И. П. Рязанцева, О выборе параметра регуляризации при решении нелинейных задач с монотонными операторами, *Изв. вузов. Матем.*, 1985, номер 4, 55–57

Предложенный метод доказательства теоремы позволяет обобщить условия задачи. Во-первых, решение распространяется на случай отображения круга E на плоскость с конечным числом аналитических разрезов. Пусть функция f, $f(0)=0$, конформно отображает круг E на плоскость с непересекающимися аналитическими разрезами $L_1, \dots, L_n$, имеющими соответственно концевые точки $A_1, \dots, A_n$ и образующими с радиальным направлением в каждой точке угол, не превосходящий α. Продолжим непрерывно функцию f в $\bar{E}$ так, что точки $e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}$ соответствуют вершинам $A_1, \dots, A_n$, а точки $e^{i\psi_1}, \dots, e^{i\psi_n}$ соответствуют вершинам в бесконечно удаленной точке, $\psi_j < \varphi_j < \psi_{j+1}$, $j=1, \dots, n$; $\psi_{n+1} = \psi_1 + 2\pi$. Тогда окружность ∂E разбивается на $2n$ дуг $l_{1,j}$, $l_{2,j}$, $j=1, \dots, n$, на каждой из которых выполняется одно из неравенств (2), (3) со своими целыми числами k_j. Если потребовать, напр., чтобы разрезы $L_1, \dots, L_n$ были аналитическими в бесконечно удаленной точке, то $u(e^{i\theta})$ как функция переменного θ будет иметь в точках $\psi_1, \dots, \psi_n$ разрывы 1-го рода со скачками, равными π. В этом случае все целые числа k_j, $j=1, \dots, n$, равны между собой. Тогда, как и в доказательстве теоремы, строим звездообразную функцию (4), заключаем, что $k_j=0$, $j=1, \dots, n$, предельным переходом получаем свойство среднего для функции u на ∂E и, пользуясь неравенствами (2), (3), приходим к оценке

$$\frac{\pi-2\alpha}{\pi+2\alpha} \leqslant \left[\sum_{j=1}^{n}(\varphi_j-\psi_j)\right] \Big/ \left[2\pi+\sum_{j=1}^{n}(\psi_j-\varphi_j)\right] \leqslant \frac{\pi+2\alpha}{\pi-2\alpha}.$$

Как и прежде, знаки равенства здесь достигаются только для функций, отображающих круг E на плоскость с n разрезами по логарифмическим спиралям наклона α в случае левого неравенства или наклона $-\alpha$ в случае правого неравенства.

Другое обобщение задачи заключается в отказе от требования аналитичности разреза с заменой его на условие кусочной гладкости и на возможность кусочно непрерывного продолжения функции u на дуги l_1, l_2. Именно эти свойства использовались при доказательстве теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств.— М., 1971.—312 с.

г. Саратов

Поступила 06.05.1983

И. П. Рязанцева УДК 517.988

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Пусть X есть E-пространство, X^* — пространство, сопряженное X, которое считаем строго выпуклым, $A: X \to X^*$ — максимальный монотонный оператор, K — выпуклое замкнутое множество в $D(A)$, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$.

Рассмотрим неравенство

$$\langle Ax-f,\ z-x\rangle \geqslant 0 \quad \forall z \in K,\ x \in K, \tag{1}$$

где $f \in X^*$ — некоторый фиксированный элемент. Далее будем считать, что существует число $r>0$ такое, что при $\|x-x^0\| \geqslant r$ выполняется неравенство

$$\langle y-f,\ x-x^0\rangle \geqslant 0, \tag{2}$$

здесь $y \in Ax$, $x^0 \in K$, $x \in K$. При этих условиях множество N решений (1) непусто (см. [1], [2]).

Пусть вместо f в (1) задано его δ-приближение f^δ, т. е. $\|f-f^\delta\|\leqslant\delta$, $0<\delta<1$. Ставится задача: построить последовательность $x_\delta\to\bar{x}\in N$ при $\delta\to 0$. Для решения этой задачи применим операторный метод регуляризации (см., напр., [1]) вида

$$\langle Ax+\alpha U(x-x^0)-f^\delta, z-x\rangle\geqslant 0 \quad \forall z\in K,\ x\in K, \tag{3}$$

где $\alpha>0$ — параметр регуляризации, $U: X\to X^*$ — дуальное отображение в X [3].

Справедливо неравенство

$$\langle y+\alpha U(x-x^0)-f^\delta, x-x^0\rangle=\langle y-f,\ x-x^0\rangle+\alpha\|x-x^0\|^2+$$
$$+\langle f-f^\delta, x-x^0\rangle\geqslant\langle y-f, x-x^0\rangle+\alpha\|x-x^0\|(\|x-x^0\|-\delta/\alpha),\ \ y\in Ax.$$

Отсюда следует, что при $\|x-x^0\|\geqslant r_1$, где $r_1=\max\{r,\delta/\alpha\}$, имеем $\langle y+\alpha U(x-x^0)-f^\delta, x-x^0\rangle\geqslant 0$, $y\in Ax$. Значит, (3) имеет единственное решение $x_\alpha^\delta\in K$, причем $\|x_\alpha^\delta-x^0\|\leqslant r_1$ (см. [1], [2]). Это тем более верно при $r_1=\max\{r,\delta^p/\alpha\}$, $0<p<1$.

Обозначим $\rho(\alpha)=\alpha\|x_\alpha^\delta-x^0\|$, тогда $\rho(\alpha)\leqslant\alpha r_1$. Далее, если $r_1=r$, то $\rho(\alpha)\leqslant\alpha r$, а если $r_1=\delta/\alpha$, то $\rho(\alpha)\leqslant\delta$. Отсюда следует, что при $\alpha<\delta^p/\alpha$ функция $\rho(\alpha)<\delta^p$, $0<p<1$.

Пусть $x^0\in\operatorname{int}K$, оператор A хеминепрерывен в точке x^0, и $\|Ax^0-f^\delta\|>\delta^p$. Тогда, т. к. непрерывная функция $\rho(\alpha)$ монотонно возрастает (см. [4]), то существует решение $\bar{\alpha}$ числовых неравенств

$$\delta^p/(cr)\leqslant\bar{\alpha}\leqslant\max\{\alpha:\rho(\alpha)\leqslant\delta^p\},\ \ c>1. \tag{4}$$

Отметим, что $\rho(\bar{\alpha})\leqslant\delta^p$. Из (4) следует, что $\delta/\bar{\alpha}\leqslant\delta cr/\delta^p=\delta^{1-p}cr$, т. е. $\delta/\bar{\alpha}\to 0$ при $\delta\to 0$. Решение неравенства (3) при $\alpha=\bar{\alpha}$ обозначим через $x_{\bar{\alpha}}^\delta$. Теперь нетрудно убедиться в справедливости теоремы.

Теорема. *Последовательность* $\{x_{\bar{\alpha}}^\delta\}$ *при* $\delta\to 0$ *сходится по норме* X *к элементу* $x^*\in N$, *причем* $\|x^*-x^0\|=\min\limits_{x\in N}\|x-x^0\|$.

Замечание 1. Замена известного (см. [4], [5]) правила выбора параметра регуляризации $\bar{\alpha}$ из принципа невязки в форме $\rho(\bar{\alpha})=\delta^p$ на (4) приводит к сокращению времени численной реализации на ЭВМ операторного метода регуляризации. При этом приближения $x_{\bar{\alpha}}^\delta$, где $\bar{\alpha}$ выбирается по правилу (4), не хуже в смысле невязки, чем приближения, полученные при том же значении δ с выбором $\bar{\alpha}$ из уравнения $\rho(\bar{\alpha})=\delta^p$. Отметим также, что в работе [6], где рассматривается метод регуляризации А. Н. Тихонова для нелинейных задач, параметр регуляризации также выбирается из некоторого неравенства.

Замечание 2. Если вместо оператора A задана последовательность максимальных монотонных операторов $\{A^h\}\ \forall h>0$, $A^h: X\to X^*$, причем операторы $A^h\ \forall h>0$, хеминепрерывны в точке x^0, и $r^*(M(x), M^h(x))\leqslant h$, где $M(x)$ и $M^h(x)$ множества значений операторов A и A^h соответственно в точке x; $r^*(P,Q)$ — хаусдорфово расстояние между множествами P и Q в X^*, то при $0<\delta+h<1$ и $\|A^hx^0-f^\delta\|>(\delta+h)^p$ параметр регуляризации $\alpha=\bar{\alpha}$ при решении регуляризованного неравенства $\langle A^hx+\alpha U(x-x^0)-f^\delta, z-x\rangle\geqslant 0\ \forall z\in K$, можно выбирать по правилу $(\delta+h)^p/(cr)\leqslant\bar{\alpha}\leqslant\max\{\alpha:\rho(\alpha)\leqslant(\delta+h)^p\}$.

Замечание 3. В условиях работы [7] (п. 4) неравенства (4) надо заменить на следующие: $\delta^p/(cr)\leqslant\bar{\beta}\leqslant\sup\{\beta:\rho(\beta)\leqslant\delta^p\}$.

Замечание 4. При $K=D(A)$ полученные результаты переносятся на задачу решения уравнения $Ax=f$ с монотонным оператором A.

Замечание 5. Известно [8], [9], что (2) является необходимым и достаточным условием существования решения уравнения $Ax=f\ \forall f\in X^*$ с монотонным оперататором A. Так как в наших условиях $\operatorname{int} K\neq\varnothing$, то можно построить максимальный монотонный оператор $\widetilde{A}$ с $D(\widetilde{A})=K$ такой, что неравенство (1) будет эквивалентно уравнению $\widetilde{A}x=f$, причем $\widetilde{A}x=Ax$ при $x\in\operatorname{int} K$ (см. [8]), а на границе области K оператор A доопределяется полулиниями (см. [9]). Следовательно, (2) является также необходимым и достаточным условием существования решения неравенства (1) при $\forall f\in X^*$. Отметим также, что если множество K ограничено, то условие (2) излишне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бакушинский А. Б., Поляк Б. Т. О решении вариационных неравенств.— ДАН СССР, 1974, т. 219, № 5, с. 1038—1041.

2. Рязанцева И. П. О решении вариационных неравенств с монотонными операторами методом регуляризации.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 2, с. 479—483.

3. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М., 1972.—416 с.

4. Рязанцева И. П. О принципе невязки для нелинейных задач с монотонными операторами.— Дифференц. уравнения, 1983, т. XIX, № 6, с. 1079—1080.

5. Альбер Я. И., Рязанцева И. П. Вариационные неравенства с разрывными монотонными отображениями.— ДАН СССР, 1982, т. 262, № 6, с. 1289—1293.

6. Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г. О принципе невязки при решении нелинейных некорректных задач.—ДАН СССР, 1974, т. 214, № 3, с. 499—500.

7. Рязанцева И. П. Об уравнениях с полумонотонными разрывными отображениями.— Матем. заметки, 1981, т. 30, № 1, с. 143—152.

8. Rockafellar R. T. Monotone operators and the proximal point algorithm.— SIAM J. Control and Optim., 1976, v. 14, № 5, p. 877—893.

9. Rockafellar R. T. Local boundedness of nonlinear, monotone operators.—Mich. Math. J., 1969, v. 16, № 4, p. 397—407.

г. Горький

Поступила
23.05.1983

Н. А. Степанов

УДК 514.169

О φ-ПРОСТРАНСТВАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛНЫМИ ЭНДОМОРФИЗМАМИ

Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и единицей e. Рассмотрим аналитический эндоморфизм φ группы G. Группу Ли всех φ-неподвижных элементов обозначим через H^φ, а ее алгебру Ли — через $\mathfrak{h}$. Эндоморфизм φ позволяет построить действие группы G на себе по правилу [1]:

$$u*x=ux\varphi(u^{-1}),\quad u\in G,\ x\in G. \tag{1}$$

Орбиту единицы относительно этого действия обозначим через M. Так как для аналитического эндоморфизма φ действие (1) является аналитическим, то орбита M является погруженным подмногообразием в G. Ясно, что (1) индуцирует действие G на M, относительно которого многообразие M является однородным пространством, изоморфным факторпространству G/H^φ, на котором G действует по правилу: $u*xH^\varphi=uxH^\varphi$. При этом изоморфизм имеет вид $\widetilde{f}:xH^\varphi\in G/H^\varphi\to x\varphi(x^{-1})\in M$. Очевидно, что отображение $f:x\in G\to x\varphi(x^{-1})\in M$ является дифференцируемым. Обозначая через π каноническое отображение группы G на G/H^φ, получаем $\widetilde{f}\circ\pi=f$.

В теории квазигрупп подстановку $\theta:Q\to Q$ квазигруппы $Q(\cdot)$ принято называть полной [2], если существует такая подстановка $\lambda:Q\to Q$, что $\lambda(x)\theta(x)=x$ для любого элемента $x\in Q$. Если при этом θ — автоморфизм, то говорят о полном автоморфизме. В случае дифференцируемой квазигруппы