А. П. Осколков, Начально-краевые задачи для уравнений движения нелинейных вязко-упругих жидкостей, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 147, 110–119

А.П.Осколков

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

Течения определенных классов нелинейных вязкоупругих жидкостей, частным случаем которых являются водные растворы полимеров, описываются системой уравнений [I – 6]:

$$L(v) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(v + \varkappa \,\mathrm{rot}^2 v) + \nu\,\mathrm{rot}^2 v - \varkappa \sum_{\ell=1}^{L}\left(1-\frac{1}{\ell}\right)\lambda_\ell \frac{\partial^\ell \mathrm{rot}^2 v}{\partial t^\ell} +$$

$$+\left(1+\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell \frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}\right)\mathrm{grad}\,p = f(x,t),\ \mathrm{div}\,v = 0;\ \lambda_\ell \geq 0,\ \ell = 1,\dots,L-1;\ \nu,\varkappa,\lambda_L > 0;\ L = 1,2,\dots \tag{I}$$

Система (I) решается в $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω – ограниченная область из E^3, $0 < T < \infty$, при начально-краевых условиях:

$$\left.\frac{\partial^s v}{\partial t^s}\right|_{t=0} = v_{0s}(x),\ x\in\Omega,\ s = 0,1,\dots,L-1,\ v\Big|_{\partial Q_T} = 0;\ \left.\frac{\partial^s p}{\partial t^s}\right|_{t=0} = p_{0s}(x), x\in\Omega, s = 0,1,\dots,L-2^{*)}. \tag{2}$$

Назовем сильным решением (решением в смысле О.А.Ладыженской [7]) начально-краевой задачи (I),(2) функцию $v \in W_\infty^{L-1}(0,T; W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega))$, у которой производные $\frac{\partial^L v}{\partial t^L}$, $\frac{\partial^L v_x}{\partial t^L} \in L_2(Q_T)$, которая удовлетворяет начальным условиям (2) при $s = 0,1,\dots,L-1$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathfrak{M}(v,\Phi) \equiv \iint_{Q_t}\left\{\left(\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell} - \nu\,\mathrm{rot}^2 v + \varkappa \sum_{\ell=1}^{L-1}\frac{\lambda_\ell}{\ell}\frac{\partial^\ell \mathrm{rot}^2 v}{\partial t^\ell}\right)\Phi + \frac{\varkappa\lambda_L}{L}\cdot\frac{\partial^L \mathrm{rot}\, v}{\partial t^L}\,\mathrm{rot}\,\Phi -\right.$$

$$\left. - v_k \sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell \frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(v + \varkappa\,\mathrm{rot}^2 v)\Phi_{x_k}\right\}dx\,dt = \iint_{Q_t} f\,\Phi\, dx\,dt,\quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

при $\forall \Phi(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)\cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$.

Покажем, что справедлива теорема существования "в целом" сильного решения начально-краевой задачи (I), (2).

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия: $\partial\Omega \in C^2$; $v_{0s}(x) \in W_2^3(\Omega)\cap H(\Omega)$, $s = 0,1,\dots,L-1$; $f \in L_2(Q_T)$ Тогда начально-краевая задача (I),(2)

*) При $L = 1$ начальные условия для $p(x,t)$ ставить не надо.

при $\forall T<\infty$ имеет по крайней мере одно сильное решение $v(x,t)$, и для этого решения справедлива оценка:

$$J(v)=\|v\|^2_{W^{L-1}_\infty(0,T;W^2_2(\Omega))}+\left\|\frac{\partial^L v_x}{\partial t^L}\right\|^2_{2,Q_T}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\|v_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega};\ \|f\|_{2,Q_T};\ T;\ \varkappa^{-1};\ \lambda_L^{-1}\right). \tag{4}$$

При $L=1$ теорема I доказана в работе автора [I], а при $\forall L=1,2,\ldots$ набросок ее доказательства дан в работах автора [4 - 5].

Для доказательства теоремы I воспользуемся методом введения "исчезающей вязкости". Для этого рассмотрим следующую систему с малым параметром $\varepsilon>0$:

$$L_\varepsilon(v^\varepsilon)\equiv L(v^\varepsilon)-\varepsilon\,\mathrm{rot}^4\frac{\partial^{L-1}v^\varepsilon}{\partial t^{L-1}}=f,\quad \mathrm{div}\,v^\varepsilon=0,\quad (x,t)\in Q_T, \tag{5}$$

и будем решать ее при начально-краевых условиях:

$$\left.\frac{\partial^s v^\varepsilon}{\partial t^s}\right|_{t=0}=v_{0s}(x),\ x\in\Omega,\ s=0,1,\ldots,L-1;\ \ v^\varepsilon\big|_{\partial Q_T}=\mathrm{rot}^2 v^\varepsilon\big|_{\partial Q_T}=0. \tag{6}$$

Назовем сильным решением начально-краевой задачи (5), (6) функцию $v^\varepsilon(x,t)\in W^{L-1}_\infty(0,T;W^2_2(\Omega)\cap H(\Omega))$, у которой производные $\frac{\partial^L v^\varepsilon}{\partial t^L},\frac{\partial^L v^\varepsilon_x}{\partial t^L},\frac{\partial^L v^\varepsilon_{xx}}{\partial t^L},\frac{\partial^L v^\varepsilon_{xxx}}{\partial t^L}\in L_2(Q_T)$ и которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathcal{M}(v^\varepsilon,\varphi)+\varepsilon\iint\limits_{Q_t}\frac{\partial^{L-1}\mathrm{rot}^3 v^\varepsilon}{\partial t^{L-1}}\,\mathrm{rot}\,\varphi\,dx\,dt=\iint\limits_{Q_t}f\varphi\,dx\,dt,\quad 0<t\leqslant T, \tag{7}$$

при $\forall\varphi\in\overset{\circ}{W}{}^{1,0}_2(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$, и покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия: $\partial\Omega\in C^2$, $v_{0s}(x)\in W^3_2(\Omega)\cap H(\Omega)$, $s=0,1,\ldots,L-1$; $f\in L_2(Q_T)$. Тогда начально-краевая задача (5), (6) при $\forall T<\infty$ и $\forall\varepsilon>0$ имеет, и притом единственное, сильное решение $v^\varepsilon(x,t)$, и для этого решения справедлива оценка:

$$J(v^\varepsilon)+\varepsilon\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial^{L-1}v^\varepsilon_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right|^2dx\,dt\leqslant C_2\left(\|v_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega};\ \|f\|_{2,Q_T};\ T,\ \varkappa^{-1},\ \lambda_L^{-1}\right), \tag{8}$$

причем постоянная C_2 не зависит от $\varepsilon > 0$.

Для доказательства существования сильного решения начально-краевой задачи (5), (6) при $\forall \varepsilon > 0$ воспользуемся одной из модификаций метода Галеркина ([8], гл.III). Пусть $\{\varphi^k(x)\}$, $k = 1,2,\ldots$ – полная в $W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ система функций, $\{a^k(x)\}$ – решение краевых задач

$$\varkappa \operatorname{rot}^2 a^k + a^k = \varphi^k(x), x \in \Omega;\ a^k\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ k = 1,2,\ldots \tag{9}$$

Так как $\operatorname{div} \varphi^k = 0$, то и $\operatorname{div} a^k = 0$, $k = 1,2,\ldots$. Легко видеть, далее, что система $\{a^k(x)\}$ также полна в $W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$ ([8], гл.III) и она удовлетворяет в силу (9) и такому граничному условию: $\operatorname{rot}^2 a^k \Big|_{\partial\Omega} = 0,\ k = 1,2,\ldots$.

Будем искать n-ое приближенное решение задачи (5), (6) в виде

$$v^{\varepsilon,n}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_{kn}(t) a^k(x), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{10}$$

из условий ортогональности

$$\int_\Omega [L_\varepsilon(v^{\varepsilon,n}) - f]\varphi^m(x)dx = 0,\ t > 0,\ m = 1,\ldots,n, \tag{11}$$

которые представляют собою систему дифференциальных уравнений

$$\int_\Omega \Big\{\frac{\partial}{\partial t}\sum_{l=1}^{L}\lambda_l \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}\left(v^{\varepsilon,n} + \varkappa \operatorname{rot}^2 v^{\varepsilon,n}\right)\varphi^m - \varepsilon \operatorname{rot}^2 \frac{\partial^{L-1} v^{\varepsilon,n}}{\partial t^{L-1}} \operatorname{rot}^2 \varphi^m + \nu v_x^{\varepsilon,n} \varphi_x^m -$$

$$- v_k^{\varepsilon,n}\varphi_{x_k}^m \sum_{l=1}^{L}\lambda_l \frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}\left(v^{\varepsilon,n} + \varkappa \operatorname{rot}^2 v^{\varepsilon,n}\right) - \varkappa \sum_{l=1}^{L}\left(1 - \frac{1}{l}\right)\lambda_l \frac{\partial^l \operatorname{rot}^2 v^{\varepsilon,n}}{\partial t^l}\varphi^m\Big\}dx =$$

$$= \int_\Omega f\varphi^m dx, \quad m = 1,\ldots,n;\ t > 0, \tag{12}$$

и начальных условий Коши

$$\frac{d^s c_{kn}}{dt^s}\Big|_{t=0} = (v_{0s}, a^k)_{2,\Omega}^{(3)},\ s = 0,1,\ldots,L-1;\ k = 1,\ldots,n. \tag{13}$$

Умножим m-ое уравнение (12) на $\lambda_l \frac{\partial^{l-1} c_{mn}}{\partial t^{l-1}}$, просуммируем по $l = 1,\ldots,L$ и $m = 1,\ldots,n$ и воспользуемся тем, что в силу (9) и (I0)

$$\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{n}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}C_{mn}}{\partial t^l}\varphi^m(x)=\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon,n}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon,n}). \tag{I4}$$

Используя очевидное равенство

$$\int_\Omega v_k^{\varepsilon,n}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon,n}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon,n})\Big\}^2dx=0,\quad t\geqslant0, \tag{I5}$$

получим для галеркинских приближений $\{v^{\varepsilon,n}\}$ равенство:

$$\frac12\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big[\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon,n}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon,n})\Big]^2dx+\varepsilon\int_\Omega\frac{\partial^{L-1}}{\partial t^{L-1}}\mathrm{rot}^2 v_x^{\varepsilon,n}\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon,n}+$$

$$+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v_x^{\varepsilon,n})dx+\nu\int_\Omega v_x^{\varepsilon,n}\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v_x^{\varepsilon,n}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v_x^{\varepsilon,n})dx-\varkappa\int_\Omega\sum_{l=1}^{L}\Big(1-\frac1l\Big)\lambda_l\frac{\partial^l}{\partial t^l}\mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon,n}\times$$

$$\times\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon,n}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon,n})dx=\int_\Omega f\sum_{l=1}^{L}\lambda_l\frac{\partial^{l-1}}{\partial t^{l-1}}(v^{\varepsilon,n}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v^{\varepsilon,n})dx,\ t\geqslant0. \tag{I6}$$

Положим $Y_{\varepsilon,n}^2(t)=\sum_{l=1}^{L}\Big(\Big\|\frac{\partial^{l-1}v^{\varepsilon,n}}{\partial t^{l-1}}\Big\|_{2,\Omega}^{(2)}\Big)^2$.

Из равенства (I6), применяя неравенства Гельдера и Коши и второе основное неравенство для оператора, получим неравенство:

$$\frac{d}{dt}Y_{\varepsilon,n}^2(t)+\varepsilon\int_\Omega\Big|\frac{\partial^{L-1}v_{xxx}^{\varepsilon,n}}{\partial t^{L-1}}\Big|^2dx\leqslant C_3(t,\Omega,\varkappa^{-1},\lambda_L^{-1})\Big[Y_{\varepsilon,n}^2(t)+$$

$$+\varepsilon\sum_{l=1}^{L-1}\int_\Omega\Big|\frac{\partial^{l-1}v_{xxx}^{\varepsilon,n}}{\partial t^{l-1}}\Big|^2dx+\|f\|_{2,\Omega}\cdot Y_{\varepsilon,n}(t)\Big],\ t>0,\ \varepsilon>0,\ n=1,2,\ldots, \tag{I7}$$

а из этого неравенства, используя вытекающие из формулы Ньютона-Лейбница неравенства:

$$\int_\Omega\Big|\frac{\partial^{l-1}v_{xxx}^{\varepsilon,n}}{\partial t^{l-1}}\Big|^2dx\leqslant\Big(\|v_{0,l-1}^{\varepsilon,n}(x,0)\|_{2,\Omega}^{(3)}\Big)^2+$$

$$+C_4(t,L)\iint_{Q_t}\Big|\frac{\partial^{L-1}v_{xxx}^{\varepsilon,n}}{\partial t^{L-1}}\Big|^2dx\,dt,\ \ l=1,\ldots,L-1;\ t>0, \tag{I8}$$

и пользуясь тем, что в силу начальных условий Коши (I3)

$$\|\vartheta^{\varepsilon,n}_{0,\ell-1}(x,0)\|^{(3)}_{2,\Omega} \le C_5 \|\vartheta_{0,\ell-1}\|^{(3)}_{2,\Omega}, \quad \ell=1,\dots,L, \tag{I9}$$

получим неравенство

$$\frac{d}{dt} Y^2_{\varepsilon,n}(t)+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right|^2 dx \le C_6(C_3,t)\Big[Y^2_{\varepsilon,n}(t)+\varepsilon\iint\limits_{Q_t}\left|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right|^2 dx\,dt +$$

$$+\varepsilon\sum_{\ell=0}^{L-1}\left(\|\vartheta_{0,\ell-1}\|^{(3)}_{2,\Omega}\right)^2+\|f\|_{2,\Omega}\, Y_{\varepsilon,n}(t)\Big], \quad t>0. \tag{20}$$

Положим, далее, $Z^2_{\varepsilon,n}(t)\equiv Y^2_{\varepsilon,n}(t)+\varepsilon\iint\limits_{Q_t}\left|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right|^2 dx\,dt,\ t>0.$

Тогда из неравенства (20) получим неравенство

$$\frac{d}{dt} Z^2_{\varepsilon,n}(t)\le C_6\left\{Z^2_{\varepsilon,n}(t)+\|f\|_{2,\Omega}\, Z_{\varepsilon,n}(t)\right\}+C_7\left(C_6,\|\vartheta_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega}\right), \quad t>0. \tag{2I}$$

Далее, из определения $Z_{\varepsilon,n}(t)$ и неравенств (I9) следует, что

$$Z_{\varepsilon,n}\Big|_{t=0}\equiv Y_{\varepsilon,n}\Big|_{t=0}\le C_8\left(\|\vartheta_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega}\right), \quad \varepsilon>0, \tag{22}$$

В неравенствах (2I) и (22) постоянные C_6, C_7 и C_8 не зависят ни от $\varepsilon>0$, ни от $n=1,2,\dots$. Из неравенств (2I) и (22) с помощью леммы Гронуолла получим для $\{\vartheta^{\varepsilon,n}\}$ энергетическое неравенство:

$$\|\vartheta^{\varepsilon,n}\|^2_{W^{L-1}_\infty(0,T;W^2_2(\Omega))}+\varepsilon\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right|^2 dx\,dt \le$$

$$\le C_9\left(\|\vartheta_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega};\ \|f\|_{2,Q_T};\ T,\ \varkappa^{-1},\ \lambda_L^{-1}\right), \tag{23}$$

причем постоянная C_9 не зависит ни от $n=1,2,\dots$, ни от $\varepsilon>0$.

Из оценки (23) следует, что галеркинские приближения $\{\vartheta^{\varepsilon,n}\}$ можно построить, и притом однозначно, при каждом $n=1,2,\dots$, $\forall\varepsilon>0$ и $\forall T<\infty$.

Умножим, далее, m-ое уравнение (I2) на $\lambda_\ell\frac{\partial^\ell C_{mn}}{\partial t^\ell}$ и просуммируем по $m=1,\dots,n$ и $\ell=1,\dots,L$. Тогда получим равенство:

$$\int\limits_{\Omega}\Big\{\Big|\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(\vartheta^{\varepsilon,n}+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n})\Big|^2-æ\sum_{\ell=1}^{L}\Big(1-\frac{1}{\ell}\Big)\lambda_\ell^2\Big(æ\Big|\frac{\partial^\ell \mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n}}{\partial t^\ell}\Big|^2+\Big|\frac{\partial^\ell\vartheta^{\varepsilon,n}}{\partial t^\ell}\Big|^2\Big)\Big\}dx+$$

$$+\nu\int\limits_{\Omega}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xx}\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(\vartheta^{\varepsilon,n}+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n})dx+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(\vartheta^{\varepsilon,n}_x+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n}_x)dx-$$

$$-æ\int\limits_{\Omega}\sum_{\substack{\ell,m=1\\ \ell\neq m}}^{L}\Big(1-\frac{1}{\ell}\Big)\lambda_\ell\lambda_m\frac{\partial^\ell \mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n}}{\partial t^\ell}\cdot\frac{\partial^m}{\partial t^m}(\vartheta^{\varepsilon,n}+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n})dx+\int\limits_{\Omega}\vartheta^{\varepsilon,n}_x\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(\vartheta^{\varepsilon,n}+$$

$$+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n})\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(\vartheta^{\varepsilon,n}+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n})dx=\int\limits_{\Omega}f\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell}(\vartheta^{\varepsilon,n}+æ\,\mathrm{rot}^2\vartheta^{\varepsilon,n})dx,\ t>0. \qquad (24)$$

Из равенства (24), применяя неравенства Гельдера и Коши, второе основное неравенство для оператора Лапласа ([8], гл.Ш)

$$\|\vartheta\|^{(2)}_{2,\Omega}\leqslant C_{10}(\Omega,\partial\Omega)\|\Delta\vartheta\|_{2,\Omega}=C_{10}\|\mathrm{rot}^2\vartheta\|_{2,\Omega},\ \forall\vartheta\in W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega), \qquad (25)$$

теорему вложения С.Л.Соболева ([8], гл.I)

$$\|\vartheta\|_{C(\bar\Omega)}\leqslant C_{11}(\Omega)\|\vartheta\|^{(2)}_{2,\Omega},\ \forall\vartheta\in W^2_{2,0}(\Omega), \qquad (26)$$

неравенства (I8) и (I9) и оценку (23), получим неравенство:

$$\Big(\Big\|\frac{\partial^L\vartheta^{\varepsilon,n}}{\partial t^L}\Big\|^{(2)}_{2,\Omega}\Big)^2+\varepsilon\frac{d}{dt}\Big\|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\Big\|^2_{2,\Omega}\leqslant C_{12}(C_9,C_{10},æ^{-1},\lambda_L^{-1})\Big\|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\Big\|^2_{2,\Omega}+$$

$$+C_{13}(C_{10},æ^{-1},\lambda_L^{-1})\|f\|^2_{2,\Omega}+C_{14}(t,C_9-C_{11},\|\vartheta_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega}),\quad t>0. \qquad (27)$$

Из неравенства (27) с помощью леммы Гронуолла, начальных условий Коши (I3) и неравенств (I9) получим оценку:

$$\Big\|\frac{\partial^L\vartheta^{\varepsilon,n}_{xx}}{\partial t^L}\Big\|^2_{2,Q_T}+\varepsilon\Big\|\frac{\partial^{L-1}\vartheta^{\varepsilon,n}_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\Big\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leqslant e^{C_{12}T\varepsilon^{-1}}C_{15}(\|V_{0s}\|^{(3)}_{2,\Omega};\|f\|_{2,Q_T};æ^{-1},\lambda_L^{-1}), \qquad (28)$$

причем постоянные C_{12} и C_{15} не зависят ни от $n=1,2,\ldots$, ни от $\varepsilon>0$.

Неравенства (23) и (28), теорема о сильной компактности в $L_2(Q_T)$ множества, ограниченного в $W_2^{1,1}(Q_T)$ ([8], гл.I) и теорема о слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве позволяют заключить, что из $\{v^{\varepsilon,n}\}$ при $\forall\varepsilon>0$ можно выделить $\{v^{\varepsilon,n_i}\}$, которая при $i\to\infty$ сходится сильно в $L_2(Q_T)$ к предельной функции $v^\varepsilon(x,t)$ и для которой производные $\frac{\partial^l v^{\varepsilon,n_i}}{\partial t^l}, \frac{\partial^l v_x^{\varepsilon,n_i}}{\partial t^l}, \frac{\partial^l v_{xx}^{\varepsilon,n_i}}{\partial t^l}, l=0,1,\dots,L$, и производные $\frac{\partial^{L-1} v_{xxx}^{\varepsilon,n_i}}{\partial t^{L-1}}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к производным $\frac{\partial^l v^\varepsilon}{\partial t^l}, \frac{\partial^l v_x^\varepsilon}{\partial t^l}, \frac{\partial^l v_{xx}^\varepsilon}{\partial t^l}, l=0,1,\dots,L;\ \frac{\partial^{L-1} v_{xxx}^\varepsilon}{\partial t^{L-1}}$ соответственно.

Умножим, далее, m-ое уравнение (I2), записанное для выбранной выше $\{v^{\varepsilon,n_i}\}$, на произвольную функцию $d_m(t)\in C[0,T]$, просуммируем по $m=1,\dots,n$, $n\le n_i$, положим $\psi^n(x,t)=\sum_{m=1}^{n} d_m(t)\phi^m(x)$ и проинтегрируем по $t\in[0,T]$. Тогда получим тождество:

$$\mathfrak{M}(v^{\varepsilon,n_i};\psi^n)+\varepsilon\iint_{Q_t} \operatorname{rot}^3\frac{\partial^{L-1}v^{\varepsilon,n_i}}{\partial t^{L-1}}\operatorname{rot}\psi^n dx dt=\iint_{Q_t} f\psi^n dx dt,\ \varepsilon>0,\ t>0. \quad (29)$$

Переходя в тождестве (29) к пределу по $i\to\infty$ и используя описанные выше предельные переходы $\{v^{\varepsilon,n_i}\}$ к v^ε, получим, что $v^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет тождеству (7) при $\forall\psi^n(x,t)=\sum_{m=1}^{n} d_m(t)\phi^m(x)$, $\forall d_m(t)\in C[0,T]$, а так как $\{\psi^n(x,t)\}$ плотна в $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,0}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$, то и при $\forall\phi(x,t)\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,0}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T)$. Тем самым существование сильного решения задачи (5), (6) при $\forall\varepsilon>0$ доказано.

Из неравенства (23) предельным переходом по $i\to\infty$ получаем для найденного решения $v^\varepsilon(x,t)$ неравенство:

$$\|v^\varepsilon\|^2_{W_\infty^{L-1}(0,T;W_2^2(\Omega))}+\varepsilon\left\|\frac{\partial^{L-1}v_{xxx}^\varepsilon}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_T}\le C_9, \quad (30)$$

причем постоянная C_9 не зависит от $\varepsilon>0$.

Положим, далее, в интегральном тождестве (7) $\phi\equiv\frac{\partial^L v^\varepsilon}{\partial t^L}$. Тогда, используя неравенства Гельдера и Коши, неравенства (25) и (26), и применяя оценку (30), получим неравенство:

$$\left\|\frac{\partial^L v^\varepsilon}{\partial t^L}\right\|_{2,Q_T}\le C_{16}\left(C_9-C_{11};\ \|f\|_{2,Q_T};\ T,\ \varkappa^{-1},\ \lambda_L^{-1}\right), \quad (31)$$

причем постоянная C_{16} также не зависит от $\varepsilon>0$. Неравенства (30) и (3I) вместе составляют неравенство (8), в котором постоянная C_2 не зависит от $\varepsilon>0$.

Переходя к доказательству единственности сильного решения задачи (5), (6) при $\forall\varepsilon>0$, отметим, что разность $\omega(x,t)$ двух таких возможных решений $v^{(1),\varepsilon}$ и $v^{(2),\varepsilon}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint\limits_{Q_t}\Big\{\Big(\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell\omega}{\partial t^\ell}-\nu\Delta\omega+\varkappa\sum_{\ell=1}^{L}\frac{\lambda_\ell}{\ell}\,\frac{\partial^\ell \mathrm{rot}^2\omega}{\partial t^\ell}\Big)\phi+\frac{\varkappa\lambda_L}{L}\frac{\partial^L \mathrm{rot}\,\omega}{\partial t^L}\mathrm{rot}\,\phi$$

$$+v_k^{(1),\varepsilon}\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(\omega+\varkappa\,\mathrm{rot}^2\omega)_{x_k}\phi-\omega_k\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}\big(v^{(2),\varepsilon}+\varkappa\,\mathrm{rot}^2 v^{(2),\varepsilon}\big)\phi_{x_k}\Big\}\,dx\,dt-$$

$$-\varepsilon\iint\limits_{Q_t}\mathrm{rot}^3\frac{\partial^{L-1}\omega}{\partial t^{L-1}}\mathrm{rot}\,\phi\,dx\,dt=0,\ 0<t\leqslant T,\ \forall\phi\in\overset{\circ}{W}{}_2^{2,0}(Q_T)\cap\overset{\circ}{J}(Q_T),\qquad (32)$$

и начальным условиям Коши $\left.\frac{\partial^s\omega}{\partial t^s}\right|_{t=0}=0$, $x\in\Omega$, $s=0,1,\dots,L-1$. Положим в (32) $\phi\equiv\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(\omega+\varkappa\,\mathrm{rot}^2\omega)$. Тогда, используя очевидное равенство:

$$\iint\limits_{Q_t}v_k^{(1),\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\sum_{\ell=1}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^{\ell-1}}{\partial t^{\ell-1}}(\omega+\varkappa\,\mathrm{rot}^2\omega)\Big]^2dx\,dt=0,\qquad (33)$$

применяя неравенства Гельдера и Коши, неравенства (25), (26) и (18) и полагая для краткости $Y_\varepsilon^2(t)=\sum_{\ell=1}^{L}\left\|\frac{\partial^{\ell-1}\omega_{xx}}{\partial t^{\ell-1}}\right\|^2_{2,Q_t}$, $t>0$, получим неравенство (ср. вывод оценки (23)):

$$Y_\varepsilon^2(t)+\varepsilon\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_T}\leqslant c_{17}(c_Y,c_{10}-c_{11})\Big\{\int_0^t Y_\varepsilon^2(\tau)\,d\tau+\varepsilon\int_0^t\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_T}d\tau$$

$$+\max_{[0,t]}\|\omega_{xx}\|_{2,\Omega}\cdot\sum_{\ell=1}^{L}\left\|\frac{\partial^{\ell-1}v_{xx}^{(2),\varepsilon}}{\partial t^{\ell-1}}\right\|_{2,Q_t}\Big(\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|_{2,Q_t}+\Big(\int_0^t\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_\tau}d\tau\Big)^{1/2}\Big)\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_t}+c_{18}(c_{17},\varepsilon^{-1})\Big\{\int_0^t Y_\varepsilon^2(\tau)\,d\tau+\int_0^t\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_\tau}d\tau+$$

$$+t\,\|v^{(2),\varepsilon}\|_{W_\infty^{L-1}(0,T;W_2^2(\Omega))}\max_{[0,t]}Y_\varepsilon^2(\tau)\Big\},\quad 0<t\leqslant T.\qquad (34)$$

Применяя к неравенству (34) операцию максимизации по t и выбирая затем $t=t^*$ удовлетворяющим условию:

$$C_{18}\, t^*\left(1+\|v^{(2),\varepsilon}\|_{W_\infty^{L-1}(0,T;\,W_2^2(\Omega))}\right)<1, \qquad (35)$$

получим при $t\le t^*$ неравенство:

$$\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_t}\le C_{19}\int_0^t\left\|\frac{\partial^{L-1}\omega_{xxx}}{\partial t^{L-1}}\right\|^2_{2,Q_\tau}d\tau, \qquad (36)$$

а из этого неравенства и однородных начальных и граничных условий для $\omega(x,t)$ следует, что $\omega(x,t)\equiv 0$ при $(x,t)\in Q_{t^*}$. После этого обращение $\omega(x,t)$ в нуль на всем $[0,T]$ (при фиксированном $\varepsilon>0$) доказывается "шагом по t" (ср. [8], гл.УI). Теорема 2 полностью доказана.

Докажем теперь с помощью теоремы 2 теорему I. Так как для сильных решений $\{v^\varepsilon(x,t)\}$ задач (5), (6) справедлива априорная оценка:

$$J(v^\varepsilon)\le C_2, \qquad (37)$$

в которой постоянная C_2 не зависит от $\varepsilon>0$, то по теореме о сильной компактности в $L_2(Q_T)$ множества, ограниченного в $W_2^{1,1}(Q_T)$, и теореме о слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве из однозначно определенной совокупности $\{v^\varepsilon\}$ сильных решений задач (5), (6) можно извлечь $\{v^{\varepsilon_i}\}$, которая при $\varepsilon_i\to 0$ сходится сильно в $L_2(Q_T)$ к предельной функции $v\in L_2(Q_T)$ и для которой производные $\frac{\partial^s v^{\varepsilon_i}}{\partial t^s}$, $s=1,\dots,L$; $\frac{\partial^s v_x^{\varepsilon_i}}{\partial t^s}$, $s=0,1,\dots,L$; $\frac{\partial^s v_{xx}^{\varepsilon_i}}{\partial t^s}$, $s=0,1,\dots,L-1$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к производным $\frac{\partial^s v}{\partial t^s}$, $s=1,\dots,L$; $\frac{\partial^s v_x}{\partial t^s}$, $s=0,1,\dots,L$; $\frac{\partial^s v_{xx}}{\partial t^s}$, $s=0,1,\dots,L-1$, соответственно. Кроме того, в силу (23)

$$\varepsilon_i\iint_{Q_t}\mathrm{rot}^3\frac{\partial^{L-1}v^{\varepsilon_i}}{\partial t^{L-1}}\,\mathrm{rot}\,\phi\,dx\,dt\to 0,\ \varepsilon_i\to 0,\ \forall\phi\in \overset{0}{W}{}_2^{2,0}(Q_T)\cap \overset{0}{J}(Q_T). \qquad (38)$$

Используя все эти предельные переходы и переходя в интегральном тождестве (7) к пределу по выбранной подпоследовательности $\varepsilon_i\to 0$, получим, что предельная функция $v(x,t)$ будет удовлетворять интегральному тождеству (3), т.е. будет одним из сильных решений задачи (I), (2). Наконец, из неравенства (8), в котором постоянная C_2 не зависит от $\varepsilon>0$, предельным переходом по $\varepsilon_i\to 0$ получаем для $v(x,t)$ -решения задачи (I), (2) - неравенство (4). Теорема I полностью доказана.

Литература

1. О с к о л к о в А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1973, т.38, с.98–136.
2. О с к о л к о в А.П. О некоторых модельных нестационарных системах в теории неньютоновских жидкостей. – Тр.Мат.ин–та АН СССР, 1975, т.127, с.32–57.
3. О с к о л к о в А.П. К теории нестационарных течений нелинейных вязкоупругих жидкостей. – В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. I. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1982, т.120, с.142–158.
4. О с к о л к о в А.П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей. – Тр.Мат.ин–та АН СССР, 1983, т.159, с.101–131.
5. О с к о л к о в А.П. Функциональные методы в теории нестационарных течений линейных вязкоупругих жидкостей. Препринт ЛОМИ Р–2–83, Л., 1983.
6. О с к о л к о в А.П. Начально–краевые задачи для уравнений движения вязкоупругих жидкостей. Автореф.докт.дисс., Л.,1983.
7. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2–ое изд. М., 1970.
8. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.

Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion nonlinear viscoelastic fluids.

It is proves "global" theorem on existence generalized solution in sense O.A.Ladyzhenskay of intial-boundary value problem describing the time-dependent flows of particular classes of nonlinear, viscoelastic fluids (for example, flows of aqueous solutions of polymers).