A. B. Venkov, On accessory coefficients in the Schwarz equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1983, Volume 270, Number 5, 1042–1045

коэффициентами. При этом несколько конкретизируются требования к форме $a(u, v)$ (см. (13), (14)). Во-вторых, на основании оценок из [6] в теореме о повышении гладкости ослаблены требования к коэффициентам уравнения. Наконец, неоднородная краевая задача изучена для более общих уравнений.

В работах [1, 2] не изучался вопрос о зависимости гладкости решения от гладкости граничных условий. В данной работе введено пространство $W^{\gamma, \sigma}$ и доказан изоморфизм (20).

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. П.И. Лизоркину за постановку задачи и постоянное внимание, проявляемое к работе.

Математический институт им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР, Москва

Поступило
1 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский С.М.* Тр. МИАН, 1979, т. 150, с. 212–238. 2. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* – Там же, 1981, т. 157, с. 90–118. 3. *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* – ДАН, 1981, т. 259, № 1, с. 21–23. 4. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 455 с. 5. *Лионс Ж., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с. 6. *Agmon S.* Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton, 1965. 291 p.

УДК 517.941 МАТЕМАТИКА

А.Б. ВЕНКОВ

## ОБ АКЦЕССОРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ В УРАВНЕНИИ ШВАРЦА

*(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 14 X 1982)*

Дифференциальное уравнение Шварца появляется при изучении конформного отображения верхней полуплоскости $H \subset \mathbf{C}$ на многоугольник $M$, ограниченный дугами окружностей. Если $z$ – отображающая функция, то

$$\{z, J\} = Q_M(J), \tag{1}$$

где $\{z, J\}$ – производная Шварца, $\{z, J\} = z'^{-1}z'' - \frac{3}{2}z''^2 z'^{-2}$, $Q_M$ – рациональная функция, однозначно определяемая $M$ и имеющая полюсы второго порядка в точках $a_k$, которые соответствуют вершинам $M$. Коэффициенты при этих полюсах выражаются простыми формулами через величины внутренних углов $M$ (см. [1–4]). Однако, насколько нам известно, до настоящего времени нет точных формул для $n - 2$ коэффициентов $X_k$ (акцессорных коэффициентов) при полюсах первого порядка в точках $a_k$, которые выражали бы эти коэффициенты в терминах $M$ или группы монодромии $\Gamma_M$ соответствующего линейного уравнения Фукса.

В настоящей заметке мы приводим некоторые формулы для искомых акцессорных коэффициентов $X_k$ в предположении, что группа $\Gamma_M$ является фуксовой группой первого рода и $M$ имеет по крайней мере один нулевой внутренний угол. Вывод формул проводится в два этапа. Сначала мы выражаем $X_k$ через коэффициенты Фурье $A_k$ соответствующего инварианта Клейна $J_M(z)$. Затем вычисляем все коэффициенты $A_k$ (за исключением постоянного члена) в терминах взвешенных рядов Дирихле с общими суммами Клостермана. При этом используются методы спектральной теории автоморфных функций (см. [5]), так как круговой метод Харди–Радемахера–Ленера (см. [6]) не дает здесь, вообще говоря, достаточной точности.

Переходим к формулировкам строгих утверждений. Пусть $M$ – односвязный круговой многоугольник с $n+1$ вершинами $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ и внутренними углами $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2, \ldots, \pi\alpha_{n+1}$ соответственно, $n \geqslant 2$ фиксировано. Наложим на $M$ две группы ограничений. Ограничения из первой группы являются принципиальными, из второй – приняты лишь для технического удобства.

1а) $M$ является геодезическим многоугольником на плоскости Лобачевского;

б) каждое число $\alpha_k$ имеет вид $\alpha_k = m_k^{-1}, m_k \geqslant 2, m_k \in \mathbf{Z}$ или $m_k = \infty$;

в) по крайней мере одно из $\alpha_k$ равно нулю.

2а) Пусть плоскость Лобачевского, содержащая $M$, реализована как верхняя полуплоскость $\{z \in \mathbf{C}, z = x + iy \mid y = \operatorname{Im} z > 0\}$;

б) $b_{n+1} = i\infty$;

в) для достаточно большого $a > 0$ $\{z \in M \mid y \geqslant a\} = [0, ½] \times [a, \infty)$.

Пусть теперь $z(J)$ – конформное отображение $H = \{\operatorname{Im} J > 0\}$ на внутренность $M$. Положим $b_j = z(a_j)$; $j = 1, 2, \ldots, n+1$; $a_j \in \mathbf{R}$, $a_{n+1} = \infty$. Из конформности $z(J)$ следует уравнение (1) и формула (см. [2, 4])

$$(2)\qquad Q_M(J) = \prod_{k=1}^{n} (J - a_k)^{-1} \left[ E_{n-2}(J) + \sum_{k=1}^{n} N_k (J - a_k)^{-1} \right],$$

$$N_k = ½(1 - \alpha_k^2) \prod_{l=1}^{n}{}' (a_k - a_l),$$

где штрих означает, что произведение берется по всем $l$, кроме $l = k$; $E_{n-2}(J)$ – многочлен,

$$E_{n-2}(J) = \sum_{k=0}^{n-2} X_k J^k, \quad X_{n-2} = ½.$$

Задача состоит в отыскании $n-2$ коэффициентов $X_k$ этого многочлена.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$(3)\qquad \{z, J\} = J'^{-2}(z)\{J, z\}.$$

Лемма доказывается последовательным дифференцированием тождества $z(J(z)) = z$, где $J(z)$ обратно к $z(J)$. $J(z) = J_M(z)$ – абсолютный инвариант Клейна.

Введем обозначения:

$$J(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} A_k \exp(2\pi i k z), \quad \prod_{k=1}^{n} (J - a_k) = \sum_{k=0}^{n} B_k J^k, \quad B_n = 1;$$

$$\Phi_p(r) = \sum_{\substack{t_1 + \ldots + t_p + s_1 + \ldots + s_4 = r \\ -1 \leqslant t_1, \ldots, t_p, s_1, \ldots, s_4 < \infty}} A_{t_1} A_{t_2} \ldots A_{t_p} A_{s_1} A_{s_2} A_{s_3} A_{s_4} s_1 s_2 s_3 s_4,$$

$$\Psi(r) = \sum_{k=0}^{n} B_k \sum_{l_1 + \ldots + l_k + m_1 + m_2 = r} A_{l_1} A_{l_2} \ldots A_{l_k} A_{m_1} A_{m_2} m_1^2 m_2 \left( \frac{3}{2} m_2 - m_1 \right),$$

где все индексы – целые числа.

Теорема 1. *Для коэффициентов $X_p$ справедливы формулы*

$$X_p = \sum_{r=-4}^{-n-2} \Phi_p^{-1}(r) \Psi(r), \quad \{\Phi_p(r)\}\{\Phi_p^{-1}(r)\} = \delta_{-4-r,p},$$

*где $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера.*

Приведем кратко идею доказательства теоремы. Из формул (1), (2), (3) получаем уравнение для $J$:

$$\prod_{k=1}^{n}(J(z)-a_k)\left(\frac{3}{2}J''^2(z)-J'''(z)J'(z)\right)=J'^4(z)E_{n-2}(J(z))+\underset{J\to\infty}{O}(|J(z)|^3). \tag{4}$$

Подставляя в (4) разложение для $J(z)$ в ряд Фурье, получаем

$$\sum_{r=-n-2}^{\infty}\exp(-2\pi ry)\sum_{p=0}^{n-2}X_p\Phi_p(r)=\sum_{r=-n-2}^{\infty}\exp(-2\pi ry)\Psi(r)+\underset{y\to\infty}{O}(\exp 6\pi y),$$

откуда следует линейная система

$$\sum_{p=0}^{n-2}X_p\Phi_p(r)=\Psi(r),\quad r=-n-2,\ldots,-4.$$

Нетрудно доказать, что матрица $\{\varphi_p(r)\}$ треугольная, а ее определитель равен $\exp\left(\frac{n^2+5n-6}{2}\ln A_{-1}\right)>0$, что и доказывает теорему.

Таким образом, для определения $X_k$ достаточно найти коэффициенты Фурье $A_k$, $k=-1,0,\ldots$ Воспользуемся связью между конформным отображением односвязной области $\Omega$ на верхнюю полуплоскость и функцией Грина краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа на $\Omega$ (см. [7]). Пусть $G_M(z,z')$ – указанная функция Грина для многоугольника $M$.

Л е м м а 2. *Справедлива формула*

$$G_M(z,z')=-\frac{1}{2\pi}\ln\{|J_M(z)-J_M(z')|\cdot|J_M(z)-\overline{J_M(z')}|^{-1}\}.$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}_M$ – группа, порожденная отражениями относительно всех сторон $M$. Рассматривая ее как абстрактную группу, выберем в ней подгруппу $\Gamma_M$, состоящую из всех слов, имеющих четную длину. $\Gamma_M$ – фуксова группа первого рода (см. [5], § 6.4). Обозначим через $r(z,z';s;\Gamma_M)$ ядро резольвенты в точке $s(1-s)$ автоморфного лапласиана, порожденного оператором Лапласа–Бельтрами плоскости Лобачевского (см. [5]).

Т е о р е м а 2. *Справедлива формула* $G_M(z,z')=\lim\limits_{s\to1+0}[r(z,z';s;\Gamma_M)-r(-\bar z,z';s;\Gamma_M)]$, *где черта означает комплексное сопряжение.*

Данная теорема следует из теоремы 6.4.3 работы [5], в которой устанавливается связь между спектральной теорией автоморфных функций и краевыми задачами Дирихле и Неймана для оператора Лапласа–Бельтрами.

Для формулировки дальнейших утверждений введем ряд Зигеля–Сельберга (см. [8]) $F_n(z,s)=\sum\limits_{\gamma\in\Gamma_\infty\setminus\Gamma_M}\exp(2\pi inx(\gamma z))\sqrt{y(\gamma z)}\,I_{s-1/2}(2\pi|n|y(\gamma z))$, где $n\in\mathbf{Z}$, $z=x(z)+iy(z)$, $\operatorname{Re}s>1$, $\Gamma_\infty$ – подгруппа $\Gamma_M$, порожденная сдвигами $z\to z+1$, $I_s(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента. Из теоремы 1 статьи [8] следует

Л е м м а 3. 1) *Пусть $m,n\in\mathbf{Z}$, $m\neq0$, $m\neq n$. Тогда $m$-й коэффициент Фурье ряда $F_n(z,s)$ равен*

$$2\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|m|y)\sum_{c>0}c^{-1}S(-m,-n;c)M_{2s-1}(c^{-1}\cdot4\pi\sqrt{-mn}), \tag{5}$$

*где*

$$M_{2s-1}(a\sqrt{-mn})=\begin{cases}I_{2s-1}(a\sqrt{|mn|}), & \textit{если } mn<0,\\ J_{2s-1}(a\sqrt{mn}), & \textit{если } mn>0.\end{cases}$$

*Здесь приняты обозначения:* $J_s(z)$ *– функция Бесселя,* $K_s(z)$ *– модифицированная функция Бесселя,* $S(m, n; c)$ *– общая сумма Клостермана,*

$$S(m, n; c) = \sum_{0 \leqslant d < c} \exp 2\pi i c^{-1}(ma + nd);$$

$\gamma z = (az + b)(cz + d)^{-1}$, $\gamma$ *берется в классе* $\Gamma_\infty \setminus \Gamma_M / \Gamma_\infty$.

2) *Для* $m = n$ *в выражении* (5) *следует добавить еще слагаемое, равное* $\sqrt{y}\, I_{s-1/2}(2\pi|n|y)$.

Перейдем к формулировкам заключительных утверждений работы, дающих искомые формулы для коэффициентов $A_k$.

Теорема 3. *Справедлива формула* $\operatorname{Im} J(z) A_{-1}^{-1} = \pi i \lim_{s \to 1+0} (F_1(z, s) - F_{-1}(z, s))$, *где* $\operatorname{Im} z$ *– мнимая часть* $z$.

Для доказательства теоремы достаточно найти главный член асимптотического разложения функции Грина $G_M(z, z')$ при больших значениях $\operatorname{Im} z$ двумя различными способами в соответствии с леммой 2 и теоремой 2. Во втором случае надо воспользоваться разложением Фурье для ядра резольвенты $r(z, z'; s; \Gamma_M)$ (см. [9]; [5] § 2.1; [10], следствие 3.5).

Теорема 4. *Справедливы следующие формулы для коэффициентов Фурье инварианта Клейна* $J(z)$:

$$A_k A_{-1}^{-1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sum_{c>0} c^{-1} S(-k, 1; c) I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k}}{c}\right) - \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \sum_{c>0} c^{-1} S(-k, -1; c) \times$$

$$\times J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{k}}{c}\right), \quad k \geqslant 2,$$

$$A_1 A_{-1}^{-1} = 2\pi \sum_{c>0} c^{-1} S(-1, 1; c) I_1\left(\frac{4\pi}{c}\right) - 2\pi \sum_{c>0} c^{-1} S(-1, -1; c) J_1\left(\frac{4\pi}{c}\right) + 1.$$

Утверждение теоремы следует из утверждений теоремы 3 и леммы 3.

Автор признателен А.М. Полякову, обратившему его внимание на этот круг вопросов, и Л.А. Тахтаджяну за полезные замечания к теореме 4.

Ленинградское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 X 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwarz H.A.* Gesammelte mathematische Abhandlungen. B.: Springer, 1890, B. II, S. 370. 2. *Klein F., Fricke R.* Automorphen functionen. Leipzig: Teibner, 1901, B. II, S. 282. 3. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. Наука, 1968, с. 646. 4. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950, с. 436. 5. *Венков А.Б.* Тр. МИАН, 1981, т. 153. 6. *Lehner J.* Mathematical surveys. Amer. Math. Soc., 1964, № 8. 7. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.: ГТТИ, 1933, т. 1, с. 525. 8. *Niebur D.* – Nagoya Math. J., 1973, vol. 52, p. 133. 9. *Фаддеев Л.Д.* Тр. ММО, 1967, т. 17, с. 323. 10. *Fay J.D., Reine J.* – Angew. Math., 1977, Bd. 293/294, S. 143.