Ю. Ч. Кокаев, О GB и GC – свойствах обобщенных эллипсоидов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 104–108

Ю.Ч. Кокаев

О GB И GC СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ

Пусть (Ω , $\mathcal{A}$, P) – вероятностное пространство. Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ называется ортогауссовской, если величины X_i независимы и $X_i \in N(0,1)$. Пусть H – действительное бесконечномерное гильбертово пространство. Гауссовский процесс L на пространстве H называется изонормальным, если L является линейным отображением пространства H в множество действительных гауссовских случайных величин, причем $EL(x)=0$ и $EL(x)L(y)=(x,y)$ для всех $x,y\in H$. В частности, если $\{e_n\}$ – некоторый ортонормированный базис в H, то для любого $x\in H, x=\sum_k x_k e_k$ можно положить $L(x)=\sum_n x_n Y_n$, где $\{Y_n\}$ – ортогауссовская последовательность. Будем говорить, что множество $C\subset H$ является GC – множеством ($C\in GC$), если процесс L на C имеет непрерывные траектории, и является GB – множеством ($C\in GB$), если процесс L на C имеет ограниченные траектории.

Пусть $\{e_n\}$ – ортонормированная последовательность в гильбертовом пространстве H , $p_n\in[1,\infty]$ $n=1,2,\ldots$ и $\{a_n\}$ – убывающая последовательность положительных действительных чисел. Положим

$$B\{a_n;p_n\}=\Big\{\sum_n x_n e_n : \sum_{n:p_n\neq\infty}\Big|\frac{x_n}{a_n}\Big|^{p_n}\leqslant 1;\ \Big|\frac{x_n}{a_n}\Big|\leqslant 1 \text{ при } p_n=\infty\Big\}.$$

Ниже выясняются условия при которых $B\{a_n;p_n\}\in GB$ и $B\{a_n;p_n\}\in GC$.

Случай, когда $p_n=p$ при любом n , где $p\in[1,\infty]$, рассматривался в работах Дадли [3] , Сониса [7] , Шеве [I, 2] . Именно, если $1<p<\infty$, то множество $B\{a_n;p\}\in GB \Longleftrightarrow \sum_n |a_n Y_n|^q<\infty$ где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ и Y_n – ортогауссовская последовательность. Приведенное утверждение справедливо тогда и только тогда, когда $\sum_n |a_n|^q<\infty$ (Сонис). Для случая $p=q=2$ – это классический результат. В $B\{a_n;1\}\in$ $\in GB \Longleftrightarrow a_n=O(\log n)^{-1/2}$; $B\{a_n;1\}\in GC \Longleftrightarrow a_n=o(\log n)^{-1/2}$ (Дадли, Сонис). Если $1<p\leqslant\infty$, то $B\{a_n;p\}\in GB \Longleftrightarrow$ $B\{a_n;p\}\Longleftrightarrow GC$ (Шеве).

Рассмотрим в пространстве H следующее семейство $\mathfrak{N}$ абсолютно выпуклых замкнутых подмножеств: $K\in\mathfrak{N}$, если $\exists\varepsilon=\varepsilon(K)>0\ \forall x\in\partial K\ \exists H(x)(H(x)$ – подпространство конечной размерности) $\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)K\cap H(x)\subset K$, где $\partial K=\{x\in K:\lambda x\notin K$ при любом $\lambda>1\}$.

ЛЕММА. $K\in GB \Leftrightarrow K\in GC$ для любого $K\in\mathfrak{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $K\in\mathfrak{T}$ есть GB – множество, $\mathcal{L}(x)$ – значение локальной осцилляции в смысле Ито и Нисио в точке $x\in K$ (см. [4], [5]). В работе автора (см. [6] стр. 129) доказывается, что $\inf\{\mathcal{L}(x):x\in\frac{1}{2}K\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}(0)$. Следовательно $\mathcal{L}(x)=0$ при любом $x\in K$, т.е. $K\in GC$, поскольку в противном случае должно было бы выполняться соотношение $\inf\{\mathcal{L}(x):x\in\frac{1}{2}K\}\geqslant\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\mathcal{L}(0)$, что, как указывалось, невозможно. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

I. Пусть $\lim_n\inf p_n>1$, $\lim_n\sup p_n<\infty$.

а) $B\{a_n;p_n\}\in GB \Leftrightarrow \sum_n|a_nY_n|^{q_n}<\infty$ п.н. где

$\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}=1$ и Y_n – ортогауссовская последовательность

б) $B\{a_n;p_n\}\in GB \Leftrightarrow \sum_n|a_n|^{q_n}<\infty$;

в) $B\{a_n;p_n\}\in GB \Leftrightarrow B\{a_n;p_n\}\in GC$.

II. Пусть $p_n=1+\beta_n$, где $\beta_n>0$, $\beta_n\downarrow 0$.

а) $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB \Leftrightarrow \exists\lambda>0:\ \sum_n|\lambda a_nY_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty$ п.н.

$B\{a_n;1+\beta_n\}\in GC \Leftrightarrow \forall\lambda>0\ \ \sum_n|\lambda a_nY_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty$ п.н.

б) $\exists\lambda>0:\ \sum_n|\lambda\sqrt{\ln(n+1)}\,a_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty \Rightarrow B\{a_n;p_n\}\in GB$;

$\forall\lambda>0\ \ \sum_n|\lambda\sqrt{\ln(n+1)}\,a_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty \Rightarrow B\{a_n;p_n\}\in GC$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Без ограничения общности можно считать, что $m=\inf_n p_n>1$ и $M=\sup_n p_n<\infty$, поскольку абсолютно выпуклое замкнутое множество $K\in GB \Leftrightarrow K\cap H_1\in GB$ для любого подпространства H_1 в H конечной коразмерности ([8]).

I-а). Пусть $\sum_n|a_nY_n|^{q_n}<\infty$ п.н. Следовательно, существует такое $C>0$, что $P\{\sum_n|a_nY|^{q_n}\leqslant C\}>0$. Событие $\{\sum_n|a_nY_n|^{q_n}\leqslant C\}$ влечет событие $\{\sup_{x\in B\{a_n;p_n\}}L(x)\leqslant C+1\}$, поскольку $|\sum_n x_nY_n|\leqslant\sum_n\frac{1}{p_n}\left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{p_n}+\sum_n\frac{1}{q_n}|a_nY_n|^{q_n}$. Значит

$P\{\sup_{x\in B\{a_n;p_n\}}L(x)\leqslant C+1\}>0$, т.е $B\{a_n;p_n\}\in GB$.

Обратно, пусть $B\{a_n;p_n\}\in GB$. Предположим, что $\sum_n|a_nY_n|^{q_n}=\infty$ п.н., т.е. существует такое изменимое $\Omega_0\subset\Omega$, что $P\{\Omega_0\}=1$ и $\sum_n|a_nY_n(\omega)|^{q_n}=\infty$ для любого $\omega\in\Omega_0$. Выберем произвольное достаточно большое число $R>0$.

Для любого $\omega\in\Omega_0$ существуют такие $R_1>R$ и натуральное N, что $\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}\cdot a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k}=1$. Положим

$$\frac{x_k}{a_k}=\left|\frac{1}{R_1}a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k-1},\ k=1,2,\dots,N;\ x_k=0,\ k\geqslant N+1.$$

Тогда $\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{x_k}{a_k}\right|^{p_k}=\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k}=1$, но

$$\sum_{k=1}^{N}x_k Y_k(\omega)=\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k}{a_k}\cdot a_k Y_k(\omega)=R_1\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}a_k Y_k(\omega)\right|^{q_k}=R_1>R.$$

Следовательно $\sup_{x\in B\{a_n;p_n\}}L(x)(\omega)\geqslant R$ для любых $R>0$ и $\omega\in\Omega_0$, т.е. $B\{a_n;p_n\}\notin GB$, что противоречит условию

I-б). Пусть ряд $\sum_n |a_n|^{q_n}$ – сходится. По теореме о трех рядах п.н. сходится ряд $\sum_n |a_n Y_n|^{q_n}$. Отсюда и из I-а) следует что $B\{a_n;p_n\}\in GB$.

Обратно, пусть $B\{a_n;p_n\}\in GB$. По предыдущему пункту п.н. сходится ряд $\sum_n Z_n$, где $Z_n=|a_n Y_n|^{q_n}$. По теореме о трех рядах отсюда следует, что сходится ряд $\sum_n E Z_n^c$ для любого $C>0$. Пусть $C>1$. Для всех достаточно больших верны неравенства $\frac{2M}{2M-1}\leqslant q_n<\frac{2m}{m-1}$. Следовательно, для таких n выполняются соотношения

$$E Z_n^c\geqslant|a_n|^{q_n}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int^{C^{1/q_k}/a_k}x^{q_n}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geqslant|a_n|^{q_n}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int^{1/a_n}x^{\frac{2M}{2M-1}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Отсюда следует что ряд $\sum_n |a_n|^{q_n}$ – сходится.

I-в) Достаточно убедиться в том, что $B\{a_n;p_n\}\in\mathfrak{N}$. Поскольку $m>1$, $M<\infty$, мы можем выбрать такое $\varepsilon>0$, что будет верно неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot(1+\varepsilon)+\frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^M\leqslant1$. Пусть $x\in\partial B\{a_n;p_n\}$, т.е. $\sum_n\left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{p_n}=1$. Выберем положительное $\delta<\frac{\varepsilon}{2^{m-1}}$. Существует такое натуральное N, что $\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{x_n}{a_n}\right|^{p_n}\geqslant1-\delta$. Положим $H(x)=\overline{\mathcal{L}}\{e_k,k\geqslant N+1\}$. Тогда

$$\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)B\{a_n;p_n\}\cap H(x)\subset B\{a_n;p_n\}.$$

Действительно, пусть $y=\sum_{k\geqslant N+1}y_k e_k\in B\{a_n;p_n\}\cap H(x)$, т.е. $\sum_{k\geqslant N+1}\left|\frac{y_k}{a_k}\right|^{p_k}\leqslant1$. Используя неравенство

$|x+y|^p\leqslant2^{p-1}(|x|^p+|y|^p)$, получаем отсюда

$$\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{x_k}{a_k}\right|^{p_k}+\sum_{k\geqslant N+1}\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{x_k}{a_k}+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\frac{y_k}{a_k}\right|^{p_k}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^m+\sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{2}\left|\frac{x_k}{a_k}\right|^{p_k}+\sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^{p_k}\left|\frac{y_k}{a_k}\right|^{p_k}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^m+\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^M\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^m\cdot(1+\varepsilon)+\frac{1}{2}(1+2\varepsilon)^M\leqslant1,$$

т.е. $\frac{1}{2}x+(\frac{1}{2}+\varepsilon)y\in B\{a_n;p_n\}$. Следовательно $B\{a_n;p_n\}\in\mathfrak{T}$.

II-а). Пусть $\exists\,\lambda>0\cdot\sum_n|\lambda a_n Y_n|^{\frac{1}{\beta_n}}<\infty$ п.н. Тогда $\exists\,C>0\cdot$ $P\{\sum_n|\lambda a_n Y_n|^{\frac{1}{\beta_n}+1}\leqslant c\}>0$. Событие $\{\sum_n|\lambda a_n Y_n|^{\frac{1}{\beta_n}+1}<C\}$ влечет событие $\{\sup\limits_{x\in B\{a_n;1+\beta_n\}}L(x)\leqslant(\frac{1}{\lambda})^{1+\beta}+C\}$, поскольку

$$\sum_K x_K Y_K\leqslant\sum_K\frac{1}{1+\beta_K}\left|\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x_K}{a_K}\right|^{1+\beta_K}+\sum_K\frac{\beta_K}{1+\beta_K}|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1+\beta_K}{\beta_K}}$$

Следовательно $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB$.

Обратно пусть $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB$. Предположим, что $\sum_K|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=\infty$ п.н. для любого $\lambda>0$. Выберем произвольное достаточно большое $R>0$. Существует такое $\Omega_0\subset\Omega$, что $P\{\Omega_0\}=1$ и $\sum_K|\frac{1}{R}a_K Y_K(\omega)|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=\infty$ для любого $\omega\in\Omega_0$. Для любого $\omega\in\Omega_0$ существуют такие $R_1>R$ и натуральное N , что $\sum\limits_{K=1}^{N}|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=1$. Положим

$$\frac{x_K}{a_K}=\left|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}},\quad K=1,2,\ldots,N;\quad x_K=0,\ k\geqslant N+1 .$$

Тогда $\sum\limits_{K=1}^{\infty}\left|\frac{x_K}{a_K}\right|^{1+\beta_K}=\sum\limits_{K=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=1$, но

$$\sum_{K=1}^{\infty}x_K Y_K(\omega)=\sum_{K=1}^{N}\frac{x_K}{a_K}\cdot a_K Y(\omega)=R_1\sum_{K=1}^{N}\left|\frac{1}{R_1}a_K Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}+1}=R_1>R .$$

Следовательно $\sup\limits_{x\in B\{a_n;1+\beta_n\}}L(x)(\omega)\geqslant R$ для любых $R>0$ и $\omega\in\Omega_0$, т.е. $B\{a_n;1+\beta_n\}\notin GB$, что противоречит условию.

Доказательство второй части пункта проводится при помощи подобных рассуждений.

II - б). Пусть существует такое $\lambda>0$, что $S(\lambda)=$ $=\sum_K|\lambda\sqrt{\ln(K+1)}a_K|^{\frac{1}{\beta_K}+1}<\infty$. Существует такое $C>0$, что $P\{\sup\limits_K\frac{1}{\sqrt{\log(K+1)}}Y_K\leqslant C\}>0$. Событие $\{\sup\limits_K\frac{1}{\sqrt{\ln(K+1)}}Y_K\leqslant C\}$ влечет событие $\{\sup\limits_{x\in B\{a_n;1+\beta_n\}}\leqslant C(\frac{1}{\lambda^{1+\beta_1}}+S(\lambda))$ поскольку

$$\left|\sum_K x_K Y_K\right|=\left|\sum_K\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x_K}{a_K}\cdot\lambda\sqrt{\ln(K+1)}\cdot a_K\frac{1}{\sqrt{\ln(K+1)}}Y_K\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\left(\sum_K\frac{1}{1+\beta_K}\left|\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{x_K}{a_K}\right|^{1+\beta}+\sum_K\frac{\beta_K}{1+\beta_K}\left|\lambda\sqrt{\ln(K+1)}a_K\right|^{\frac{1}{\beta_K}+1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{\lambda^{1+\beta_K}}+S(\lambda)\right).$$

Следовательно, $B\{a_n;1+\beta_n\}\in GB$.

Пусть $\sum_K|\lambda\sqrt{\ln(K+1)}a_K|^{\frac{1}{\beta_K}}=S(\lambda)<\infty$ для любого $\lambda>0$. Покажем, что $\sum_K|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1}{\beta_K}}<\infty$ п.н. для любого $\lambda>0$. Существует такое $C>0$, что событие $A=\{\sup\limits_K\frac{1}{\sqrt{\ln(K+1)}}Y_K\leqslant C\}$ имеет ненулевую вероятность. Тогда для любых $\lambda>0$ и $\omega\in A$ верны соотношения

$$\sum_K|\lambda a_K Y_K(\omega)|^{\frac{1}{\beta_K}}=\sum_K\left|C\lambda a_K\sqrt{\ln(K+1)}\cdot\frac{1}{C\sqrt{\ln(K+1)}}\cdot Y_K(\omega)\right|^{\frac{1}{\beta_K}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_K\left|C\lambda a_K\sqrt{\ln(K+1)}\right|^{\frac{1}{\beta_K}}=S(C\lambda)<\infty .$$

Следовательно ряд $\sum_K|\lambda a_K Y_K|^{\frac{1}{\beta_K}}<\infty$ п.н. для любого $\lambda>0$ и, значит, $B\{a_n; 1+\beta_n\} \in GC$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $B\{a_n; 1+\beta_n\} \in GB$, но $B\{a_n; 1+\beta_n\} \notin GC$ (например, при $a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln(k+1)}}$, $\beta_n = \frac{1}{\ln(k+1)}$). Тогда для любого $x = \sum_k x_k c_k \in \partial B\{a_n; 1+\beta_n\}$, т.е. $\sum_k \left| \frac{x_n}{a_n} \right|^{1+\beta_n} = 1$, существуют такие положительные числа d и ε , что $P\{\sup_{y \in B\{a_n; 1+\beta_n\}} L(y) \leq d\} > 0$, но $P[\{\sup_{y \in B\{a_n; 1+\beta_n\}} L(y) \leq d\} \cap \{L(x) \geq d - \varepsilon\}] = 0$.

Действительно, рассуждая как при доказательстве пункта I – в) предложения, можно показать, что для любого $x \in \partial B\{a_k; 1+\beta_k\}$ существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпространство $H(x)$ конечной коразмерности, что $\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2} + \varepsilon) B\{a_n; 1+\beta_n\} \cap H(x) \subset B\{a_n; 1+\beta_n\}$. Следовательно, $\alpha(\frac{1}{2}x) \geq (\frac{1}{2} + \varepsilon)\alpha(0)$. Используя теперь теорему I работы [6] получим требуемое.

Автор благодарит В.Н.Судакова за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. C h e v e t S. p-ellipsoides de ℓ^q , exposant d'entropie, mesures cylindrigues gaussiennes. – C.R.Acad.Sci.Paris, 1969, Sec.A-B, 269, p.A658-A660.
2. C h e v e t S. p -ellipsoides de ℓ^q , mesures cylindrigues gaussiennes.-Les Probabilités sur les Structures Algébriques (Collogue, Clermont-Ferrand, 1969) (Paris, Centre National de la Recherche Scientifique), 1970, p.55-73.
3. D u d l e y R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes. – J.Functional Analysis, 1967, v.1, p.290-330.
4. I t o K., N i s i o M. On the oscillation function of Gaussian processes. – Math.Scand., 1968, v.22, N 1, p.209-223.
5. J a i n N.C., K a l l i a n p u r G. Oscillation function of multiparameter Gaussian processes. – Nagoya Math.J., 1972, v.47, p.15-28.
6. К о к а е в Ю.Ч. Поведение осцилляции и условные гауссовские распределения линейных функционалов. – Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1982, т.119, с.128-143.
7. С о н и с М.Г. О некоторых измеримых подпространствах пространства всех последовательностей с гауссовской мерой. – Успехи матем.наук, 1966, т.21, № 5, с.277-279.
8. С у д а к о в В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений. – Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1976, т.141.