочлен $T_n(z)$ с минимальной нормой на этом компакте:

$$\|T_n\| = \min\{\|P\| : P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0\} = \min_P \max_{z\in K} |P(z)| =: \tau_n(K). \tag{1}$$

Многочлен $T_n(z) = T_n(z, K)$ называется *многочленом Чебышева* степени n для компакта K [1, 2].

Справедлив следующий критерий А. Н. Колмогорова [3]: многочлен $T(z) = z^n + \ldots$ является многочленом Чебышева степени n для компакта K тогда и только тогда, когда для любого многочлена $Q(z)$ степени не выше $n-1$ найдется такая точка ζ из множества $M(T) = \{\zeta \in K : |T(\zeta)| = \|T\|\}$, что $\operatorname{Re}(Q(\zeta)\overline{T(\zeta)}) \geqslant 0$. У этого критерия имеется более удобная формулировка, принадлежащая Е. Я. Ремезу [4, 5]: многочлен $T(z) = z^n + \ldots$ является многочленом Чебышева степени n для компакта K тогда и только тогда, когда существуют такие точки $\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in M(T)$ и такие положительные числа $\delta_1, \ldots, \delta_N$, что для любого многочлена $Q(z)$ степени не выше $n-1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_k \overline{T(\zeta_k)} Q(\zeta_k) = 0. \tag{2}$$

Число N точек ζ_k может быть выбрано в пределах между $n+1$ и $2n+1$ [6]. Доказательство достаточности указанного условия довольно просто: если выполнено (2), то в одной из точек ζ_k имеем

$$\operatorname{Re} Q(\zeta_k)\overline{T(\zeta_k)} \geqslant 0 \Longrightarrow \operatorname{Re}\frac{Q(\zeta_k)}{T(\zeta_k)} \geqslant 0 \Longrightarrow \left|1 + \frac{Q(\zeta_k)}{T(\zeta_k)}\right| \geqslant 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \|T+Q\| \geqslant |T(\zeta_k) + Q(\zeta_k)| = |T(\zeta_k)|\left|1 + \frac{Q(\zeta_k)}{T(\zeta_k)}\right| \geqslant |T(\zeta_k)| = \|T\|,$$

т.е. добавление к T любого многочлена Q степени не выше $n-1$ не уменьшает норму T, а значит, T — многочлен с минимальной нормой на K среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом 1.

Цель настоящей работы — указать одно условие на многочлен, достаточное для того, чтобы он был многочленом Чебышева заданной степени n на заданном компакте K (теорема 1). Это условие позволяет вычислять многочлены Чебышева на компактах специального вида. Кроме того, в работе вводятся специальные экстремальные многочлены, связанные с этим условием, и исследуются их асимптотические свойства (теорема 2).

Теорема 1. *Пусть комплексные числа $v_1, \dots, v_m$ таковы, что $|v_1| = \dots = |v_m| = R$, и точка $z=0$ на комплексной плоскости лежит в выпуклой оболочке точек $v_1, \dots, v_m$. Тогда если норма $\|T\|$ многочлена $T(z) = z^n + \dots$ на компакте K равна R и $\cup_{k=1}^{m} T^{-1}(v_k) \subset K$, то T — многочлен Чебышева степени n для K.*

Здесь $T^{-1}(v_k)$ обозначает множество решений уравнения $T(z) = v_k$.

Доказательство. Поскольку точка $z=0$ принадлежит выпуклой оболочке точек v_k, найдутся такие неотрицательные числа $\delta_1, \dots, \delta_m$, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \delta_k v_k = 0$. Будем считать, что все $\delta_k > 0$ (в противном случае возьмем только те точки v_k, для которых $\delta_k > 0$, и перенумеруем их).

Пусть $T^{-1}(v_k) = \{a_{k1}, \dots, a_{kn}\}$ ($k = 1, \dots, m$; каждое число повторяется столько раз, какова его кратность как корня уравнения $T(z) = v_k$). Каждая точка a_{kj} принадлежит K, причем $|T(a_{kj})| = |v_k| = R = \|T\|$, т.е. $a_{kj} \in M(T)$.

Для каждого $q = 0, 1, \dots, n-1$ сумма $S_q = S_q(v_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}^q$ выражается через старшие $q+1$ коэффициентов многочлена $T(z) - v_k$, а значит, не зависит от k. Следовательно, для любого $q = 0, 1, \dots, n-1$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \delta_k a_{kj}^q \overline{T(a_{kj})} = \sum_{k=1}^{m} \delta_k \overline{v_k} \sum_{j=1}^{n} a_{kj}^q = \sum_{k=1}^{m} \delta_k \overline{v_k} S_q = S_q \sum_{k=1}^{m} \delta_k \overline{v_k} = 0,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \delta_k Q(a_{kj}) \overline{T(a_{kj})} = 0$$

для любого многочлена Q степени не выше $n-1$. Таким образом, многочлен T на компакте K удовлетворяет условию критерия Е.Я. Ремеза (см. выше) с точками $\{a_{kj} : k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ и числами $\{\delta_{kj} = \delta_k \colon k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ (в случае, когда среди точек $a_{k1}, \dots, a_{kn}$ есть l одинаковых, они заменяются на одну, а множитель δ_k — на $l\delta_k$). Теорема 1 доказана.

Эта теорема может быть переформулирована так: если компакт K лежит в замыкании $\overline{\mathrm{Int}(L)}$ внутренности лемнискаты $L = \{z : |T(z)| = R\}$ и пересечение $K \cap L$ содержит прообразы $T^{-1}(v_k)$ точек v_k с указанными свойствами, то T — многочлен Чебышева для K.

Следствие 1.1 (Г. Фабер [1]). *Любой многочлен $T(z) = z^n + \dots$ является многочленом Чебышева для своей лемнискаты $L = L(T, R) = \{z : |T(z)| = R\}$.*

Следствие 1.2 (П.Л. Чебышев, Г. Фабер [1], В.М. Шепелев [7]). *Классические многочлены П.Л. Чебышева*

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z) = \frac{1}{2^n} \left((z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n \right)$$

являются многочленами Чебышева для отрезка $K_1 = [-1;1]$ и для любого эллипса K_r с полуосями $\frac{1}{2}\left(r \pm \frac{1}{r}\right)$, $r > 1$ (и с фокусами ± 1).

Доказательство. Подставляя точку эллипса $\zeta = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right)$ в многочлен $T_n(z)$, получаем $T_n(\zeta) = \frac{1}{2^n}\left(r^n e^{in\varphi} + \frac{1}{r^n} e^{-in\varphi}\right)$. Отсюда при каждом $r \geqslant 1$ и каждом натуральном n имеем $\|T_n\|_{C(K_r)} = \frac{1}{2^n}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right) =: R$ и $T_n^{-1}(\pm R) \subset K_r$. Поскольку точка 0 лежит в выпуклой оболочке точек $v_1 = R$ и $v_2 = -R$, по теореме 1 многочлен T_n является многочленом Чебышева степени n для K_r.

Следствие 1.3 (С.О. Камо, П.А. Бородин [8]). *Пусть $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $J(P)$ — множество Жюлиа многочлена P, а точка τ является центром окружности $C(\tau, R)$ наименьшего радиуса R, содержащей внутри себя множество $J(P)$. Тогда многочлен $T(z) = \frac{1}{a_n}(P(z) - \tau)$ является многочленом Чебышева степени n для компакта $J(P)$.*

Доказательство основывается на полной инвариантности $J(P)$ относительно P, т.е. равенстве $P^{-1}(J(P)) = J(P)$. Из нее прежде всего следует, что $\|T\|_{C(J(P))} = \frac{\|P(z)-\tau\|}{|a_n|} = \frac{R}{|a_n|}$. Далее, поскольку $C(\tau, R)$ является окружностью наименьшего радиуса, содержащей внутри себя $J(P)$, то в пересечении $J(P) \cap C(\tau, R)$ найдутся точки $w_1, \dots, w_m$, содержащие 0 в своей выпуклой оболочке (по теореме Каратеодори можно даже взять $m = 3$). Положим $v_k = (w_k - \tau)/a_n$, $k = 1, \dots, m$. Для каждого k имеем $|v_k| = \frac{R}{|a_n|} = \|T\|$, а $T^{-1}(v_k) = (P(z) - \tau)^{-1}(w_k - \tau) = P^{-1}(w_k) \subset J(P)$, так что выполнены все условия теоремы 1.

Следствие 1.4. *Пусть точка 0 лежит в выпуклой оболочке точек $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ и $R \geqslant \max\{|a_k| : k = 1, \dots, m\}$. Тогда любой многочлен $T(z) = z^n + \dots$ является многочленом Чебышева степени n для объединения лемнискат*

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^{m} \{z : |T(z) - a_k| = R - |a_k|\} =: \bigcup_{k=1}^{m} \Lambda_k.$$

Доказательство. Действительно,

$$\|T\|_{C(\Lambda)} = \max_k \|T\|_{C(\Lambda_k)} = \max_k \max_{z \in \Lambda_k} |T(z)| \leqslant \max_k \max_{z \in \Lambda_k} \{|T(z) - a_k| + |a_k|\} = R,$$

а для любого значения $v_k = R\frac{a_k}{|a_k|}$ (при $a_k \neq 0$) и любого прообраза $\zeta \in T^{-1}(v_k)$ имеем

$$|T(\zeta) - a_k| = \left| R\frac{a_k}{|a_k|} - a_k \right| = |a_k| \left(\frac{R}{|a_k|} - 1 \right) = R - |a_k|,$$

т.е. $\zeta \in \Lambda \cap M(T)$. В то же время точка 0 лежит в выпуклой оболочке всех точек $a_k \neq 0$, а значит, и всех точек v_k. Следствие 1.4 доказано.

Условие на многочлен T в теореме 1 является, конечно, лишь достаточным для того, чтобы T был многочленом Чебышева: существуют компакты (и даже континуумы) K, не содержащие даже двух полных прообразов $T^{-1}(v_1)$ и $T^{-1}(v_2)$ ни для каких многочлена T степени $\geqslant 2$ и чисел $v_1 \neq v_2$.

Примером такого компакта служит полуокружность $C = \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Если $T(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $T^{-1}(v_1) = \{t_1, \dots, t_n\} \subset C$, $T^{-1}(v_2) = \{s_1, \dots, s_n\} \subset C$, то $(z - t_1) \cdot (z - t_2) \cdot \dots \cdot (z - t_n) + v_1 \equiv T(z) \equiv (z - s_1) \cdot (z - s_2) \cdot \dots \cdot (z - s_n) + v_2$, откуда

$$t_1 + \dots + t_n = -a_{n-1} = s_1 + \dots + s_n, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} t_2 t_3 \dots t_n + t_1 t_3 \dots t_n + t_1 t_2 \dots t_{n-1} = (-1)^{n-1} a_1 = \\ = s_2 s_3 \dots s_n + s_1 s_3 \dots s_n + s_1 s_2 \dots s_{n-1}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$t_1 t_2 \dots t_n = e^{i\varphi} s_1 s_2 \dots s_n \tag{5}$$

(последнее условие следует из того, что $|t_1| = \dots = |t_n| = |s_1| = \dots |s_n| = 1$). Разделив (4) на (5), имеем

$$\frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n} = e^{-i\varphi} \left(\frac{1}{s_1} + \dots + \frac{1}{s_n} \right) \Longleftrightarrow \overline{t_1} + \dots + \overline{t_n} = e^{-i\varphi}(\overline{s_1} + \dots + \overline{s_n}),$$

что в силу (3) влечет либо $t_1 + \dots + t_n = s_1 + \dots + s_n = 0$ и тогда оба набора $\{t_1, \dots, t_n\}$ и $\{s_1, \dots, s_n\}$ состоят только из чисел $+1$ и -1 в одинаковых количествах, а значит, $v_1 = v_2$, либо $1 = e^{-i\varphi}$ и тогда $t_1 t_2 \dots t_n = s_1 s_2 \dots s_n \Longleftrightarrow a_0 - v_1 = a_0 - v_2 \Longleftrightarrow v_1 = v_2$.

В то же время понятно, что если компакт K содержит круг с центром a радиуса R, то для многочлена $T(z) = (z - a)^n$ и любого $\varphi \in [0; 2\pi)$ имеем $T^{-1}(e^{i\varphi} R^n) \subset K$.

В связи с этим уместно ввести следующее

Определение. Для заданного компакта K и натурального n через $w_n(K)$ обозначим максимальное число $R > 0$, для которого найдутся такие числа $v_1, \dots, v_m$ и многочлен $T(z) = z^n + \dots$, что $|v_1| = \dots = |v_m| = R$, выпуклая оболочка чисел $v_1, \dots, v_m$ содержит точку 0 и $\cup_{k=1}^{m} T^{-1}(v_k) \subset K$.

Как было показано выше, для любой полуокружности и любого $n \geqslant 2$ имеем $w_n(K) = 0$, а если компакт K содержит круг радиуса R, то $w_n(K) \geqslant R^n$.

Нетрудно показать, что для любого компакта K положительной плоской меры Лебега неравенство $w_n(K) > 0$ справедливо при каждом $n = 1, 2, \dots$. Действительно, возьмем такой круг D, что $\operatorname{mes}^2(K \cap$

$D) > \frac{2n-1}{2n}\mathrm{mes}^2(D)$ (например, в качестве D можно взять круговую окрестность точки плотности K, см., например, [9, п. 5.8(ii)]). Пусть D имеет центр в точке a. Поскольку $\mathrm{mes}^2(D \setminus K) < \frac{1}{2n}\mathrm{mes}^2(D)$, найдется такая точка $b \in D$, $b \neq a$, что все точки $\{a + (b-a)e^{\frac{\pi k}{n}i} : k = 1, \dots, 2n\}$ принадлежат K, составляя в то же время объединение прообразов $T^{-1}((b-a)^n)$ и $T^{-1}(-(b-a)^n)$ для многочлена $T(z) = (z-a)^n$. Так как 0 лежит в выпуклой оболочке точек $(b-a)^n$ и $-(b-a)^n$, то $w_n(K) \geqslant |(b-a)^n| > 0$.

Непонятно, может ли величина $w_n(K)$ быть сколь угодно малой для компактов K заданной положительной плоской меры Лебега $\mathrm{mes}^2(K) = \mathrm{const} > 0$.

В силу теоремы 1 для любого компакта K выполняется неравенство $w_n(K) \leqslant \tau_n(K)$ (определение $\tau_n(K)$ см. в равенстве (1)). Было бы интересно описать все компакты K, для каждого из которых равенство $w_n(K) = \tau_n(K)$ справедливо при любом $n = 1, 2, \dots$. К таким компактам относятся любые отрезки, эллипсы и круги (см. следствия 1.1 и 1.2).

Для норм $\tau_n = \tau_n(K)$ многочленов Чебышева на заданном компакте K имеет место замечательное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K)$, где $\gamma(K)$ — гармоническая (логарифмическая) емкость компакта K (теорема Фекете–Сеге, см. [2, гл. 7, § 3]). Аналогичное равенство для величин $w_n(K)$ в случае произвольного компакта K неверно, как показывает пример полуокружности. Тем не менее справедлива

Теорема 2. *Для любого ограниченного открытого множества U имеют место неравенства*

$$\gamma(U) \leqslant \liminf_{n\to\infty}(w_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup_{n\to\infty}(w_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma(\overline{U}).$$

Напомним, что емкостью $\gamma(U)$ открытого множества U называется супремум емкостей $\gamma(K)$ компактов $K \subset U$.

Доказательство. Рассмотрим многочлены $R_n(z)$, определяемые равенством

$$\max\{\min_{z\in\partial U} |P(z)| : P(z) = (z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_n), \{a_k\} \subset U\} = \min_{z\in\partial U} |R_n(z)| =: m_n(U),$$

где ∂U обозначает границу множества U, а $n = 1, 2, \dots$. Эти *наиболее отклоняющиеся от нуля* многочлены были введены Фабером [1] для областей U, ограниченных простыми аналитическими кривыми (см. также [7, 10]). Из определения многочленов R_n следует, что $R_n^{-1}(\{z : |z| \leqslant m_n\}) \subset U$, откуда $w_n(\overline{U}) \geqslant m_n(U)$. Таким образом, $(m_n(U))^{\frac{1}{n}} \leqslant (w_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}} \leqslant (\tau_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}}$, и, поскольку, как уже упоминалось, $\lim\limits_{n\to\infty}(\tau_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}} = \gamma(\overline{U})$, для доказательства теоремы 2 достаточно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3. *Для любого ограниченного открытого множества U справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty}(m_n(U))^{\frac{1}{n}} = \gamma(U)$.

В [1] это утверждение доказано для односвязных ограниченных *областей* с аналитической границей, в [10] — для произвольных ограниченных областей U.

Доказательство. Положим $m_n = m_n(U)$. Для любого $\varepsilon > 0$ лемнискаты $L_n(\varepsilon) = \{z : |R_n(z)| = m_n - \varepsilon\}$ целиком лежат в U, поэтому $(m_n - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} = \gamma(L_n(\varepsilon)) \leqslant \gamma(U)$, откуда $m_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma(U)$.

Из определения чисел m_n следует, что $m_n \geqslant m_{n-r}m_r$ для любых натуральных $r < n$. Докажем, что для любого натурального k и любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n справедливо неравенство $m_n^{\frac{1}{n}} \geqslant m_k^{\frac{1}{k}} - \varepsilon$. Деля n на k с остатком, получаем $n = kd + r$, $0 \leqslant r < k$, откуда $m_n^{\frac{1}{n}} \geqslant (m_k^d m_r)^{\frac{1}{n}} = m_k^{\frac{d}{n}} m_r^{\frac{1}{n}}$. При $n \to \infty$ имеем $l/n \to 1/k$, $m_r^{\frac{1}{n}} \to 1$ (независимо от r), а значит, $m_n^{\frac{1}{n}} \geqslant m_k^{\frac{1}{k}} - \varepsilon$ при всех достаточно больших n, что и требовалось.

Итак, последовательность $m_n^{\frac{1}{n}}$ ограничена сверху числом $\gamma(U)$ и "возрастает" в указанном смысле. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma(U)$.

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем не разбивающий плоскость компакт $K \subset U$ с границей ∂K, состоящей из конечного числа гладких жордановых контуров, и с емкостью $\gamma(K) > \gamma(U) - \varepsilon$. Рассмотрим многочлены $t_n(z)$, имеющие минимальную норму $h_n = \max\limits_{z\in K} |t_n(z)|$ среди всех многочленов со старшим коэффициентом 1 и *с нулями* на K. Покажем, что лемнискаты $\Lambda_n = \{z : |t_n(z)| = h_n\}$ сходятся к ∂K в хаусдорфовой метрике. Пусть $g(z)$ — функция Грина для $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$ с особенностью в точке ∞, т.е. $g(z) = \log|z| - \log\gamma(K) + o(1)$ $(z \to \infty)$. В силу выбора K функция g непрерывно продолжается на ∂K, причем $g(z) = 0$ при $z \in \partial K$.

Функции $g_n(z) = g(z) - \log|t_n(z)|^{\frac{1}{n}}$ непрерывны в $\overline{\overline{\mathbb{C}} \setminus K}$ и гармоничны в $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. При этом $g_n(\infty) = -\log\gamma(K)$, а при $z \in \partial K$ имеем $g_n(z) = 0 - \log|t_n(z)|^{\frac{1}{n}} \geqslant -\log h_n^{\frac{1}{n}}$. Поскольку для чисел $h_n = h_n(K)$, как и для чебышевских постоянных $\tau_n(K)$, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K)$ (см. [2, гл. 7, § 1, 3]), то последовательность функций $g_n(z)$ равномерно на $\overline{\overline{\mathbb{C}} \setminus K}$ сходится к постоянной $-\log\gamma(K)$. Таким образом, функции $|t_n(z)|^{\frac{1}{n}}$ равномерно на линии уровня $\Gamma_r = \{z : g(z) = r > 0\}$ сходятся к константе $\exp(r + \log\gamma(K)) > \gamma(K)$ и лемнискаты $\Lambda_n = \{z : |t_n(z)|^{\frac{1}{n}} = h_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K) + \delta_n\}$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, начиная с некоторого номера $n = n(r)$ оказываются "зажатыми" между Γ_r и ∂K. При $r \to 0$ линии уровня Γ_r стремятся к ∂K в хаусдорфовой метрике (∂K состоит из конечного числа гладких жордановых контуров), значит, то же верно и для Λ_n.

Так как $K \subset U$, то $\Lambda_n \subset U$ при $n > N = N(K, U)$. Для $n > N$ имеем $m_n > h_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} h_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(K) > \gamma(U) - \varepsilon$. В силу произвольности ε и доказанного выше неравенства $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \gamma(U)$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} m_n^{\frac{1}{n}} = \gamma(U)$.

Теорема 3, а вместе с ней и теорема 2 доказаны.

Следствие 2.1. *Для любой ограниченной области U существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} (w_n(\overline{U}))^{\frac{1}{n}} = \gamma(\overline{U})$.

Это утверждение вытекает из теоремы 2 и равенства $\gamma(U) = \gamma(\overline{U})$, справедливого для любой ограниченной области U (см., например, [10]).

Автор благодарен В. С. Буярову, Е. П. Долженко, О. Н. Косухину и П. В. Парамонову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00962) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ-1892.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Faber G.* Über Tschebyscheffsche Polynome // J. reine und angew. Math. 1920. **150**. 79–106.
2. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966.
3. *Колмогоров А.Н.* Замечания по поводу многочленов П. Л. Чебышева, наименее уклоняющихся от заданной функции // Успехи матем. наук. 1948. **3**, вып. 1. 216–221.
4. *Ремез Е.Я.* Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области // Укр. матем. журн. 1953. **5**, № 1. 3–49.
5. *Виденский В.С.* О равномерном приближении в комплексной плоскости // Успехи матем. наук. 1956. **11**, вып. 5. 169–175.
6. *Шнирельман Л.Г.* О равномерных приближениях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. № 1. 53–60.
7. *Шепелев В.М.* Полиномы Чебышева комплексного переменного: Канд. дис. М., 1929.
8. *Камо С.О., Бородин П.А.* Многочлены Чебышева для множеств Жюлиа // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 5. 65–67.
9. *Богачев В.И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: Изд-во РХД, 2003.
10. *Бородин П.А.* О многочленах, наиболее отклоняющихся от нуля на границе области // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1997. № 1. 18–22.

Поступила в редакцию
11.07.2005

УДК 512.552.4

КОРАЗМЕРНОСТЬ И КОДЛИНА ОДНОЙ ПЯТИМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

А. С. Гордиенко

Несмотря на активную деятельность, которая ведется в этой области, известно сравнительно мало примеров алгебр, в которых можно явно вычислить характеристики, указанные в заголовке: кохарактеры алгебры $M_2(F)$ всех матриц 2×2 были найдены В. С. Дренски и Е. Форманеком [1, 2], точные значения