Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. А. Христианович, О графических методах пространственной статики и кинематики,
УМН, 1940, выпуск 7, 154–162

https://www.mathnet.ru/rm7100

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
9 декабря 2025 г., 17:20:41

ЦИКЛ СТАТЕЙ ПО ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИКИ И КИНЕМАТИКИ

О ГРАФИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИКИ И КИНЕМАТИКИ.

С. А. Христианович.

В настоящем выпуске „Успехов математических наук“ помещен цикл статей, относящихся к графическим методам пространственной статики и кинематики*). Шесть из них являются переводами статей Р. Мизеса, В. Прагера, Г. Винтера, Р. Бейера, Р. Мемке и Б. Н. Горбунова, а седьмая работа — Я. Б. Шора печатается впервые.

Известно, какую роль сыграло развитие графических методов в теории плоских механизмов и плоских ферм. Хотя графические методы применялись уже давно для решения отдельных задач пространственной механики, например, Кульманом и Геннебергом в их известных руководствах, опубликованных в конце прошлого столетия, но свое развитие эти методы получили лишь недавно в связи со все возрастающим распространением в технике пространственных конструкций и механизмов.

В самых ранних работах, посвященных графическим методам пространственной статики, например в работах Кульмана и Геннеберга, использовались обычные построения начертательной геометрии на двух плоскостях проекций. В задачах на равновесие пространственных ферм силы, приложенные к отдельным узлам, разлагались по направлениям стержней в обеих плоскостях проекций. Эти построения в простых задачах оказываются достаточно удобными, в случае же более сложных задач они становятся очень громоздкими.

Началом развития современных пространственных графических методов следует считать появление замечательного исследования Майора „Графическая статика пространственных систем“ [1]), в котором исследование пространственных систем приводится к исследованию их „изображений“ на одной плоскости. Для изложения своего метода Майор использовал аппарат, мало известный инженерам (теорию линейных комплексов). В 1916 г. появилась работа Р. Мизеса „Графическая статика пространственных систем сил“ (см. ниже стр. 163—186), в которой практический метод, вытекающий из исследований Майора, был упрощен и изложен с другой точки зрения, пользуясь только самыми элементарными понятиями статики. В этой работе все основные построения систематизированы и многие из них упрощены. Кроме того, метод применен к решению ряда основных, простейших задач статики и иллюстрирован на расчете некоторых пространственных ферм. В работе Прагера „К кинематике пространственных ферм“, относящейся к 1926 г. (см. ниже стр. 187—206), содержится применение метода Майора-

*) Этот цикл статей составлен под редакцией С. А. Христиановича. *Ред.*

[1]) B. Mayor, Statique graphique des systèmes de l'espace, Lausanne-Paris 1910.

Мизеса к задачам пространственной кинетостатики. В этой работе, на основе идей Майора, дано некоторое видоизменение метода Майора-Мизеса. Систематическое применение метода Майора-Мизеса к решению пространственных задач кинематики можно найти в книге K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems, Wien, J. Springer, 1928. Применение этого метода к анализу распределения скоростей и ускорений пространственных механизмов дано в работе Винтера „Планы скоростей пространственных механизмов", относящейся к 1930 г. (см. ниже, стр. 207—222).

Удачная комбинация методов Мизеса и Прагера в применении к графической статике моторов дана в работе Горбунова (см. ниже стр. 254—267). Отметим также, что хорошее изложение этих методов и их применения к различным задачам статики можно найти в книге Горбунова и Уманского „Статика пространственных систем", Госстройиздат, 1932.

Основным недочетом методов, основанных на построении изображений, является их недостаточная наглядность, так как при применении этих методов приходится переходить от обычного рабочего чертежа к искусственным изображениям на картинной плоскости. Поэтому в последнее время снова наблюдается тенденция к развитию новых приемов, связанных только с непосредственным использованием начертательной геометрии. Сюда прежде всего относится работа Бейера (см. ниже стр. 223—245), а также работы Артоболевского, Бруевича, Мерцалова и др. (см. краткий обзор в указанной ниже работе Шора).

Большой интерес представляет работа Диментберга [1]), в которой дан весьма простой и вместе с тем общий метод для решения пространственных задач методами начертательной геометрии.

Особняком стоит работа Мемке (см. ниже стр. 246—253), в которой построения обычной начертательной геометрии распространены на пространство n измерений, что дает технически простое средство для решения задач пространственной статики и кинематики.

Наконец, в печатаемой здесь работе Шора (см. ниже стр. 268—315) читатель найдет дальнейшее развитие указанных выше методов и их применение к исследованию сложных пространственных систем.

* * *

Графические методы пространственной механики развивались, с одной стороны, в связи с теорией пространственных механизмов и, с другой стороны, в связи с исследованиями пространственных ферм. Однако исследования в одной из этих областей легко переносятся в другую, так как между задачами пространственной статики и кинематики твердого тела существует, как известно, тесная связь, основанная на следующем.

Пусть мы имеем систему сил $\overline{P}_i$ и систему пар $\overline{M}_k$, приложенных к твердому телу. Как известно, для равновесия этой системы необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\sum \overline{P}_i = 0, \quad \sum \overline{M}_k + \sum [\overline{r}_i, \overline{P}_i] = 0, \tag{1}$$

где $\overline{r}_i$ — радиус-вектор точки на линии действия силы $\overline{P}_i$.

---

[1]) Общий метод пространственной графостатики, основанный на изображении в одной плоскости, Известия Технического отделения АН СССР, № 7 (1939).

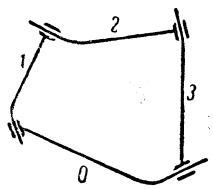
С другой стороны, если движение твердого тела складывается из ряда поступательных движений со скоростями $\overline{V}_k$ и из ряда вращений с угловыми скоростями $\overline{\omega}_i$, то для того, чтобы тело находилось в покое, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum \overline{\omega}_i = 0, \quad \sum \overline{V}_k + \sum [\overline{r}_i, \overline{\omega}_i] = 0, \tag{2}$$

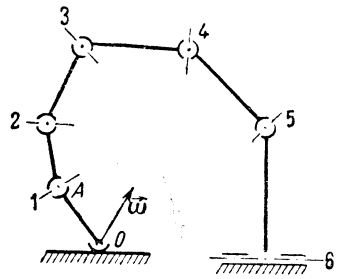
где $\overline{r}_i$ — радиус-вектор точки на оси вращения $\overline{\omega}_i$.

Отсюда вытекает следующий принцип.

Если под действием системы сил $\overline{P}_i$ и пар $\overline{M}_k$ твердое тело находится в равновесии, то твердое тело, совершающее поступательные движения со скоростями $\overline{V}_k = \overline{M}_k$ и вращательные движения с угловыми скоростями $\overline{\omega}_i = \overline{P}_i$, будет находиться в покое.



Черт. 1.



Черт. 2.

Приведем примеры.

Пусть мы имеем пространственный четырехзвенный механизм, состоящий из четырех поступательных пар (черт. 1). Если дана скорость звена 1, то определение скоростей остальных звеньев эквивалентно, на основании указанного принципа соответствия, следующей задаче пространственной статики. Твердое тело находится в равновесии под действием четырех пар, одна из которых задана, а для остальных даны направления осей; определить эти пары. Обе эти задачи эквивалентны задаче о разложении свободного вектора на три составляющие по трем заданным направлениям.

Пусть мы имеем теперь нормальный пространственный семизвенный механизм с вращательными парами (черт. 2). Задано положение механизма и угловая скорость звена OA. Требуется определить скорости остальных звеньев. Эта задача эквивалентна, на основании указанного принципа соответствия, следующей задаче статики. Твердое тело находится в равновесии под действием семи сил, из которых одна задана полностью, а для остальных известны их линии действия; определить эти силы. Решение этой задачи сводится к разложению скользящего вектора по шести заданным осям.

Если твердое тело участвует в ряде поступательных движений со скоростями $\overline{V}_k$, а также вращается вокруг ряда осей с угловыми скоростями $\overline{\omega}_i$, то для того, чтобы тело двигалось прямолинейно и равномерно, необходимо и достаточно, чтобы между ускорениями этого тела имели место соотношения

$$\sum J_i + \overline{l} = 0, \quad \sum \overline{a}_k^{(2)} + \sum [\overline{r}_i, \overline{J}_i] + \overline{k} = 0 \text{ и } \sum \overline{\omega}_i = 0, \tag{3}$$

где $\overline{J}_i$ — угловые ускорения, $\overline{a}_k^{(2)}$ — относительные ускорения, $\overline{k}$ представляет собой сумму кориолисовых и центростремительных ускорений полюса, а $\overline{l}$ — сумму угловых кориолисовых ускорений.

При решении задач на определение ускорений скорости и положение тела заранее уже известны, таким образом векторы $\overline{l}$ и $\overline{k}$ известны. Сравнивая уравнения

(3) и (2), мы приходим вновь к принципу соответствия, аналогичному предыдущему. На основании этого принципа, например, задача об определении ускорений пространственного семизвенного механизма, если заданы положение механизма, распределение его скоростей и угловое ускорение звена OA (черт. 2), эквивалентна следующей задаче статики. Твердое тело находится в равновесии под действием восьми сил и пары, причем две из сил и пара заданы, а для остальных сил известны линии их действия; требуется определить величину и направление этих сил.

При использовании графических методов пространственной статики и кинематики простота и практическая применимость того или иного метода зависит, главным образом, от простоты трех основных построений: 1) построение изображения пространственного вектора на плоскости или нескольких плоскостях, 2) построение векторного произведения двух векторов (вектора-момента), 3) построение скалярного произведения. Все построения при решении какой-нибудь задачи в значительной мере сводятся к различным комбинациям операций, входящих в указанные три основные построения. Отсюда ясно, что упрощение основных построений приводит к упрощению всего метода. Такие упрощения построений применительно к методу Майора-Мизеса были даны Федергофером[1]) и Бейером[2]). Мы приведем здесь некоторые из этих упрощений. Напомним для этого вкратце основные положения метода Майора-Мизеса. Этот метод основан на соответствии, устанавливаемом между свободным вектором $(\overline{P})$ с координатами X', Y', Z' в пространстве и скользящим вектором $\overline{P}$ на плоскости (за эту плоскость примем плоскость XOY). Вектор $\overline{P}$, по Майору, равен по величине и направлению проекции вектора $(\overline{P})$ на плоскость XOY; таким образом координаты вектора $(\overline{P})$ равны

$$X = X', \quad Y = Y'. \tag{4}$$

Линия действия этого вектора определяется соотношением

$$M = cZ', \tag{5}$$

где M — статический момент вектора $\overline{P}$ относительно центра плоскости изображений (начала координат). Этот момент считается положительным в случае, если вектор $\overline{P}_3$ вращает плоскость изображений вокруг точки O (черт. 3) против направления хода стрелки часов. Постоянная c имеет произвольное, но фиксированное при решении данной задачи, значение. Уравнение линии действия вектора $\overline{P}$ будет, таким образом,

$$Yx - Xy = M, \tag{6}$$

где x и y — текущие координаты.

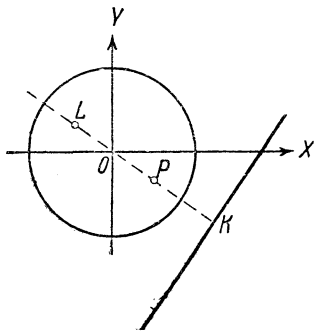
Векторы $(\overline{P})$, перпендикулярные плоскости XOY, изображаются парами сил на плоскости изображений, причем момент пары определяется тем же соотношением (5).

---

[1]) Loc. cit.

[2]) Bemerkungen zur Konstruktion des Momentvektors für die graphische Behandlung der Kinematik und Statik des Raumes, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (в дальнейшем цитируется как ZAMM), 1930, стр. 618.

Операции геометрического сложения свободных векторов в пространстве отвечает операция сложения соответствующих скользящих векторов на плоскости изображений.



Черт. 3.

Заметим также, что при указанном соответствии параллельным векторам в пространстве отвечают на плоскости изображений векторы с одной и той же линией действия. Таким образом некоторому направлению в пространстве отвечает на плоскости некоторая определенная прямая. Совокупности свободных векторов в пространстве, направления которых расположены в одной плоскости, отвечает на плоскости изображений совокупность скользящих векторов, линии действия которых проходят через одну точку. Эту точку можно считать изображением направления соответствующей плоскости.

Проведем в плоскости изображений (черт. 3) окружность

$$x^2+y^2=c^2.$$

Уравнение поляры точки (полюса) $P(x_0, y_0)$ относительно этой окружности будет, как известно,

$$xx_0+yy_0=c^2. \tag{7}$$

В методе Майора-Мизеса, при построениях, имеет большое значение определение так называемого антиполюса данной прямой по отношению к окружности (7).

Антиполюс есть точка L (черт. 3), расположенная на продолжении перпендикуляра, опущенного из точки O на данную прямую, причем $OL\cdot OK=c^2$.

Координаты антиполюса будут

$$x^*=-x_0, \quad y^*=-y_0,$$

где x_0, y_0 — координаты полюса прямой.

Для прямой

$$Yx-Xy=M$$

координаты антиполюса будут, очевидно,

$$x^*=-\frac{Yc^2}{M}, \quad y^*=\frac{Xc^2}{M},$$

или, принимая во внимание (4) и (5),

$$x^*=-\frac{Y'c}{Z'}, \quad y^*=\frac{X'c}{Z'}. \tag{8}$$

Если два вектора $(\bar{P})$ и $(\bar{P}_1)$ взаимно перпендикулярны, то линия действия изображения каждого из этих векторов проходит через антиполюс изображения другого вектора. Действительно, условие перпендикулярности данных векторов выражается в виде

$$X'X_1'+Y'Y_1'+Z'Z_1'=0; \tag{9}$$

уравнение линии действия изображения, например, первого из этих векторов будет

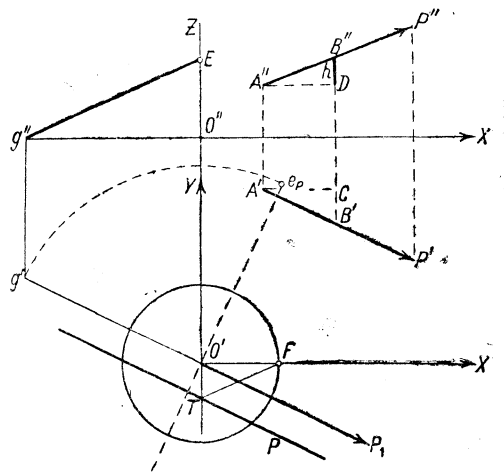
$$Y'x-X'y=cZ'; \tag{10}$$

антиполюс линии действия второго вектора имеет координаты

$$x_1^* = -\frac{Y_1'c}{Z_1'}, \quad y_1^* = \frac{X_1'c}{Z_1'}; \tag{11}$$

при выполнении условия (9) точка (11) лежит на прямой (10).

Прагер[1]) предложил некоторое видоизменение метода изображений Майора и Мизеса. Свободный вектор в пространстве Прагер предлагает изображать на плоскости точкой, именно антиполюсом линии действия изображения этого вектора по Майору-Мизесу. Эта точка снабжается массой, пропорциональной вертикальной проекции Z' изображаемого вектора. При этом способе изображений геометрической сумме векторов в пространстве отвечает центр масс их изображений. Векторы, параллельные одной и той же плоскости, изображаются точками, расположенными на одной прямой, и т. д. Прагер дает, на основе своих соображений, удобный прием для построения скалярного произведения векторов.



Черт. 4.

Для построения изображения данного вектора по методу Майора-Мизеса Федергофер рекомендует одно из следующих построений.

Пусть пространственный вектор задан своими проекциями $A'P'$ и $A''P''$ на горизонтальную и вертикальную плоскости (черт. 4).

Для построения изображения этого вектора на плоскости $XO'Y$ откладываем на $A'P'$ отрезок $A'B' = c$ (c — упомянутая выше постоянная). Проводим $B'B''$ и $A''D$. Отрезок h дает тогда плечо скользящего вектора (изображения) относительно точки O' (центра изображения). Действительно, уравнение линии действия изображения будет

$$Y'x - X'y = cZ', \tag{10}$$

откуда $h = \frac{cZ'}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}$; но $A'C = \frac{X'c}{\sqrt{X'^2 + Y'^2}}$ и, следовательно,

$$DB'' = A'C\frac{Z'}{X'} = h.$$

Другое построение в некоторых случаях более удобно. Откладываем $O'F = c$ (черт. 4) и проводим FT параллельно $A''P''$; тогда линия действия изображения — прямая P — проходит через точку T.

Действительно, координата точки пересечения линии действия изображения с прямой $x = 0$ будет $-\frac{cZ'}{X'}$. С другой стороны, уравнение прямой, проходящей через точку F параллельно $A''P''$, будет $y = \frac{Z'}{X'}(x - c)$ и, следовательно,

[1]) „К кинематике пространственных ферм"; см. ниже, стр. 187—206.

$O'T = -\frac{cZ'}{X'}$. На черт. 4 прямая P есть линия действия изображения, а вектор $O'P_1$ определяет величину и направление изображения.

На том же черт. 4 показано построение изображения вектора ($A'P'$, $A''P''$) по методу Прагера, т. е. построение антиполюса изображения по Майору-Мизесу.

Откладываем $O''E = c$. Проводим Eg'' параллельно $A''P''$, $O'g'$ параллельно $A'P'$. Поворачиваем $O'g'$ на 90° по направлению хода стрелки часов и получаем точку e_P, которая и будет искомым изображением. Действительно, уравнение прямой Eg'' будет $z = \frac{Z'}{X'}x + c$, а уравнение прямой $O'g'$ будет $y = \frac{Y'}{X'}x$ и, следовательно, координаты точки g' будут $x_g = -\frac{cX'}{Z'}$, $y_g = -\frac{cY'}{Z'}$; отсюда координаты точки e_P будут

$$x^* = y_g = -\frac{cY'}{Z'}, \quad y^* = -x_g = \frac{cX'}{Z'}.$$

Сравнивая с (8), убеждаемся в правильности построения.

Построение для определения момента силы ($\overline{P}$) (скользящего вектора), расположенной в пространстве, относительно центра изображений (точка O' черт. 5) было предложено Мизесом (см. ниже, стр. 171). Вектору момента на плоскости изображений отвечает скользящий вектор, причем из соображений размерности полагают:

$$X = \frac{M_x}{c}, \quad Y = \frac{M_y}{c}, \quad M_z = M,$$

где M_x, M_y и M_z — координаты вектора момента.

Пусть сила задана своим изображением — прямая P и вектор $O'P_1$ (черт. 5) — и точкой пересечения линии ее действия с плоскостью изображений (точка g_P). Строим точку e_P — антиполюс линии действия P (см. предыдущее построение). Так как вектор момента направлен перпендикулярно к силе ($\overline{P}$), то линия действия его изображения проходит через e_P. С другой стороны, эта линия действия перпендикулярна к $O'g_P$. Таким образом для определения линии действия изображения вектора момента проводим через e_P прямую, перпендикулярную к $O'g_P$. Проводя затем через P_1 прямую, перпендикулярную к e_Pg_P, до пересечения с прямой, проходящей через O' и параллельной направлению изображения вектора момента, получим точку M'. Отрезок $O'M'$ дает величину и направление изображения вектора момента.

В самом деле, должно быть

$$x_{M'} = \frac{M_x}{c} = \frac{Z'y_g}{c}, \quad y_{M'} = \frac{M_y}{c} = -\frac{Z'x_g}{c},$$

где x_g, y_g — координаты точки g_P. С другой стороны, для точек P_1 и e_P имеем $P_1(X', Y')$ и $e_P\left(-\frac{Y'c}{Z'}, \frac{X'c}{Z'}\right)$. Следовательно, уравнение прямой, проходящей через P_1 перпендикулярно к g_Pe_P, будет

$$y - Y' = -\frac{x_g + \frac{Y'c}{Z'}}{y_g - \frac{X'c}{Z'}}(x - X').$$

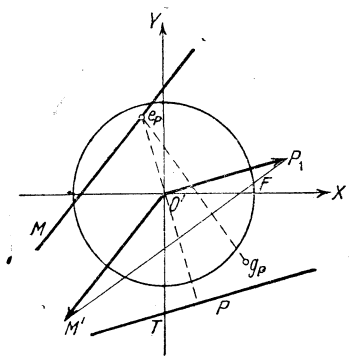
Координаты точки пересечения этой прямой с прямой $y = -\frac{x_g}{y_g} x$ будут

$$x_{M'} = \frac{y_g Z'}{c} \text{ и } y_{M'} = -\frac{x_g Z'}{c},$$

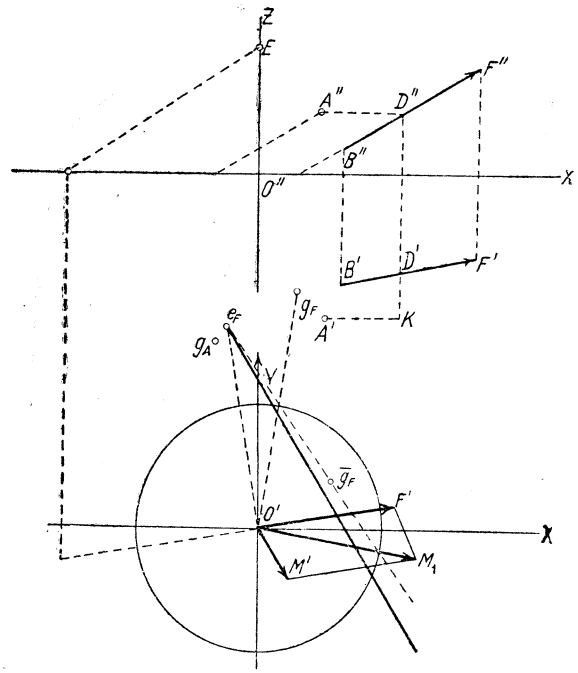
что доказывает правильность указанного выше построения.

Для определения момента скользящего вектора $(\overline{F})$ относительно произвольной точки A в пространстве Федергофер предлагает следующее построение.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ — радиус-векторы точки A и некоторой точки B, лежащей на линии



Черт. 5.



Черт. 6.

действия вектора $(\overline{F})$. Скользящий вектор $(\overline{F})$ задан своим изображением и точкой пересечения g_F линии действия этого вектора с плоскостью $XO'Y$ (черт. 6). Момент вектора $(\overline{F})$ относительно точки A равен

$$(\overline{M}) = [\overline{b} - \overline{a}, (\overline{F})] = [\overline{b}, (\overline{F})] - [\overline{a}, (\overline{F})].$$

Построим сначала точку пересечения g_A прямой, проведенной через точку A параллельно вектору $(\overline{F})$, с плоскостью $XO'Y$ (черт. 6). Изображение вектора момента относительно A перпендикулярно $g_A g_F$, и его линия действия проходит через антиполюс e_F линии действия изображения $\overline{F}$. Строим по способу, указанному выше, момент $[b, (\overline{F})]$. На черт. 6 этому моменту отвечает отрезок $O'M_1$. Направление изображения вектора $\overline{M}$ нам известно. Если заметить, что изображение вектора $[\overline{a}, (\overline{F})]$ направлено перпендикулярно к $O'g_A$, то ясно, что для определения величины и направления изображения $\overline{M}$ надо провести $O'M'$ перпендикулярно $g_A g_F$ и M_1M' перпендикулярно $O'g_A$.

Следующее замечание, принадлежащее Бейеру[1]), позволяет упростить предыдущее построение. Если бы за плоскость изображений была взята плоскость,

[1]) R. Beyer, Bemerkungen zur Konstruktion des Momentvektors für die graphische Behandlung der Kinematik und Statik des Raumes, ZAMM, 1930, стр. 618.

проходящая через точку A параллельно плоскости $XO'Y$, и точка A была бы взята за центр плоскости изображений, то построение момента вектора $(\overline{F})$ относительно точки A производилось бы по обычному правилу построения момента вектора относительно центра плоскости изображений. Если совместить новую плоскость изображений со старой так, чтобы точка A совпала с точкой O и направления соответствующих координатных осей также совпали, то изображения вектора в обеих плоскостях совпадут. Таким образом все сводится к построению точки $\overline{g}_F$ пересечения линии действия вектора $(\overline{F})$ с новой плоскостью изображений. Координаты этой точки относительно нового начала (точки A) будут $A'K$ и KD' (черт. 6); для их определения достаточно провести $A''D''$ и $A'K$ параллельно $O'X$ и $D''D'$ параллельно $O'Y$.

Если построить точку $\overline{g}_F$ (черт. 6) с координатами $A'K$ и KD' в плоскости изображений и определить момент вектора $(\overline{F})$ относительно центра O' плоскости изображений, считая $\overline{g}_F$ точкой пересечения линии действия вектора $(\overline{F})$ с плоскостью изображений, мы получим момент вектора (F) относительно точки A.

Для определения скалярного произведения двух векторов по их изображениям надо, по Прагеру, вычислить статический момент изображения одного из векторов относительно антиполюса линии действия изображения другого вектора. Действительно, пусть X_1', Y_1', Z_1' и X_2', Y_2', Z_2' — координаты этих векторов. Уравнение линии действия изображения первого вектора будет

$$Y_1'x - X_1'y = cZ_1',$$

а координаты антиполюса другого вектора будут

$$x^* = -\frac{Y_2'c}{Z_2'}, \quad y^* = \frac{X_2'c}{Z_2'};$$

следовательно, статический момент изображения первого вектора относительно антиполюса второго вектора равен

$$(X_1'X_2' + Y_1'Y_2' + Z_1'Z_2')\frac{c}{Z_2'}.$$

Таким образом скалярное произведение векторов равно произведению упомянутого статического момента на $\frac{Z_2'}{c}$.

Заметим, что при построениях оказывается чрезвычайно удобным комбинировать изображения по способам Майор-Мизеса и Майор-Прагера. Например, удобно изображать на одном и том же чертеже силы по первому способу, а моменты — по второму. В работе Прагера (см. стр. 193) этот прием использован при построении диаграмм перемещений узлов пространственных ферм.