Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. М. Блохин, А. А. Ширнен, К вопросу об устойчивости ударных волн, *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2000, том 3, номер 2, 23–28

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.174
19 марта 2025 г., 19:17:57

*Сибирский журнал
индустриальной математики
Июль–декабрь, 2000. Том III, № 2(6)*

УДК 533.6.01.011.72

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

А. М. Блохин, А. А. Ширнен

На примере математической модели Навье — Стокса вязкой сплошной среды показано, что подход, основанный на представлении ударных волн как поверхностей сильного разрыва, страдает существенными недостатками. Вывод о дефектах такого подхода основан на численном построении экспоненциальных решений некоторой линеаризованной смешанной задачи.

1. Введение. Обычно при изучении сильных разрывов в механике сплошной среды предполагают, что они обладают структурой, т. е., например, ударная волна представляет из себя некоторую переходную зону. В то же время распространен и другой подход, когда ударная волна представляется в виде поверхности сильного разрыва, на которой выполнены определенные соотношения (уравнения сильного разрыва). Для нахождения этих соотношений дифференциальные уравнения, описывающие движение сплошной среды, представляются в виде законов сохранения, после чего уравнения сильного разрыва выписываются достаточно просто.

В данной работе для случая вязкого газа был рассмотрен последний подход, т. е. изучалось поведение решений смешанной задачи, полученной после линеаризации нестационарных уравнений движения вязкого газа и уравнений сильного разрыва относительно кусочно-постоянного решения. Это кусочно-постоянное решение описывает сверхзвуковой стационарный поток газа (при $x < 0$), который отделяется от дозвукового стационарного потока (при $x > 0$) поверхностью сильного разрыва — ударной волной (с уравнением $x = 0$). В частности, для политропного газа у этой линейной смешанной задачи в одномерном случае строится решение, экспоненциально возрастающее по времени t и экспоненциально убывающее по пространственной переменной x. Физически это означает экспоненциальный рост со временем сколь угодно малых возмущений фронта ударной волны, т. е. практическую нереализуемость данного режима течения с ударной волной. С математической точки зрения этот факт означает линейную неустойчивость (по Ляпунову).

Таким образом, мы показываем, что у подхода, основанного на представлении ударных волн как поверхностей сильного разрыва для течений газов с вязкостью, существуют определенные недостатки. Заметим, также, что данная работа является логическим продолжением работы [1].

2. Предварительные сведения. Как известно, модель вязкого газа описывается системой уравнений Навье — Стокса (мы полагаем коэффициент теплопроводности равным нулю):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k + P_{ik}) = 0, \quad i = 1,2,3,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(e_0 + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right)\right) + \operatorname{div}\left(\rho\left(e_0 + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + pV\right)\mathbf{u} - \xi\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность газа; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости движения вязкого газа; p — давление; $P_{ik} = p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$ — компоненты тензора напряжений, δ_{ik} —

© 2000 Блохин А. М., Ширнен А. А.

символ Кронекера, $\sigma_{ik} = \eta\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_i} - \dfrac{2}{3}\delta_{ik}\lambda\right) + \zeta\delta_{ik}\lambda$ — компоненты вязкого тензора напряжений; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\xi_i = \sum\limits_{k=1}^{3}\sigma_{ik}u_k$ $(i = 1, 2, 3)$; η, ζ — первый и второй коэффициенты вязкости; e_0 — массовая внутренняя энергия; $V = 1/\rho$; η, ζ — функции зависящие от ρ и s, где s — массовая энтропия. Более подробно об уравнениях Навье — Стокса для сжимаемой жидкости см. [2].

Для замыкания системы (1) добавим первый закон термодинамики

$$Tds = de_0 + pdV$$

и уравнение состояния

$$e_0 = e_0(\rho, s),$$

где T — температура. Тогда термодинамические величины T, p определяются через уравнение состояния следующим образом:

$$T = \frac{\partial e_0}{\partial s}, \quad p = \rho^2\frac{\partial e_0}{\partial \rho}.$$

Наконец, уравнения сильного разрыва в случае ударной волны могут быть записаны в форме Рэнкина — Гюгонио (см. [3]):

$$\begin{gathered}
[j] = 0, \quad [u_{\mathbf{n}}]^2 + [\mathcal{P}][V] = 0, \quad [u_{\mathbf{k}}] = [u_{\mathbf{l}}] = 0,\\
[e_0] + \frac{\mathcal{P} + \mathcal{P}_\infty}{2}[V] = \frac{1}{2j^2}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}n_k\right)^2 - \left(\sum_{i,k=1}^{3}\sigma_{ik}n_in_k\right)^2\right].
\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $[g] = (g - g_\infty)$ — скачок величины g на поверхности сильного разрыва, при этом g_∞ — значение величины g слева от разрыва (т. е. при $\{f(t, x_2, x_3) - x_1\} \to +0$); $f(t, x_2, x_3) - x_1 = 0$ — уравнение поверхности сильного разрыва; $j = \rho(u_{\mathbf{n}} - D_{\mathbf{n}})$, $u_{\mathbf{n}} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})$, $u_{\mathbf{k}} = (\mathbf{u}, \mathbf{k})$, $u_{\mathbf{l}} = (\mathbf{u}, \mathbf{l})$, $D_{\mathbf{n}} = \dfrac{-f_t}{\sqrt{1 + f_{x_2}^2 + f_{x_3}^2}}$ — проекция скорости перемещения поверхности сильного разрыва на единичную нормаль к поверхности сильного разрыва $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = \dfrac{(-1, f_{x_2}, f_{x_3})}{\sqrt{1 + f_{x_2}^2 + f_{x_3}^2}}$, $\mathbf{k} = (f_{x_2}, 1, 0)$, $\mathbf{l} = (f_{x_3}, 0, 1)$ — векторы, ортогональные вектору $\mathbf{n}$ и расположенные на касательной плоскости к поверхности сильного разрыва; $\mathcal{P} = p - \sum\limits_{i,k=1}^{3}\sigma_{ik}n_in_k$.

3. Формулировка линейной задачи об устойчивости ударной волны. Рассмотрим такие решения системы (1), которые описывают движение вязкого газа при наличии поверхностей сильного разрыва. Нетрудно заметить, что таковым, например, является следующее кусочно-постоянное решение:

$$\begin{gathered}
\mathbf{u} = (\hat{u}_1, 0, 0), \quad \rho = \hat{\rho}, \quad s = \hat{s}, \quad \text{при} \quad x_1 > 0,\\
\mathbf{u} = (\hat{u}_{1\infty}, 0, 0), \quad \rho = \hat{\rho}_\infty, \quad s = \hat{s}_\infty, \quad \text{при} \quad x_1 < 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

а при $x_1 = 0$ постоянные $\hat{u}_1$, $\hat{\rho}$, $\hat{s}$, $\hat{u}_{1\infty}$, $\hat{\rho}_\infty$, $\hat{s}_\infty$, связаны условиями на ударной волне $x_1 = 0$ (ударная волна неподвижна):

$$\begin{gathered}
\hat{j} = \hat{\rho}\hat{u}_1 = \hat{\rho}_\infty\hat{u}_{1\infty},\\
(\hat{u}_1 - \hat{u}_{1\infty})^2 + (\hat{p} - \hat{p}_\infty)(\widehat{V} - \widehat{V}_\infty) = 0,\\
(\hat{e}_0 - \hat{e}_{0\infty}) + \frac{(\hat{p} + \hat{p}_\infty)}{2}(\widehat{V} - \widehat{V}_\infty) = 0.
\end{gathered}$$

Постоянные $\hat{u}_{1\infty}$, $\hat{\rho}_\infty$, $\hat{s}_\infty$ — параметры набегающего потока газа, причем $\hat{u}_{1\infty} > \hat{c}_\infty > 0$, $\widehat{V}_\infty = 1/\hat{\rho}_\infty$, $\hat{p}_\infty = \hat{\rho}^2_\infty(e_0)_\rho(\hat{\rho}_\infty, \hat{s}_\infty)$, $\hat{e}_{0\infty} = e_0(\hat{\rho}_\infty, \hat{s}_\infty)$, $\hat{c}^2_\infty = (\rho^2(e_0)_\rho)_\rho(\hat{\rho}_\infty, \hat{s}_\infty)$; постоянные $\hat{u}_1$, $\hat{\rho}$, $\hat{s}$ — параметры потока газа за ударной волной, причем $0 < \hat{u}_1 < \hat{c}$, $\widehat{V} = 1/\hat{\rho}$, $\hat{p} = \hat{\rho}^2(e_0)_\rho(\hat{\rho}, \hat{s})$, $\hat{e}_0 = e_0(\hat{\rho}, \hat{s})$, $\hat{c}^2 = (\rho^2(e_0)_\rho)_\rho(\hat{\rho}, \hat{s})$; $\hat{\jmath}$ $(\neq 0)$ — поток газа через ударную волну. Для значений энтропии до и после фронта ударной волны должно выполняться неравенство

$$\hat{s}_\infty < \hat{s}.$$

Таким образом, с физической точки зрения описанное выше кусочно-постоянное решение означает, что мы имеем ударную волну, которая отделяет сверхзвуковой стационарный набегающий поток газа от дозвукового стационарного потока газа за ударной волной. Естественно также поставить вопрос о физической осуществимости данного режима течения сплошной среды.

После линеаризации системы уравнений (1) и уравнений сильного разрыва (2) относительно кусочно-постоянного решения (3) и соответствующего обезразмеривания получим следующую линейную смешанную задачу (мы приводим ниже одномерный вариант этой задачи со второй вязкостью ζ, равной нулю):

$$\begin{gathered} Lp + u_x = 0, \\ Ls = 0, \\ M^2Lu + p_x - \frac{4}{3}\varepsilon^2 M^2 u_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x > 0; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} L_\infty p_\infty + (u_\infty)_x = 0, \\ M^2_\infty L_\infty u_\infty + (p_\infty)_x - \frac{4}{3}\varepsilon^2_\infty M^2_\infty (u_\infty)_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x < 0; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} F_t = \frac{\tilde{u}}{\tilde{u}-1}\left(-\chi p + \frac{4}{3}\tilde{\chi}\varepsilon^2 u_x + (\tilde{u}-1)u_\infty + \chi_\infty p_\infty - \frac{4}{3}\tilde{\chi}_\infty \varepsilon^2_\infty (u_\infty)_x\right), \\ u + dp - \frac{4}{3}\tilde{d}\varepsilon^2 u_x = \tilde{u}\left(u_\infty + d_\infty p_\infty - \frac{4}{3}\tilde{d}_\infty \varepsilon^2_\infty (u_\infty)_x\right), \\ s + \nu p - \frac{4}{3}\tilde{\nu}\varepsilon^2 u_x = \tilde{u}\left(\nu_\infty p_\infty + \frac{4}{3}\tilde{\nu}\varepsilon^2_\infty (u_\infty)_x\right) \quad \text{при} \quad x = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $\varepsilon^2 = 1/R$, $\varepsilon^2_\infty = 1/R_\infty$, $R = (\hat{\rho}\hat{u}_1\hat{l})/\hat{\eta}$, $R_\infty = (\hat{\rho}_\infty\hat{u}_{1\infty}\hat{l})/\hat{\eta}_\infty$ (R, R_∞ — так называемые числа Рейнольдса), $\hat{l}$ — некоторый характерный линейный размер, $\hat{\eta} = \eta(\hat{\rho}, \hat{s})$, $\hat{\eta}_\infty = \eta(\hat{\rho}_\infty, \hat{s}_\infty)$, $\chi = (1 - \widetilde{L})(1 - M^2)/(2M^2)$, $\tilde{\chi} = (1 - \widetilde{L})/2$, $\chi_\infty = \tilde{u}\big(M^2_\infty + 1 - \big(M^2_\infty - 1\big)\widetilde{L}\big)/\big(2M^2_\infty\big) - 1$, $\tilde{\chi}_\infty = (1 + \widetilde{L})/2$, $d = (1 + M^2 + (1 - M^2)\widetilde{L})/(2M^2)$, $\tilde{d} = (1 + \widetilde{L})/2$, $d_\infty = \big(M^2_\infty + 1 + \big(M^2_\infty - 1\big)\widetilde{L}\big)/\big(2M^2_\infty\big)$, $\tilde{d}_\infty = (1-\widetilde{L})/2$, $\nu = \tilde{\nu}(1-M^2)/M^2$, $\nu_\infty = \tilde{\nu}\big(M^2_\infty - 1\big)/M^2_\infty$, $\tilde{\nu} = \widetilde{L}/N$, $\widetilde{L} = 1/(1-D)$, $D = (2\widehat{T}\hat{s})/\big(\hat{u}^2_1(\tilde{u}-1)N\big)$, $\widehat{T} = T(\hat{\rho}, \hat{s})$, $N = (\hat{\rho}\hat{s}\hat{c}^{-2}(e_0)_{\rho s})(\hat{\rho}, \hat{s})$.

Задачу (4)–(6) можно свести к некоторой смешанной задаче, содержащей только две неизвестные функции. Для этого перепишем третье уравнение системы (4) к дивергентному виду:

$$\tau u + \xi\left(\frac{1}{M^2}p + u - \tilde{\varepsilon}\xi u\right) = 0,$$

где $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$, $\xi = \frac{\partial}{\partial x}$. Следовательно, можно ввести потенциал φ:

$$u = \xi\varphi, \quad p = \tilde{\varepsilon}M^2\xi^2\varphi - M^2L\varphi, \tag{7}$$

причем для φ из первого уравнения системы (4) получаем уравнение

$$\{M^2L^2 - \xi^2 - \tilde{\varepsilon}M^2L\xi^2\}\varphi = 0 \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{8}$$

Аналогично, для системы (5) вводится потенциал ψ:

$$u_\infty = \xi\psi, \quad p_\infty = \tilde{\varepsilon}_\infty M_\infty^2\xi^2\psi - M_\infty^2 L_\infty\psi, \tag{9}$$

и

$$\big\{M_\infty^2 L_\infty^2 - \xi^2 - \tilde{\varepsilon}_\infty M_\infty^2 L_\infty\xi^2\big\}\psi = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \tag{10}$$

С учетом (7), (9) перепишем второе граничное условие в таком виде:

$$\begin{aligned}&\{(1-\widetilde{L})(\tilde{\varepsilon}M^2\xi + \beta^2)\xi - 2M^2d\tau\}\varphi \\ &\qquad = \big\{\tilde{u}(1+\widetilde{L})\big(\tilde{\varepsilon}_\infty M_\infty^2\xi - \beta_\infty^2\big)\xi - 2M_\infty^2 d_\infty\tau\big\}\psi \quad \text{при} \quad x = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $\beta_\infty^2 = M_\infty^2 - 1$, $\beta^2 = 1 - M^2$.

4. Поиск решения задачи (8), (10), (11). У задачи (8), (10), (11) ищется решение экспоненциального вида:

$$\begin{aligned}\varphi &= \widehat{\varphi}\exp\left(\frac{st+\lambda x}{\tilde{\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad x \geq 0,\\ \psi &= \widehat{\psi}\exp\left(\frac{st+\lambda_\infty x}{\tilde{\varepsilon}}\right) \quad \text{при} \quad x \leq 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\widehat{\varphi} \neq 0$, $\widehat{\psi} \neq 0$, s, λ, λ_∞ — некоторые постоянные, причем для построения нужного нам примера линейной неустойчивости задачи (4)–(6) должны выполняться условия

$$\operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda < 0, \quad \operatorname{Re}\lambda_\infty > 0. \tag{13}$$

После подстановки (12) в (8), (10), (11), получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных s, λ, λ_∞:

$$M^2(s+\lambda)^2 - \lambda^2 - M^2(s+\lambda)\lambda^2 = 0, \tag{14}$$

$$M_\infty^2\left(\frac{s}{\tilde{u}} + \lambda_\infty\right)^2 - \lambda_\infty^2 - M_\infty^2\mu\left(\frac{s}{\tilde{u}} + \lambda_\infty\right)\lambda_\infty^2 = 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&(1-\widetilde{L})(M^2\lambda + \beta^2)\lambda - 2M^2ds \\ &\qquad = \chi\big\{\tilde{u}(1+\widetilde{L})\big(\mu M_\infty^2\lambda_\infty - \beta_\infty^2\big)\lambda_\infty - 2M_\infty^2 d_\infty s\big\},\end{aligned} \tag{16}$$

где $\mu = \tilde{\varepsilon}_\infty/\tilde{\varepsilon} = \hat{\eta}_\infty/\hat{\eta}$, $\chi = \widehat{\psi}/\widehat{\varphi}$. Для политропного газа все коэффициенты системы (14)–(16) специализируются следующим образом: $M^2 = (\gamma - 1 + \alpha_\infty)/(2\gamma - (\gamma-1)\alpha_\infty)$, $\tilde{u} = (\gamma+1)/(\gamma - 1 + 2\alpha_\infty)$, $\widetilde{L} = -(1+\alpha_\infty)(\gamma-1)/(\gamma+1)$, $\mu = (\tilde{u}\alpha_\infty(\gamma+1)/(2\gamma - (\gamma-1)\alpha_\infty))^\theta$. Здесь $\alpha_\infty = 1/M_\infty^2$ — параметр набегающего потока, γ — показатель политропы (в частности, уравнение состояния политропного газа с γ, равным 7/5, описывает воздух), θ — показатель степени в приближенной формуле Саттерленда (см. [4]).

Введем следующую параметризацию всех решений уравнения (14):

$$s = \frac{z - M}{M}\lambda, \quad \lambda = \frac{z^2 - 1}{Mz}. \tag{17}$$

Аналогично параметризуем уравнение (15):

$$s = \tilde{u}\frac{y - M_\infty}{M_\infty}\lambda_\infty, \quad \lambda_\infty = \frac{y^2 - 1}{\mu M_\infty y}, \tag{18}$$

где z, y — вообще говоря, комплексные параметры. Тогда равенства (14), (15) будут выполняться тождественно, а граничное условие (16) через z и y перепишется в виде

$$(1 - \widetilde{L})\frac{M(Mz + 1)}{z} = \hat{\chi}(1 + \widetilde{L})\frac{M_\infty(M_\infty y + 1)}{y} + 2(M^2 d - M_\infty^2 d_\infty \hat{\chi}). \tag{19}$$

С учетом легкопроверяемых соотношений $2M^2 d = 2 - (1 - M^2)(1 - \widetilde{L})$, $2M_\infty d_\infty = 2 + (M_\infty^2 - 1)(1 + \widetilde{L})$ получим из (19)

$$z = \frac{(1 - \widetilde{L})My}{((1 + \widetilde{L}) - \chi(1 - \widetilde{L}))y + \hat{\chi}(1 + \widetilde{L})M_\infty}. \tag{20}$$

Приравнивая выражения для s из (17), (18) друг к другу, находим еще одно уравнение для z, y:

$$\frac{(z - M)(z^2 - 1)}{M^2 z} = \frac{\tilde{u}}{\mu}\frac{(y - M_\infty)(y^2 - 1)}{M_\infty^2 y}. \tag{21}$$

После подстановки равенства (20) в уравнение (21) получим многочлен пятой степени относительно y, который не приводится здесь вследствие его громоздкости.

Получим условия на параметры s, λ, λ_∞ в терминах z, y. Пусть $z = a + ib$, где $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. Тогда для выражения λ из (17) имеем

$$\lambda = \frac{(a + ib)^2 - 1}{M(a + ib)} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{M(a^2 + b^2)}a + i\frac{a^2 + b^2 + 1}{M(a^2 + b^2)}b = \frac{|z|^2 - 1}{M|z|^2}a + i\frac{|z|^2 + 1}{M|z|^2}b.$$

Для $s = \frac{z - M}{M}\lambda$ получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{a - M}{M} + i\frac{b}{M}\right)(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda) \\ &= \left(\frac{(|z|^2 - 1)(a - M)a}{M^2|z|^2} - \frac{(|z|^2 - 1)b^2}{M^2|z|^2}\right) \\ &\quad + i\left(\frac{(|z|^2 + 1)(a - M)a}{M^2|z|^2} - \frac{(|z|^2 - 1)ab}{M^2|z|^2}\right). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично устанавливаем подобные соотношения для s, λ_∞ через y. Отделяя действительные части у полученных выражений и накладывая на них условия (13), приходим к таким неравенствам:

$$\begin{gathered} (|z|^2 - 1)\operatorname{Re} z < 0, \quad (\operatorname{Re} z - M)(|z|^2 - 1)\operatorname{Re} z - (|z|^2 + 1)(\operatorname{Im} z)^2 > 0, \\ (|y|^2 - 1)\operatorname{Re} y > 0, \quad (\operatorname{Re} y - M_\infty)(|y|^2 - 1)\operatorname{Re} y - (|y|^2 + 1)(\operatorname{Im} y)^2 > 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Поиск корней вышеупомянутого многочлена велся при следующих значениях параметров γ, θ:

$$\gamma = 7/5, \quad \theta = 1/2,\ 3/4,\ 19/25,\ 8/9,\ 1;$$

отношение χ полагалось равным 1; параметр α_∞ изменялся в пределах от 0,01 до 0,99; при этом при любых значениях θ всегда находился *один* корень y, удовлетворяющий третьему и четвертому условиям (22). Например, в случае $\alpha_\infty = 1/5$, $\theta = 8/9$ нужные нам значения y, z были такими:

$$z = -5,915956352, \quad y = 17,60399101,$$

при этом

$$s = 211,0319503, \quad \lambda = -13,84042090, \quad \lambda_\infty = 16,74326415.$$

Все вычисления проводились с использованием математического пакета программ Maple V Release 5 (version 5.0).

Видно, что так построенные частные решения (12) экспоненциально растут по времени, оставаясь при этом ограниченными по пространственной переменной x. Наличие таких решений у задачи (8), (10), (11), как уже говорилось во введении, приводит к выводу, что стационарный режим течения с ударной волной линейно неустойчив по Ляпунову, что означает его физическую нереализуемость.

Замечание. Из уравнений (8), (10), (11) также следует, что при коэффициенте вязкости, равном нулю, построение экспоненциальных решений вида

$$\varphi = \widehat{\varphi}\exp(st + \lambda x) \quad \text{при} \quad x \geq 0,$$
$$\psi = \widehat{\psi}\exp(st + \lambda_\infty x) \quad \text{при} \quad x \leq 0$$

с условиями (13) невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блохин А. М., Ширнен А. А.* Об устойчивости ударных волн для некоторых моделей механики сплошных сред // Сиб. журн. индустр. математики. 2000. Т. 3, № 1(5). С. 33–46.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.

г. Новосибирск *Статья поступила 23 июня 2000 г.*
Окончательный вариант 14 сентября 2000 г.