Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Дориченко, Л. Медников, А. Шаповалов, XXXI Турнир городов,
Квант, 2010, номер 4, 47–48

https://www.mathnet.ru/kvant2472

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 17:24:26

XXXI Турнир городов

ЗАДАЧИ ВЕСЕННЕГО ТУРА

Базовый вариант

8–9 классы

1 (3)[1]. В шести корзинах лежат груши, сливы и яблоки. Число слив в каждой корзине равно числу яблок в остальных корзинах вместе взятых, а число яблок в каждой корзине равно числу груш в остальных корзинах вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

М.Мурашкин, А.Шаповалов

2 (3). Малыш и Карлсон режут квадратный торт. Карлсон выбирает на нем точку (не на границе). После этого Малыш делает прямолинейный разрез от выбранной точки до края (в любом направлении). Затем Карлсон проводит второй прямолинейный разрез от выбранной точки до края, перпендикулярный первому, и отдает меньший из получившихся двух кусков Малышу. Малыш хочет получить хотя бы четверть торта. Может ли Карлсон ему помешать?

М.Мурашкин

3. Нарисован угол, и еще имеется только циркуль.

а) (2) Какое наименьшее число окружностей надо провести, чтобы наверняка определить, является ли данный угол острым?

б) (2) Как определить, равен ли данный угол 31° (разрешается проводить сколько угодно окружностей)?

Г.Фельдман, Д.Баранов

4 (5). Среди участников олимпиады каждый знаком не менее чем с тремя другими. Докажите, что можно выбрать группу из четного числа участников (больше двух человек) и посадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком с обоими соседями.

Фольклор (предложил А.Шаповалов)

5 (5). На доске записано 101 число: $1^2, 2^2, \ldots, 101^2$. За одну операцию разрешается стереть любые два числа, а вместо них записать модуль их разности. Какое наименьшее число может получиться в результате 100 операций?

М.Малкин

10–11 классы

1 (3). Из Южной Америки в Россию 2010 кораблей везут бананы, лимоны и ананасы. Число бананов на каждом корабле равно числу лимонов на остальных кораблях вместе взятых, а число лимонов на каждом корабле равно числу ананасов на остальных кораблях вместе взятых. Докажите, что общее число фруктов делится на 31.

М.Мурашкин, А.Шаповалов

2 (4). См. задачу М2184 «Задачника «Кванта».

3 (5). Можно ли поверхность правильного октаэдра оклеить несколькими правильными шестиугольниками без наложений и пробелов? (В правильном октаэдре 6 вершин, все грани – равносторонние треугольники, в каждой вершине сходятся 4 грани.)

Н.Авилов

4 (5). См. задачу М2186 «Задачника «Кванта».

5 (6). См. задачу М2188 «Задачника «Кванта».

Сложный вариант

8–9 классы

1 (3). Есть кусок сыра. Разрешается выбрать любое положительное (возможно, нецелое) число $a \neq 1$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезаний весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

А.Шаповалов

2 (4). В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что $BO = BP$. Найдите отношение $OM : PC$.

М.Волчкевич

3. На окружности расставлены 999 чисел, каждое равно 1 или –1, причем не все числа одинаковые. Возьмем все произведения по 10 подряд стоящих чисел и сложим их.

а) (3) Какая наименьшая сумма может получиться?

б) (3) А какая наибольшая?

А.Толпыго

4 (6). Сумма цифр натурального числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3?

А.Канель-Белов

5. а) (3) Три богатыря едут верхом по кольцевой дороге против часовой стрелки. Могут ли они ехать неограниченно долго с различными постоянными скоростями, если на дороге есть только одна точка, в которой богатыри имеют возможность обгонять друг друга?

б) (5) А если богатырей десять?

А.Клячко, Е.Френкель

6 (8). На плоскости дана незамкнутая несамопересекающаяся ломаная, в которой 31 звено (соседние звенья не лежат на одной прямой). Через каждое звено провели прямую, содержащую это звено. Получили 31 прямую, некоторые из них, возможно, совпали. Какое наименьшее число различных прямых могло получиться?

А.Толпыго

7 (11). На некоторых клетках доски 10×10 сидит по блохе. Раз в минуту блохи одновременно прыгают, причем каждая – в соседнюю клетку (по стороне). Блоха прыгает строго в одном из четырех направлений, параллельных сторонам доски, сохраняет направление, пока это возможно, иначе меняет его на противоположное. Пес Барбос наблюдал за блохами в течение часа и ни разу не видел, чтобы две из них сидели на одной клетке. Какое наибольшее количество блох могло прыгать по доске?

М.Мурашкин

[1] *Здесь и далее в скобках после номера задачи указано максимальное количество баллов, присуждавшихся за ее решение.*

10 – 11 классы

1 (3). Можно ли все прямые на плоскости разбить на пары перпендикулярных прямых так, чтобы каждая прямая входила ровно в одну пару?

А.Шаповалов

2. а) (2) Есть кусок сыра. Разрешается выбрать иррациональное $a > 0$ и разрезать этот кусок в отношении $1 : a$ по весу, затем разрезать в том же отношении любой из имеющихся кусков, и т.д. Можно ли действовать так, что после конечного числа разрезаний весь сыр удастся разложить на две кучки равного веса?

б) (2) Тот же вопрос, но выбирается положительное рациональное $a \neq 1$.

А.Шаповалов

3 (6). Можно ли, применяя к числу 1 функции sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg в некотором порядке, получить число 2010? (Каждую функцию можно использовать сколько угодно раз.)

С.Маркелов

4 (6). На съезд собрались 5000 кинолюбителей, каждый видел хотя бы один фильм. Их делят на секции двух типов: либо обсуждают фильм, который все члены секции видели, либо каждый рассказывает о виденном фильме, который больше никто в секции не видел. Докажите, что всех можно разбить ровно на 100 секций. (Секции из одного человека разрешаются: он пишет отзыв о виденном фильме.)

И.Митрофанов

5 (7). См. задачу М2189 «Задачника «Кванта».

6 (8). Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N – середины сторон AB и CD. Известно, что $IM/AB = IN/CD$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция или параллелограмм.

Н.Белухов, А.Заславский

7 (9). См. задачу М2190 «Задачника «Кванта».

Устный тур для 11 класса

1. См. задачу М2185 «Задачника «Кванта».

2. В кинотеатре два зала с одинаковым числом мест. В каждом зале несколько рядов (места в любом ряду нумеруются подряд, начиная с единицы). Группа школьников побывала на утреннем сеансе в первом зале, а на дневном сеансе – во втором, оба раза заняв все места. Известно, что в первом зале есть ряд из 10 мест, а во втором – нет. Докажите, что найдутся два школьника, которые на одном из сеансов сидели в одном ряду, а на другом – имели одинаковый номер места.

А.Буфетов

3. На плоскости дана окружность ω_1 радиуса 1. На одной из ее хорд как на диаметре построена окружность ω_2. На одной из хорд ω_2 как на диаметре построена окружность ω_3, и т.д. Найдите наибольшее возможное расстояние между двумя точками, одна из которых принадлежит ω_1, а другая принадлежит $\omega_{1000000}$.

М.Мурашкин

4. Ладья прошлась по шахматной доске 8×8, не проходя дважды через одну и ту же клетку и не перепрыгивая через клетки. При этом все повороты направо делались в черных клетках, а налево – в белых. Какое наибольшее число клеток могло быть пройдено?

А.Шаповалов

5. Саша и Люда играют в игру. Саша должен построить описанный 13-угольник с одной заданной стороной, а Люда хочет ему помешать. Сначала Саша называет номер стороны – число k от 1 до 13. Затем Люда задает длину этой стороны – действительное положительное число s. Саша выиграет, если опишет теперь вокруг единичного круга 13-угольник, где длина k-й по величине стороны равна s. Может ли Люда ему помешать? (Сторона k-я по величине, если найдутся $k-1$ сторон не короче нее и при этом остальные $13-k$ сторон не длиннее нее.)

А.Шаповалов

6. Обозначим через $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ произведение всевозможных попарных разностей $a_i - a_j$, где $1 \le i < j \le n$. Докажите, что для любых натуральных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ число $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ делится на $[1, 2, \ldots, n]$.

М.Берштейн

Публикацию подготовили
С.Дориченко, Л.Медников, А.Шаповалов

LXXIII Московская математическая олимпиада

ЗАДАЧИ

6 класс

1. На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по желтым – 7 кусков, а если по зеленым – 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трех цветов?

А.Шаповалов

2. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про свое золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: Все мое золото я украл у Дракона.

Б: Ты лжешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

И.Раскина