A. B. Aleksandrov, Approximation in $L^p(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < 1$, by linear combinations of the characteristic functions of balls,
Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2009, Volume 366, 5–12

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 366, 2009 г.

А. Б. Александров

АППРОКСИМАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^p(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < 1$, ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ШАРОВ

1. Введение

Известная теорема Винера описывает все функции $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, линейные комбинации сдвигов которых плотны в пространстве $L^1(\mathbb{R}^d)$. Аналогичное описание имеет место и для пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$, см., например, [4]. Для пространств $L^p(\mathbb{R}^d)$ при других p полное описание таких функций $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ неизвестно.

Пусть $\mathbb{1}_E$ обозначает характеристическую функцию измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^d$. Положим $Q = Q_d \stackrel{def}{=} [0,1)^d$ и $B = B_d \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$.

Следующее утверждение хорошо известно.

Теорема 1.1. *Пусть* $p \in [1, +\infty)$. *Тогда*

а) *линейная оболочка семейства* $\{\mathbb{1}_Q(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^d}$ *плотна в пространстве* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *в том и только в том случае, когда* $p > 1$;

б) *линейная оболочка семейства* $\{\mathbb{1}_B(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^d}$ *плотна в пространстве* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *в том и только в том случае, когда* $p > \frac{2d}{d+1}$.

Разумеется, здесь и далее куб Q может быть заменён любым невырожденным параллелепипедом (т. е. множеством вида $L(Q)$, где L – обратимое аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^d$), а шар B – невырожденным эллипсоидом.

Нас будет интересовать случай, когда $p < 1$. Всюду далее мы предполагаем, что $0 < p < 1$. Автором по существу было описано замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ линейной оболочки сдвигов функции $\mathbb{1}_Q$, см. [2], теорема 6.7 для $\Lambda = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Это описание влечёт следующее утверждение.

Ключевые слова : Аппроксимация, теорема Винера, L^p-плотное множество.

Работа частично поддержана грантом Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2409.2008.1 и грантом РФФИ 08-01-00358-а .

Теорема 1.2. *Пусть $p \in (0,1)$. Тогда линейная оболочка семейства $\{\mathbb{1}_Q(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^d}$ не плотна в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

В §3 мы приводим обобщение этой теоремы, но основная цель настоящей статьи – доказать следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Пусть $p \in (0,1)$. Тогда линейная оболочка семейства $\{\mathbb{1}_B(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^d}$ плотна в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$, если только $d \geqslant 2$.*

Введём некоторые обозначения. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $E^p_f(\mathbb{R}^d)$ замыкание в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ линейной оболочки семейства $\{f(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^d}$.

Пусть $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье,

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i(x,\xi)}\,dx,$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Положим $\sigma(f) \stackrel{def}{=} \{\xi \in \mathbb{R}^d : (\mathcal{F}f)(\xi) \neq 0\}$.

Обозначим через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ пространство Шварца гладких быстро убывающих функций.

С каждым открытым подмножеством Ω пространства $\mathbb{R}^d$ мы связываем пространство $L^p_\Omega(\mathbb{R}^d)$, которое является замыканием в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d)$ множества всех функций $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, носитель преобразования Фурье которых компактен и содержится в множестве Ω. Пространства $L^p_\Omega(\mathbb{R}^d)$ исследовались автором в [2], см. также [1]. В частности, в этих работах приведено много примеров множеств Ω таких, что $L^p_\Omega(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$. Такие множества Ω будем называть L^p-плотными.

Чтобы доказать теорему 1.3, нам понадобятся новые примеры L^p-плотных открытых множеств Ω.

2. Основные результаты

Лемма 2.1. *Пусть функция f принадлежит весовому пространству $L^1(\mathbb{R}^d,(1+|x|)^N)$, где $N \in (d(p^{-1}-1),+\infty)$. Тогда $E^p_f(\mathbb{R}^d) \supset L^p_{\sigma(f)}(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Возьмём функцию $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\operatorname{supp}\mathcal{F}\varphi$ – компактное подмножество множества $\sigma(f)$. Тогда найдётся функция $g \in L^1(\mathbb{R}^d,(1+|x|)^N)$ такая, что $f * g = \varphi$, т. е. $(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) =$

$\mathcal{F}\varphi$. Чтобы доказать включение $g \in L^1(\mathbb{R}^d, (1+|x|)^N)$, достаточно[1] установить локальную принадлежность функции $\mathcal{F}g$ пространству $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d, (1+|x|)^N))$. Для этого нужно заметить, что пространство $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}^d, (1+|x|)^N))$ является алгеброй. Равенство $f * g = \varphi$, в котором $g \in L^1(\mathbb{R}^d, (1+|x|)^N)$, влечёт включение $\varphi \in E^p_f(\mathbb{R}^d)$ в силу леммы 2.12 статьи [2]. •

Следствие 2.2. *Предположим, что множество $\sigma(f)$ является L^p-плотным. Тогда $E^p_f(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Нас будут интересовать радиальные открытые множества Ω, т. е. множества вида $\Omega = \mathcal{R}(G) = \mathcal{R}_d(G) \stackrel{def}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in G\}$, где G – открытое подмножество множества $\mathbb{R}$. Разумеется, множество $\mathcal{R}(G)$ зависит только от пересечения $G \cap [0, +\infty)$. Кроме того, если $G_1 \cap (M, +\infty) = G_2 \cap (M, +\infty)$ при некотором $M \in \mathbb{R}$, то множество $\mathcal{R}_d(G_1)$ является или не является L^p-плотным одновременно с множеством $\mathcal{R}_d(G_2)$, см. следствие 7.7 статьи [2].

Теорема 2.3. *Пусть Λ – бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия*[2]. *Положим $\Gamma = \Lambda \cup (-\Lambda)$. Пусть Γ_ε обозначает ε-окрестность множества Γ. Тогда множество $\mathcal{R}_d(\Gamma_\varepsilon)$ является L^p-плотным при всех $\varepsilon > 0$ и $d \geqslant 2$.*

Доказательство. Можно считать, что $\Lambda = \{n + \alpha : n \in \mathbb{Z}\}$, где $\alpha \in [0, 1)$. Тогда $-\Lambda = \{n - \alpha : n \in \mathbb{Z}\}$. В силу теоремы 5.12 статьи [2] достаточно убедиться в том, что для любого шара $K \subset \mathbb{R}^d$ радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^d$, $|a| \geqslant 1$, найдётся вектор $e \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\bigcup\limits_{n \neq 0} (ne + K) \subset \mathcal{R}(\Gamma_\varepsilon)$. Возьмём единичный вектор e_0 такой, что $(a, e_0) = \alpha$. Тогда для положительных n мы имеем

$$||a + ne_0| - (n + \alpha)| = \sqrt{n^2 + 2\alpha n + |a|^2} - n - \alpha \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

а для отрицательных –

$$||a + ne_0| - (-n - \alpha)| = \sqrt{n^2 + 2\alpha n + |a|^2} - (-n - \alpha) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to -\infty.$$

[1] Мы приводим здесь доказательство этого включения не очень подробно, поскольку во всех приложениях этой леммы, рассматриваемых в этой статье, имеет место включение $\mathcal{F}f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда ясно, что $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d, (1+|x|)^N)$.

[2] Здесь и далее под арифметической прогрессией мы понимает множество, а не последовательность.

Теперь ясно, что в качестве вектора e можно взять вектор Ne_0 при достаточно большом натуральном N. $\bullet$

Отметим следующий частный случай теоремы 2.3.

Следствие 2.4. *Предположим, что* $\Lambda = -\Lambda$. *Пусть* Λ_ε *обозначает* ε*-окрестность множества* Λ. *Тогда множество* $\mathcal{R}_d(\Lambda_\varepsilon)$ *является* L^p*-плотным при всех* $\varepsilon > 0$ *и* $d \geqslant 2$. $\bullet$

Следствие 2.5. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ *– последовательность неотрицательных чисел. Предположим, что* $\lambda_n = an + b + o(1)$ *при* $n \to \infty$, *где* $a > 0$ *и* $b \in \mathbb{R}$. *Пусть* G *обозначает дополнение к множеству всех значений последовательности* $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. *Тогда множество* $\mathcal{R}_d(G)$ *является* L^p*-плотным, если* $d \geqslant 2$.

Доказательство. Можно считать, что $a = 1$. Ясно, что существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $c - b \notin \mathbb{Z}$, $c + b \notin \mathbb{Z}$ и множество $\Gamma = \Lambda \cup (-\Lambda)$ не пересекается с множеством значений последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, где $\Lambda = \{n + c : n \in \mathbb{Z}\}$. Легко видеть, что при достаточно маленьком ε множество Γ_ε не содержит членов последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, и $\mathcal{R}(\Gamma_\varepsilon) \subset \mathcal{R}(G)$. $\bullet$

Доказательство теоремы 1.3. В силу следствия 2.2 достаточно доказать, что множество $\sigma(\mathbb{1}_B)$ является L^p-плотным. Как известно,

$$(\mathcal{F}\mathbb{1}_B)(\xi) = \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{d-1}{2}} e^{-2\pi i|\xi|t}\, dt = \frac{J_{\frac{d}{2}}(2\pi|\xi|)}{|\xi|^{\frac{d}{2}}},$$

где $J_{\frac{d}{2}}$ обозначает функцию Бесселя. Пусть $\{\lambda_n\} = \{\lambda_n^{(d)}\}$ – последовательность положительных корней функции $J_{\frac{d}{2}}(2\pi x)$. Тогда $\lambda_n = \frac{n}{2} + \frac{d-1}{8} + O(\frac{1}{n})$, см. [3]. Таким образом, $L^p_\Omega(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$ в силу следствия 2.5. $\bullet$

3. Заключительные замечания

Рассмотрим сначала некоторые вопросы, связанные с теоремой 2.3.

Автору неизвестно, можно ли в формулировке следствия 2.4 отбросить условие $\Lambda = -\Lambda$. Другими словами, можно ли в формулировке теоремы 2.3 объединение двух арифметический прогрессий заменить одной прогрессией.

Замечание 3.1. При $d = 1$ утверждение теоремы 2.3 не может выполняться при малых ε.

Действительно, равенство $L^p_{\Gamma_\varepsilon}(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ имеет место, только если $\Gamma_\varepsilon = \mathbb{R}$. Это следует из того, что множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ не является L^p-плотным, см. [2], теорема 6.2. Тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Существует множество $\Gamma \subset \mathbb{Z}$ такое, что*

а) $|a - b| \geqslant 1$ *при всех* $a, b \in \Gamma$, $a \neq b$,

б) ε*-окрестность множества* Γ *является* L^p*-плотным открытым подмножеством множества* $\mathbb{R}$ *при всех* $\varepsilon > 0$ *и* $p \in (0, 1)$.

Доказательство. Занумеруем в последовательность $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ множество всех рациональных чисел. Построим по индукции возрастающую последовательность конечных множеств $\{\Gamma_n\}_{n=0}^\infty$, удовлетворяющих условию а). Положим $\Gamma_0 = \varnothing$. Предположим, что множества Γ_k уже построены при $k < n$. Множество Γ_n будем искать в виде $\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \cup \{r_n + ak : 0 < |k| \leqslant n\}$, где $a > 0$. Ясно, что множество Γ_n будет удовлетворять условию а), если число a достаточно велико. Положим $\Gamma \overset{def}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. Остаётся проверить, что множество Γ удовлетворяет условию б). Зафиксируем положительное число ε. Заметим, что для любого интервала U длины меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ и для любого натурального числа N найдётся число $a > 0$ такое, что $U + ka \subset \Gamma_\varepsilon$ при всех целых k, $0 < |k| \leqslant N$. Отсюда легко следует, что ε-окрестность множества Γ является L^p-плотным множеством. •

Замечание 3.3. Если множество Γ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 3.2, то множество $\mathbb{R} \setminus \Gamma$ является L^p-плотным открытым множеством при всех $p \in (0, 1)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что множество $\frac{1}{2} + \Gamma$ тоже удовлетворяет условиям а) и б) теоремы.

Приведём теперь следующее усиление теоремы 2.3.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3, $d \geqslant 2$. Множество $\mathcal{R}_d(\Gamma)$ можно представить в виде объединения последовательности сфер $\{S^{(n)}\}_{n=1}^\infty$. Тогда найдётся бесконечно малая последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S^{(n)}_{\varepsilon_n}$ является L^p-плотным, где $S^{(n)}_{\varepsilon_n}$ обозначает ε_n-окрестность сферы $S^{(n)}$.*

Мы опускаем доказательство этой теоремы. Отметим только, что она может быть сведена к теореме 2.3 примерно так же, как следствие 7.15 статьи [2] сводится к теореме 7.14 статьи [2].

Остановимся теперь на замечаниях, относящихся к вопросу о полноте в $L^p(\mathbb{R}^d)$ семейства функций $\{f(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}^d}$.

Замечание 3.5. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^{d_1})$ и $g \in L^p(\mathbb{R}^{d_2})$. Тогда линейная оболочка семейства $\{f(x-a)g(y-b)\}_{a\in\mathbb{R}^{d_1}, b\in\mathbb{R}^{d_2}}$ плотна в $L^p(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$ в том и только в том случае, когда $E^p_f(\mathbb{R}^{d_1}) = L^p(\mathbb{R}^{d_1})$ и $E^p_g(\mathbb{R}^{d_2}) = L^p(\mathbb{R}^{d_2})$. $\bullet$

Подмножество Λ пространства $\mathbb{R}^d$ будем называть (неоднородной) решёткой, если существует невырожденное аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^d$, переводящее множество Λ в множество $\mathbb{Z}^d$.

Следующее утверждение по существу доказано в [2].

Теорема 3.6. *Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$. Предположим, что множество корней преобразования Фурье функции f содержит решётку. Тогда $E^p_f(\mathbb{R}^d) \neq L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда преобразование Фурье функции f обращается в ноль на $\mathbb{Z}^d$. Тогда в силу формулы суммирования Пуассона, см., например, [5], §2 главы 7, имеем $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} f(x+n) = 0$ почти всюду. Тогда $f \in L^p_{\mathbb{R}^d\setminus\mathbb{Z}^d}(\mathbb{R}^d) \neq L^p(\mathbb{R}^d)$ в силу теоремы 6.2 статьи [2]. $\bullet$

Отметим, что теорема 3.6 влечёт теорему 1.2. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что преобразование Фурье функции $\mathbb{1}_Q$ обращается в нуль на решётке $e + 2\mathbb{Z}^d$, где $e \in \mathbb{Z}^d \setminus 2\mathbb{Z}^d$.

Теорема 6.2 статьи [2] влечёт также следующее утверждение.

Следствие 3.7. *Пусть $\lambda_n = a\sqrt{n}$, где $a > 0$. Пусть G обозначает дополнение к множеству всех значений последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$. Тогда множество $\mathcal{R}_d(G)$ не является L^p-плотным.*

Доказательство. Можно считать, что $a = 1$. Тогда $\mathcal{R}_d(G) \subset \mathbb{R}^d\setminus\mathbb{Z}^d$. $\bullet$

Замечание 3.8. Нетрудно понять из доказательства, что следствие 2.5 может быть усилено. Например, условие $\lambda_n = an + b + o(1)$ при $n\to\infty$ можно заменить условием $\limsup\limits_{n\to\infty}(\lambda_n - an) - \liminf\limits_{n\to\infty}(\lambda_n - an) < \frac{a}{2}$. Автору неизвестно, можно ли это условие заменить условием $n = O(\lambda_n)$.

Положительный ответ на последний вопрос позволил бы доказать следующее утверждение.

Гипотеза 3.9. *Пусть f – радиальная суммируемая функция на $\mathbb{R}^d$, где $d \geqslant 2$. Предположим, что носитель функции f компактен. Тогда $E_f^p(\mathbb{R}^d) = L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Теорема 3.10. *Пусть Ω – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда существует гладкая быстро убывающая функция $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ такая, что $E_f^p(\mathbb{R}^d) = L_\Omega^p(\mathbb{R}^d)$ при всех $p \in (0, 1)$.*

Доказательство. Возьмём последовательность функций $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ такую, что $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_j \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\varphi_j$ – компактное подмножество множества Ω и $\bigcup\limits_{j=1}^\infty \{\varphi_j \neq 0\} = \Omega$. Если последовательность положительных чисел $\{a_j\}_{j=1}^\infty$ стремится к нулю достаточно быстро, то ряд $\sum\limits_{j=1}^\infty a_j\varphi_j$ будет сходиться в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^\infty a_j \mathcal{F}^{-1}\varphi_j \tag{1}$$

Тогда $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\sigma(f) = \Omega$. Включение $L_\Omega^p(\mathbb{R}^d) \subset E_f^p(\mathbb{R}^d)$ следует из леммы 2.1, а включение $E_f^p(\mathbb{R}^d) \subset L_\Omega^p(\mathbb{R}^d)$ – из равенства (1). •

Следствие 3.11. *Существует гладкая быстро убывающая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такая, что $E_f^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ при достаточно малых p, но не при всех $p < 1$.*

Доказательство. В силу теоремы 10.14 статьи [2] существует открытое подмножество Ω множества $\mathbb{R}$ такое, что $L_\Omega^p(\mathbb{R}) = L^p(\mathbb{R})$ при достаточно малых p, но не при всех $p < 1$. Теперь доказываемое утверждение является очевидным следствием теоремы 3.10. •

Замечание 3.12. Пространство $L_\Omega^p(\mathbb{R}^d)$ может быть точно так же определено и при $p \geqslant 1$. Тогда в теореме 3.10 можно утверждать, что равенство $E_f^p(\mathbb{R}^d) = L_\Omega^p(\mathbb{R}^d)$ имеет место при всех $p \in (0, +\infty)$.

Литература

1. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes*, Lecture Notes in Math., **864** (1981), 1–89.

2. А. Б. Александров, *Спектральные подпространства пространства L^p при $p < 1$*, Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 3, 1–75.
3. Дж. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций.* ИЛ, М., 1949.
4. W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York (1990).
5. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ.* Мир, М., (1974).

Aleksandrov A. B. Approximation in $L^p(\mathbb{R}^d)$, $0 < p < 1$, by linear combinations of the characteristic functions of balls.

We prove that the translates of the characteristic function of a ball span $L^p(\mathbb{R}^d)$ provided $0 < p < 1$ and $d \geqslant 2$. Similar approximation problems are considered for some other functions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия

E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 10 августа 2009 г.