w-ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ g-ГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КДФ

В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина

Пусть $t=(t_1=x,t_2,\dots,t_g)$ и $\partial_k=\partial/\partial t_k$ для $k=1,\dots,g$. Далее через $u(t)$ мы будем обозначать дифференцируемую функцию, регулярную в $t=0$, являющуюся решением g-го стационарного уравнения КдФ по x. Рассмотрим уравнение

$$2\partial_x^2\log w=-u \tag{1}$$

с начальным условием

$$w(0)=1,\qquad \partial_k w(0)=0,\quad k=1,\dots,g. \tag{2}$$

Теорема 1. *Существует решение w уравнения* (1), *удовлетворяющее* (2), *такое, что функции*

$$u_k=-2\partial_x\partial_k\log w,\qquad k=1,\dots,g, \tag{3}$$

задают коммутирующее семейство операторов из [1]:

$$\mathscr{L}=\partial_x^2-u;\qquad \mathscr{U}_k=\partial_x^2\partial_k-\frac12(u\partial_k+\partial_k u)-\frac14(u_k\partial_x+\partial_x u_k)-\partial_{k+1},\quad k=1,\dots,g. \tag{4}$$

Мы считаем, что $\partial_{g+1}=0$. Заметим, что $u_1=u$.

Определение 1. Решения уравнения (1), описанные в теореме 1, будем называть *специальными*.

Лемма 1. *Если w_1 и w_2 — специальные решения, то существует дифференцируемая функция $f(\widehat{t})$ такая, что $w_2(t)=w_1(t)f(\widehat{t})$, где $\widehat{t}=(t_2,\dots,t_g)$, $f(0)=1$ и $\nabla f(0)=0$.*

Таким образом, согласно формуле (3) функции u_k не зависят от выбора специального решения w, и поэтому можно положить $\mathbf{u}(t;\xi)=\mathbf{u}(\xi)=\sum_{i=1}^g u_i(t)\xi^i$. Из [1] теперь следует, что для функции $\mathbf{u}(\xi)$ имеет место соотношение

$$\mathbf{u}'(\xi)^2+2\mathbf{u}''(\xi)(2-\mathbf{u}(\xi))+4(\xi^{-1}+u)(2-\mathbf{u}(\xi))^2=4\mu(\xi),$$

где $\mu(\xi)=4\xi^{-1}+\sum_{i=1}^{2g}\mu_i\xi^i$ и все μ_i – константы. Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x. Положим $\mu(\xi,\eta)=4\xi^{-1}+4\eta^{-1}+2\sum_{i=1}^g\mu_{2i}\xi^i\eta^i+\sum_{i=0}^{g-1}\mu_{2i+1}(\xi+\eta)\xi^i\eta^i$ и

$$\begin{aligned}P(\xi,\eta)=\frac{\xi^2\eta^2}{4(\xi-\eta)^2}\bigl(&-\mathbf{u}'(\xi)\mathbf{u}'(\eta)-(2-\mathbf{u}(\xi))\mathbf{u}''(\eta)-\mathbf{u}''(\xi)(2-\mathbf{u}(\eta))\\&-2(2-\mathbf{u}(\xi))(2-\mathbf{u}(\eta))(\xi^{-1}+\eta^{-1}+2u)+2\mu(\xi,\eta)\bigr).\end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 2.

$$P(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^g\sum_{j=1}^g p_{ij}\xi^i\eta^j, \tag{6}$$

где $p_{ij}=p_{ji}$ – функции, зависящие только от t.

Лемма 3. *Имеют место равенства $p_{1i}=u_i$ и $\partial_i p_{jk}=\partial_j p_{ik}$.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-0659) и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-2185.2003.1.

Теорема 2. *Пусть* $p_{ij}(t)$ – *функции, полученные по формулам* (5) *и* (6). *Тогда система уравнений*

$$2\partial_i\partial_j \log w = -p_{ij} \tag{7}$$

имеет единственное решение в классе специальных решений уравнения (1).

Определение 2. Специальное решение уравнения (1), описанное в теореме 2, будем называть *w-функцией* фиксированного выше решения u стационарного уравнения КдФ.

Приведем явные формулы восстановления w-функции по u. Положим $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}x$. Тогда согласно (1) существует функция $a(t)$ такая, что $w(t) = \exp(a(t) - \varphi(t))$, где $a''(t) = 0$. Следовательно, $a(t) = a_1(\widehat{t})x + a_0(\widehat{t})$. Условие (2) дает $a_0(0) = 0$, $a_1(0) = 0$ и $\partial_k a_0(0) = 0$, $k = 2, \dots, g$. Из (3) получаем:

$$2\partial_k a_1(\widehat{t}) = -u_k + 2\partial_k \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t, \qquad k = 2, \dots, g. \tag{8}$$

Система уравнений (8) при начальном условии $a_1(0) = 0$ позволяет *однозначно* восстановить функцию $a_1(\widehat{t})$ по набору функций u_k, $k = 1, \dots, g$. Согласно (7) получаем

$$2\partial_i\partial_j a_0(\widehat{t}) = 2\partial_i\partial_j\varphi(t) - 2\partial_i\partial_j a_1(\widehat{t})x - p_{ij}(t).$$

Эта система уравнений при начальных условиях $a_0(0) = 1$, $\partial_k a_0(0) = 0$, $k = 1, \dots, g$, позволяет *однозначно* восстановить функцию $a_0(\widehat{t})$ по набору функций u_k, $k = 2, \dots, g$.

Пусть $\sigma(t)$ – гиперэллиптическая функция Клейна рода g и $\zeta_i(t) = \partial_i \log\sigma(t)$, а $\wp_{ij}(t) = -\partial_i\partial_j \log\sigma(t)$. Как показано в [2], функция $2\wp_{gg}(t)$ является решением g-го стационарного уравнения КдФ.

Следствие 1. *Пусть* $z \in \mathbb{C}^g$ – *такая точка, что* $\sigma(z) \neq 0$. *Тогда функция*

$$w(t) = \frac{\sigma(t+z)}{\sigma(z)} \exp\langle -\zeta(z), t\rangle$$

является w-функцией решения $2\wp_{gg}(t+z)$ *стационарного уравнения КдФ.*

Доказательство следует из того, что w-функция решения u однозначно восстанавливается по u, и того, что функции $u_i = 2\wp_{g,g-i+1}$ и $p_{ij} = 2\wp_{g-i+1,g-j+1}$ удовлетворяют формулам (5), (7) (см. [2]).

Пусть θ_g – полиномы, описанные в [3], вторые логарифмические производные которых задают рациональные решения высших стационарных уравнений КдФ. Как показано в [4], полином θ_g с точностью до нормировки переменных соответствует рациональному пределу $\widehat{\sigma}_g$ для σ-функции рода g. Положим $\widehat{\zeta}_i(t) = \partial_i \log\widehat{\sigma}_g(t)$.

Следствие 2. *Пусть* $z \in \mathbb{C}^g$ – *такая точка, что* $\widehat{\sigma}_g(z) \neq 0$. *Тогда функция*

$$w(t) = \frac{\widehat{\sigma}_g(t+z)}{\widehat{\sigma}_g(z)} \exp\langle -\widehat{\zeta}(z), t\rangle$$

является w-функцией решения $u = -2(\log\theta_g)''$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] В. М. Бухштабер, С. Ю. Шорина // УМН. 2003. Т. 58. №3. С. 187–188. [**2**] В. М. Бухштабер, В. З. Енольский, Д. В. Лейкин // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33. №2. С. 1–15. [**3**] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin // Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 10. №2. P. 1–125. [**4**] M. Adler, J. Moser // Comm. Math. Phys. 1978. V. 61. P. 1–30.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
14.07.2003