1998. Т. 34, № 8. С. 1011 — 1017

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Ю. Александров

В настоящей работе рассматриваются рекуррентные функции, представимые в виде линейных комбинаций колебаний с медленно меняющимися частотами. Исследуется влияние рекуррентных возмущений указанного типа на асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений. Изучаются условия существования асимптотически рекуррентных движений автономных динамических систем.

1. Введение. Пусть n-мерная векторная функция $F(t)$ задана и непрерывна при $t \in \in (-\infty; +\infty)$.

Определение 1 [1, с. 90]. Функция $F(t)$ называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $L > 0$ такое, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + L)$ вещественной оси $\alpha \in (-\infty; +\infty)$ для любого числа $t \in (-\infty; +\infty)$ можно указать число τ, удовлетворяющее условию $\|F(t+\tau) - F(t)\| < \varepsilon$.

Рекуррентные движения были открыты Биркгофом как наиболее общий класс стационарных колебаний (см. [2]). В. И. Зубовым разработан математический аппарат для аналитического представления рекуррентных функций [1].

Определение 2 [3, с. 125]. Функция $F(t)$ обладает слабой вариацией, если для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $T > 0$ существует такое $N > 0$, что для всех t_1 и t_2, удовлетворяющих условиям $|t_1| \geq N$, $|t_2| \geq N$, выполняется неравенство $\|F(t_1) - F(t_2)\| < \varepsilon$, если только $|t_1 - t_2| \leq T$.

Предположим, что функция $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp(i\psi_k(t)), \tag{1}$$

где C_k — постоянные векторы, функции $\psi_k(t)$ вещественны и непрерывно дифференцируемы при $t \in (-\infty; +\infty)$, $\psi'_k(t)$ — функции со слабой вариацией, причем ряд (1) сходится равномерно на всей вещественной оси.

Замечание. В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений при $|t| \to \infty$. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что функции $\psi_k(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $t \in (-\infty; +\infty)$, причем $\psi''_k(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$ (см. [3, с. 154]).

Теорема 1. *Пусть для любого натурального числа N и любых целых чисел $m_1, \ldots, m_N$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \psi'_k(t) \not\equiv 0$, существуют числа $\delta > 0$ и $T > 0$, для которых при всех $|t| \geq T$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} m_k \psi'_k(t)\right| > \delta$.*

Тогда функция $F(t)$ является рекуррентной.

Доказательство. В работе [1, с. 92 — 100] показано, что для рекуррентности функции $F(t)$ достаточно, чтобы для любого набора целых чисел $m_1, \ldots, m_N$ таких, что $q'(t) \not\equiv 0$, равномерно по $a \in (-\infty; +\infty)$ выполнялось условие

$$\frac{1}{t}\int_a^{a+t} \exp(iq(s))\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty;$$

здесь $q(t) = m_1\psi_1(t) + \ldots + m_N\psi_N(t)$.

Пусть $|t_1| \geq T$, $|t_2| \geq T$, $t_1 t_2 > 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \exp(iq(s))\,ds\right| = \left|\frac{\exp(iq(s))}{iq'(s)}\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{q''(s)\exp(iq(s))}{i(q'(s))^2}\,ds\right| \leq \frac{2}{\delta} + \frac{|t_1 - t_2|}{\delta^2} \max_{t\in[t_1,t_2]} |q''(t)|.$$

Используя эту оценку и условие $q''(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, дальнейшее доказательство проводим так же, как и доказательство аналогичного утверждения в [1, с. 100 — 101].

Следствие. *Пусть функции $\psi_k(t)$ имеют вид*

$$\psi_k(t) = \lambda_k t + g_k(t), \tag{2}$$

где $\lambda_k \neq 0$, $g_k'(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, т. е. функцию $F(t)$ можно представить в виде линейной комбинации колебаний с частотами, стремящимися при $|t| \to \infty$ к некоторым конечным пределам. Тогда если числа λ_k рационально независимы, то функция $F(t)$ является рекуррентной.

2. Вынужденные колебания в линейных системах. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = AX + F(t); \tag{3}$$

здесь X — n-мерный вектор, A — постоянная матрица, вещественные части всех собственных чисел которой отличны от нуля; функция $F(t)$ непрерывна и ограничена при $t \in \in (-\infty; +\infty)$.

Известно, что система (3) имеет единственное ограниченное на всей вещественной оси решение $Y(t)$ вида

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s)F(t-s)\,ds, \tag{4}$$

где матрица $G(s)$ при всех $s \in (-\infty; +\infty)$ удовлетворяет неравенству

$$\|G(s)\| \leq a\exp(-b|s|), \tag{5}$$

a и b — положительные постоянные (см. [1]).

Если $F(t)$ — периодическая или почти периодическая функция, то решение (4) будет периодическим и соответственно почти периодическим. В работах [1, 4] рассмотрены некоторые типы рекуррентных возмущений, при которых система (3) не имеет рекуррентных решений.

Теорема 2. *Пусть $F(t) = C\exp(i\psi(t))$, где C — постоянный вектор, функция $\psi(t)$ вещественна и непрерывно дифференцируема при $t \in (-\infty; +\infty)$, $\psi'(t)$ — функция, обладающая слабой вариацией. Тогда решение $Y(t)$ при $|t| \to \infty$ стремится к функции $Z(t) = = -(A - i\psi'(t)E)^{-1}C\exp(i\psi(t))$.*

Доказательство. Используя способ построения матрицы $G(s)$ (см. [1, с. 18 — 20]), получаем, что функция $Z(t)$ представима в виде

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s)\exp(-i\psi'(t)s)\,ds\,C\exp(i\psi(t)).$$

Пусть T — некоторое положительное число. Имеем

$$\|Y(t)-Z(t)\| \le$$

$$\le \|C\|\Big(2\int_{-\infty}^{-T}\|G(s)\|\,ds+2\int_{T}^{+\infty}\|G(s)\|\,ds+a\int_{-T}^{T}|\exp(i\psi(t-s))-\exp(i(\psi(t)-\psi'(t)s))|\,ds\Big).$$

Учитывая оценку (5) для матрицы $G(s)$, получаем, что первые два интеграла можно сделать сколь угодно малыми за счет выбора достаточно большого числа T, а последний интеграл не превосходит величины $2T^2\max\limits_{s\in[-T,T]}|\psi'(t-s)-\psi'(t)|$, которая стремится к нулю при $|t|\to\infty$, так как функция $\psi'(t)$ обладает слабой вариацией.

Пусть рекуррентное возмущение $F(t)$ представимо в виде ряда (1), причем функции $\psi_k(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Следствие 1. *Если $|\psi_k'(t)|\to\infty$ при $t\to+\infty$, то решение $Y(t)$ стремится к нулю при $t\to+\infty$.*

В случае, когда все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части, получаем, что все решения системы (3) при $t\to+\infty$ стремятся к началу координат. При этом исследуемая система, вообще говоря, не имеет нулевого решения. Положение $X=0$ является асимптотическим положением покоя для системы (3) (см. [1]).

Следствие 2. *Если $\psi_k'(t)\to\lambda_k$ при $t\to+\infty$, причем числа λ_k рационально независимы, то решение $Y(t)$ при $t\to+\infty$ стремится к рекуррентной функции*

$$Z(t)=-\sum_{k=1}^{\infty}(A-i\lambda_k E)^{-1}C_k\,\exp(i\psi_k(t)). \tag{6}$$

При этом ряд (6) сходится равномерно на всей вещественной оси.

Таким образом, решение $Y(t)$ является асимптотически рекуррентной функцией. Предельная рекуррентная функция (6) представима рядом того же вида, что и возмущение $F(t)$, но с другими коэффициентами.

Заметим, что в этом случае система (3) может не иметь рекуррентных решений (см. [5]).

Следствие 3. *Если функции $\psi_k'(t)$ не имеют пределов при $t\to+\infty$, то у системы (3) может не существовать ни рекуррентных, ни асимптотически рекуррентных решений.*

Пример 1. Пусть задано уравнение

$$\dot{x}=-x+\sin\psi(t), \tag{7}$$

где $\psi(t)=t\,(4+\sin\ln(t^2+1))$. Единственное ограниченное на всей вещественной оси решение уравнения (7) при $t\to+\infty$ стремится к функции $z(t)=(\sin\psi(t)-\psi'(t)\cos\psi(t))/(1+(\psi'(t))^2)$. Функцию $z(t)$ можно представить в виде $z(t)=\sin(\psi(t)+\varphi(t))/(1+(\psi'(t))^2)^{1/2}$, где $\varphi'(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$. При этом для любого сколь угодно большого числа $L>0$ можно указать промежуток длины L, на котором $|\psi'(t)|>6$, и промежуток длины L, на котором $|\psi'(t)|<2$. Следовательно, функция $z(t)$ не является асимптотически рекуррентной. Таким образом, уравнение (7) не имеет ни рекуррентных, ни асимптотически рекуррентных решений.

3. Устойчивость систем дифференциальных уравнений с однородными правыми частями. Рассмотрим систему

$$\dot{X}=(A+B(\omega t))X; \tag{8}$$

здесь A — постоянная матрица; элементы матрицы $B(t)$ являются рекуррентными функциями, представимыми равномерно сходящимися при $t\in(-\infty;+\infty)$ рядами вида

$$b_{jr}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_{jr}^{(k)}\cos\psi_k(t)+\beta_{jr}^{(k)}\sin\psi_k(t)\right), \tag{9}$$

где $\alpha_{jr}^{(k)}$, $\beta_{jr}^{(k)}$ — вещественные постоянные коэффициенты, функции $\psi_k(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $t \in (-\infty; +\infty)$, причем $|\psi_k'(t)| \geq \delta_k$ при всех $t \geq 0$, где $\delta_k > 0$, а $\psi_k''(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, ω — положительный параметр.

В работе [6], используя метод функций Ляпунова, исследована устойчивость системы (8) в случае, когда интегралы $\int\limits_0^t b_{jr}(s)\,ds$ ограничены при $t \geq 0$. Для рассматриваемых рекуррентных возмущений это условие может не выполняться.

Теорема 3. *Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тогда существует положительное число ω_0 такое, что при всех $\omega \geq \omega_0$ система (8) асимптотически устойчива.*

Доказательство. Пусть постоянная, симметричная, положительно-определенная матрица V является решением матричного уравнения Ляпунова $A^*V + VA = -E$. Так как вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны, то матрица V с указанными свойствами существует и единственна [7, с. 79 — 81].

Выберем натуральное число N и рассмотрим матрицу $H(t)$, элементы которой имеют вид

$$h_{jr}(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\psi_k'(t)} \left(\alpha_{jr}^{(k)} \sin\psi_k(t) - \beta_{jr}^{(k)} \cos\psi_k(t)\right). \tag{10}$$

Для любого числа N матрица $H(t)$ непрерывно дифференцируема и ограничена при $t \geq 0$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$X^*V_1(t)X = X^*(V - \omega^{-1}(H^*(\omega t)V + VH(\omega t)))X. \tag{11}$$

Ее производная в силу системы (8) представима в виде $d(X^*V_1(t)X)/dt = -\|X\|^2 + X^*(D_1 + +D_2 + D_3)X$, где $D_1 \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по $\omega \geq 0$ и $t \geq 0$; $D_2 \to 0$ при $\omega \to +\infty$ равномерно по $t \geq 0$; $D_3 \to 0$ при $t \to +\infty$.

Таким образом, при достаточно больших значениях величин ω, N и T при $t \geq T$ квадратичная форма (11) положительно-определенная, матрица $V_1(t)$ ограничена, а производная функции (11) в силу системы (8) отрицательно определена. Следовательно, система (8) асимптотически устойчива.

Теорема 4. *Пусть матрица A имеет по крайней мере одно собственное число с положительной вещественной частью. Тогда существует $\omega_0 > 0$ такое, что при любом $\omega \geq \omega_0$ система (8) неустойчива.*

Для доказательства теоремы при построении квадратичной формы (11) в качестве матрицы V следует взять решение уравнения $A^*V + VA = \lambda V + E$. При этом число $\lambda > 0$ можно выбрать так, чтобы функция X^*VX не являлась знакопостоянной отрицательной [7, с. 101 — 102]. Проверяя для квадратичной формы (11) условия теоремы Ляпунова о неустойчивости [7, с. 68 — 70], убеждаемся, что при достаточно больших значениях параметра ω система (8) будет неустойчива.

Покажем теперь, что предложенный в работе [6] метод построения функций Ляпунова можно распространить и на случай нелинейных систем с однородными правыми частями.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_j = \sum_{r=1}^{n} (a_{jr} + b_{jr}(t)) x_r^{2p+1}, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{12}$$

здесь a_{jr} — постоянные коэффициенты, функции $b_{jr}(t)$ имеют вид (9), p — натуральное число. Предположим, что нулевое решение невозмущенной системы $\dot{x}_j = \sum\limits_{r=1}^{n} a_{jr} x_r^{2p+1}$, $j = = 1, \ldots, n$, асимптотически устойчиво. Тогда существуют положительно-определенные однородные функции $V(X)$ и $W(X)$ порядка m и $m + 2p$ соответственно, для которых имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \sum_{r=1}^{n} a_{jr} x_r^{2p+1} = -W(X), \tag{13}$$

причем функция $V(X)$ дважды непрерывно дифференцируема [8].

Теорема 5. *Нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть

$$V_1(t,X) = V(X) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \sum_{r=1}^{n} h_{jr}(t) x_r^{2p+1}, \tag{14}$$

где функции $h_{jr}(t)$ определяются по формуле (10).

Продифференцируем функцию $V_1(t,X)$ в силу системы (12). Получим

$$dV_1(t,X)/dt = -W(X) + W_1(t,X) + W_2(t,X) + W_3(t,X); \tag{15}$$

здесь $W_1(t,X)$ — линейная комбинация однородных функций порядка $m+2p$, причем коэффициенты этой линейной комбинации стремятся к нулю при $N \to \infty$ равномерно по $t \geq 0$, а для функций $W_2(t,X)$ и $W_3(t,X)$ при всех $t \geq 0$ и $X \in E_n$ справедливы неравенства $|W_2(t,X)| \leq \varphi(t)\|X\|^{m+2p}$, $|W_3(t,X)| \leq D\|X\|^{m+4p}$, где D — положительная постоянная, а непрерывная функция $\varphi(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Таким образом, при достаточно больших N и T функция $V_1(t,X)$ при $t \geq T$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Известно [9], что воздействие возмущений указанного вида может нарушать асимптотическую устойчивость линейных стационарных систем. В теореме 5 доказано, что для нелинейных систем асимптотическая устойчивость нулевого решения сохраняется.

Теорема 6. *Пусть нулевое решение невозмущенной системы неустойчиво, причем существует дважды непрерывно дифференцируемая однородная функция $V(X)$, удовлетворяющая условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [7, с. 65 — 66]. Тогда нулевое решение системы (12) также неустойчиво.*

Доказательство. Пусть $V(X)$ — однородная функция порядка m, $m \geq 1$. Так как для данной функции выполнены требования первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, то, не умаляя общности, можно считать, что $V(X)$ не является знакопостоянной отрицательной, а функция $W(X)$, построенная по формуле (13), будет отрицательно-определенной однородной функцией порядка $m+2p$ (см. [7, с. 65 — 66]).

Как и при доказательстве теоремы 5, выбираем функцию $V_1(t,X)$ в виде (14). Для фиксированного числа N при всех $t \geq 0$ и $X \in E_n$ имеет место неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \sum_{r=1}^{n} h_{jr}(t) {x_r}^{2p+1} \right| \leq D_1 \|X\|^{m+2p},$$

где $D_1 > 0$. Следовательно, в любой окрестности точки $X = 0$ найдется точка Y, для которой при всех $t \geq 0$ будет выполнено условие $V_1(t,Y) > 0$.

Производная функции $V_1(t,X)$ в силу системы (12) представима в виде (15), где функции $W_1(t,X)$, $W_2(t,X)$ и $W_3(t,X)$ обладают свойствами, указанными в доказательстве теоремы 5.

Таким образом, при достаточно больших N и T функция $V_1(t,X)$ при $t \geq T$ удовлетворяет условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

4. О существовании асимптотически рекуррентных колебаний динамических систем. Рассмотрим автономную динамическую систему, заданную в n-мерном евклидовом пространстве E_n [2]. Обозначим через $X(t,X_0)$ движение, проходящее при $t = 0$ через точку X_0.

Пусть n-мерная векторная функция $F(t)$ определена и непрерывна при $t \in (-\infty; +\infty)$.

Определение 3 [10]. Функция $F(t)$ обладает свойством A, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $L > 0$, что для сколь угодно большого положительного числа D найдется $T > 0$ такое, что для каждого $\theta \geq T$ и любого $\alpha \geq T - \theta$ в интервале $(\alpha, \alpha + L)$ существует число τ, для которого при всех $t \in [\theta, \theta + D]$ выполняется неравенство $\|F(t+\tau) - F(t)\| < \varepsilon$.

Утверждение 1. *Если в выражении (1) функции $\psi_k(t)$ имеют вид (2), причем коэффициенты λ_k рационально независимы, а $g_k'(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, то рекуррентная функция (1) обладает свойством A.*

Доказательство. Известно [1, с. 107 — 108], что в качестве почти периода τ для функции $F(t)$ можно брать решение системы неравенств

$$|\psi_k(t+\tau) - \psi_k(t)| < \delta (\operatorname{mod} 2\pi), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{16}$$

где числа δ и N определяются величиной ε, причем при выполнении условий теоремы 1 система (16) для любых δ и N имеет относительно плотное на вещественной оси множество решений.

В рассматриваемом случае система (16) имеет вид $|\lambda_k \tau + g_k(t+\tau) - g_k(t)| < \delta (\operatorname{mod} 2\pi)$, $k = 1, \ldots, N$.

Выбираем числа θ, α и D и найдем величину $\tau^* \in (\alpha, \alpha + L)$, удовлетворяющую условию $|\lambda_k \tau^* + g_k(\theta + \tau^*) - g_k(\theta)| < \delta (\operatorname{mod} 2\pi)$, $k = 1, \ldots, N$. Для любого $t \in [\theta, \theta + D]$ получаем $|\psi_k(t+\tau^*) - \psi_k(t)| = |\lambda_k \tau^* + g_k(\theta + \tau^*) - g_k(\theta) + (g_k(t+\tau^*) - g_k(\theta + \tau^*)) + (g_k(\theta) - g_k(t))|$. При этом имеем $|g_k(t+\tau^*) - g_k(\theta+\tau^*)| \le D|g_k'(\theta + \tau^* + s_{1k})|$, $|g_k(\theta) - g_k(t)| \le D|g_k'(\theta + s_{2k})|$, где $s_{1k}, s_{2k} \in [0, D]$. Так как $g_k'(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то при достаточно больших θ и $\theta + \tau^*$ число τ^* будет общим почти периодом функции $F(t)$ для всех $t \in [\theta, \theta + D]$.

Определение 4. Функция $F(t)$ обладает свойством C, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $L > 0$, что для сколь угодно больших положительных чисел D и R найдется $T > 0$ такое, что для любого $\theta \ge T$ и любого $\alpha \in [-R, R]$ в интервале $(\alpha, \alpha + L)$ существует число τ, для которого при всех $t \in [\theta, \theta + D]$ выполняется неравенство $\|F(t+\tau) - F(t)\| < \varepsilon$.

Утверждение 2. *Рекуррентная функция $F(t)$, представимая в виде ряда (1), обладает свойством C, если функции $\psi_k(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1.

Из определений 3 и 4 следует, что если функция обладает свойством A, то она обладает и свойством C. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пример 2. Функция $f(t) = \sin(t(4 + \sin \ln(t^2 + 1)))$ обладает свойством C, но не обладает свойством A.

В работе [10] доказано, что для того, чтобы движение обладало свойством A, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво по Лагранжу в положительном направлении и множество его ω-предельных точек представляло собой минимальное множество, состоящее из траекторий почти периодических движений.

Таким образом, не существует рекуррентных движений, обладающих свойством A и не являющихся почти периодическими. Однако движение может при $t \to +\infty$ стремиться к рекуррентной функции, обладающей свойством A, причем эта предельная функция не является почти периодической (см. [10]).

Теорема 7. *Если движение $X(t, X_0)$ устойчиво по Лагранжу в положительном направлении и обладает свойством C, то множество его ω-предельных точек состоит из траекторий почти периодических движений.*

Доказательство. Покажем сначала, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $R > 0$ и $D > 0$ можно указать число $T > 0$, для которого при всех $t_1, t_2 \ge T$, удовлетворяющих условиям $|t_1 - t_2| \le R$, $\|X(t_1, X_0) - X(t_2, X_0)\| < \delta$, и для любого $t \in [0, D]$ имеет место неравенство

$$\|X(t_1 + t, X_0) - X(t_2 + t, X_0)\| < \varepsilon. \tag{17}$$

Задаем $\varepsilon > 0$. Для движения $X(t, X_0)$ и числа $\varepsilon/4$ по свойству C находим соответствующую величину $L > 0$. Так как движение $X(t, X_0)$ устойчиво по Лагранжу в положительном направлении, то найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при всех $s \ge 0$ и $t \in [0, L]$ выполняется неравенство $\|X(s+t, X_0) - X(t, Y_0)\| < \varepsilon/4$, если только $\|X(s, X_0) - Y_0\| < \delta_1$.

Пусть $\delta = \delta_1/2$. Задаем $D > 0$ и $R > 0$. По свойству C для выбранного δ находим $L_1 > 0$, а затем для чисел D и R определяем $T_1 > 0$. Для $D_1 = L_1$ и $R_1 = D$ существует $T_2 > 0$ такое, что при $\theta \ge T_2$ и $|\alpha| \le R_1$ в интервале $(\alpha, \alpha + L)$ можно указать число τ, для которого при всех $t \in [\theta, \theta + D_1]$ справедливо неравенство $\|X(t+\tau, X_0) - X(t, X_0)\| < \varepsilon/4$.

Пусть $T = \max\{T_1, T_2\}$, $|t_1 - t_2| \le R$, $\|X(t_1, X_0) - X(t_2, X_0)\| < \delta$, $t_1 \ge T$, $t_2 \ge T$. Покажем, что при всех $t \in [0, D]$ выполнено условие (17). Выберем число $t^* \in [0, D]$. Пусть

$\alpha = t_1 - t_2$. Тогда $|\alpha| \le R$ и в интервале $(\alpha, \alpha + L_1)$ найдется число τ такое, что имеют место неравенства $\|X(t_2+\tau, X_0) - X(t_2, X_0)\| < \delta$, $\|X(t_2 + t^* + \tau, X_0) - X(t_2 + t^*, X_0)\| < \delta$.

Далее для числа $\alpha_1 = -t^*$ находим $\tau_1 \in (\alpha_1, \alpha_1 + L)$, для которого при всех $t \in [t_1 + t^*, t_1 + +t^* + L_1]$ выполнено условие $\|X(t + \tau_1, X_0) - X(t, X_0)\| < \varepsilon/4$. Получим

$$\|X(t_1 + t^*, X_0) - X(t_2 + t^*, X_0)\| \le \|X(t_2 + \tau + t^*, X_0) - X(t_1 + t^*, X_0)\| +$$

$$+ \|X(t_2 + \tau + t^*, X_0) - X(t_2 + t^*, X_0)\| < \delta + \|X(t_1 + t^*, X_0) - X(t_1 + t^* + \tau_1, X_0)\| +$$

$$+ \|X(t_2 + \tau + t^*, X_0) - X(t_2 + \tau + t^* + \tau_1, X_0)\| + \|X(t_1 + \tau_1 + t^*, X_0) - X(t_2 + \tau + t^* + \tau_1, X_0)\| <$$

$$< 3\varepsilon/4 + \|X(\tau_1 + t^*, X(t_1, X_0)) - X(\tau_1 + t^*, X(t_2 + \tau, X_0))\| < \varepsilon,$$

так как $t^* + \tau_1 \in [0, L]$, при этом $\|X(t_1, X_0) - X(t_2 + \tau, X_0)\| < \delta_1$.

Рассмотрим теперь движение $X(t, Z_0)$, где Z_0 — ω-предельная точка для $X(t, X_0)$, и покажем, что выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|X(t_1, Z_0) - X(t_2, Z_0)\| < \delta$, то при всех $t \ge 0$ имеет место неравенство $\|X(t_1 + t, Z_0) - -X(t_2 + t, Z_0)\| < \varepsilon$.

Задаем $\varepsilon > 0$. По $\varepsilon/3$ найдем число $\delta' > 0$ такое, что для любых D и R существует $T > 0$, для которого при всех $t \in [0, D]$ выполняется неравенство $\|X(t_1 + t, X_0) - -X(t_2 + t, X_0)\| < \varepsilon/3$, если только $t_1, t_2 \ge T$, $|t_1 - t_2| \le R$ и $\|X(t_1, X_0) - X(t_2, X_0)\| < \delta'$.

Пусть $\delta = \delta'/3$ и $\|X(t_1, Z_0) - X(t_2, Z_0)\| < \delta$. Будем считать, что $t_2 > t_1$. Выберем произвольным образом число t^*.

По свойству интегральной непрерывности движений найдется $\gamma > 0$, для которого при $t \in [0, t^* + t_2 - t_1]$ и $\|X(t_1, Z_0) - Y_0)\| < \gamma$ справедливо неравенство $\|X(t_1 + t, Z_0) - X(t, Y_0)\| < \delta$.

Для чисел $D = t^*$ и $R = t_2 - t_1$ определим $T > 0$. Так как $X(t_1, Z_0)$ — ω-предельная точка движения $X(t, X_0)$, то существует $t_3 > T$ такое, что $\|X(t_1, Z_0) - X(t_3, X_0)\| < \gamma$, а тогда в силу выбора числа γ получаем, что $\|X(t_1 + t, Z_0) - X(t_3 + t, X_0)\| < \delta$ при всех $t \in [0, t^* + t_2 - t_1]$. В частности, справедливы неравенства $\|X(t_1 + t^*, Z_0) - X(t_3 + t^*, X_0)\| < \delta$, $\|X(t_3 + t^* + t_2 - t_1, X_0) - X(t_2 + t^*, Z_0)\| < \delta$, $\|X(t_3 + t_2 - t_1, X_0) - X(t_2, Z_0)\| < \delta$. Следовательно, имеем

$$\|X(t_1 + t^*, Z_0) - X(t_2 + t^*, Z_0)\| \le \|X(t_1 + t^*, Z_0) - X(t_3 + t^*, X_0)\| +$$

$$+ \|X(t_3 + t^* + t_2 - t_1, X_0) - X(t_2 + t^*, Z_0)\| + \|X(t_3 + t_2 - t_1 + t^*, X_0) - \|X(t_3 + t^*, X_0)\| < \varepsilon.$$

Таким образом, показали, что для движения $X(t, Z_0)$ выполняется критерий Маркова, определяющий почти периодический характер движений динамических систем (см. [2, с. 317 — 319]). Теорема доказана.

Следствие 1. *Не существует рекуррентных движений, обладающих свойством C и не являющихся почти периодическими.*

Следствие 2. *Не существует асимптотически рекуррентных движений, обладающих свойством C, но не обладающих свойством A.*

Литература

1. *Зубов В. И.* Колебания и волны. Л., 1989.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1947.
3. *Персидский К. П.* // Избр. тр. Алма-Ата, 1976. Т. 1.
4. *Александров А. Ю.* // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 5. С. 902 — 903.
5. *Александров А. Ю.* Исследование поведения ограниченных решений систем линейных дифференциальных уравнений с рекуррентными возмущениями. Санкт-Петербург, 1988. Деп. в ВИНИТИ 16.06.88, № 4734 — В88.
6. *Бодунов Н. А., Котченко Ф. Ф.* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 338 — 341.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л., 1935.
8. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М., 1973.
9. *Виноград Р. Э.* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 84, № 2. С. 201 — 204.
10. *Александров А. Ю.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 4. С. 720 — 722.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила в редакцию 10 июня 1997 г.