A. CliDąbrowski, Admissible p-adic L-functions of automorphic forms,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1993, Number 2, 8–12

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm2343

УДК 512.754

А. Домбровски

ДОПУСТИМЫЕ p-АДИЧЕСКИЕ L-ФУНКЦИИ АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

Пусть M — мотив над Q. В настоящей статье формулируется гипотеза, согласно которой для каждого простого p существует $h(M)$-допустимая мера μ на Gal_p, преобразование Меллина L_μ которой является C_p-аналитической функцией типа $o(\log^h)$, интерполирующей специальные значения L-функции мотива M в точках критической полосы. Здесь $h(M)$ обозначает число, которое измеряет разницу между арифметикой и геометрией мотива. В рассматриваемых в работе случаях выполнены условия типа алгебраичности (гипотеза Делиня). Для форм, модулярных над Q, доказано существование мотивов [1, 2], причем формулировка гипотезы на уровне мотивов вполне согласуется с уже известными частными результатами. Результаты А. А. Панчишкина [3] вполне подтверждают существование мотивов, связанных с модулярными формами Зигеля.

Мы проверяем гипотезу в случае симметрической степени мотива модулярной формы CM-типа, а также устанавливаем h-допустимость соответствующей меры (построенной А. А. Панчишкиным) в случае симметрического квадрата произвольной модулярной формы.

1. Формулировка гипотезы для мотивов над Q

Гипотеза. *Для каждого* $\varepsilon_0 = \pm 1$ *существует* C_p-*аналитическая функция* $L_p^{\varepsilon_0}: X_p \to C_p$, *такая, что*

(I) *для всех* (*кроме, может быть, конечного числа*) *наборов* $(m, \chi) \in Z \times X_p^{\mathrm{tor}\, s}$, *таких, что мотив* $N = M(\chi)(m)$ *критичен в* $s=0$ *и* $\varepsilon_0 = \varepsilon(\chi)\cdot\nu$, $\nu = (-1)^m$, *имеем*

$$L_p^{\varepsilon_0}(\chi x_p^m) = A_p(N)\cdot\Lambda_\infty(N, 0)\cdot G(\chi)^{-d^{\varepsilon_0}(M)}\cdot\Omega(\varepsilon_0, M)^{-1};$$

(II) *функция* $L_p^{\varepsilon_0}(\chi)$ *голоморфна на* X_p, *если* $M^{k,k}=0$; *в противном случае существуют конечное подмножество* $\Xi \subset X_p$ *и целые числа* $n(\xi)\in \mathbf{N}$, $\xi \in \Xi$, *такие, что* $\forall g_0 \in \mathrm{Gal}_p$ *функция* $\prod\limits_{\xi\in\Xi}(\chi(g_0)-\xi(g_0))^{n(\xi)}\cdot L_p^{\varepsilon_0}(\chi)$ *голоморфна на* X_p;

(III) *функция из* (II) *является голоморфной типа* $o(\log^h)$ (*и является преобразованием Меллина* h-*допустимой меры*);

(IV) *если* $h \leqslant m^* - m_* + 1$, *то условия* (I), (II) *однозначно определяют функцию* $L_p^{\varepsilon_0}$;

(V) *если мотив* M h-*допустим, то существует ограниченная* C_p-*аналитическая функция* $L_p^{\varepsilon_0}$, *удовлетворяющая условиям* (I), (II), (IV).

Здесь использованы обозначения:

$$m_* = \max\{j \mid \exists\, j,\ k: j<k,\ h(j, k)\neq 0\}+1,$$

$$m^* = \min\{j \mid \exists\, j,\ k: j>k,\ h(j, k)\neq 0\},$$

$A_p(N)=$

$$=\begin{cases}\prod\limits_{i=d^+(N)+1}^{d}(1-\chi(p)\alpha^{(i)}(p)\cdot p^{-m})\prod\limits_{i=1}^{d^+(N)}(1-\chi(p)^{-1}\alpha^{(i)}(p)^{-1}\cdot p^{m-1}), & p\nmid c(\chi);\\ \prod\limits_{i=1}^{d^+(N)}(p^m\cdot\alpha^{(i)}(p)^{-1})^{\mathrm{ord}_p c(\chi)}, & p\mid c(\chi),\end{cases}$$

где обратные корни локального p-многочлена $L_p(M, X)^{-1}$ упорядочены следующим образом: $\mathrm{ord}_p\,\alpha^{(1)}(p)\leqslant\mathrm{ord}_p\,\alpha^{(2)}(p)\leqslant\ldots\leqslant\mathrm{ord}_p\,\alpha^{(d)}(p)$; $P_{N,p}$, P_H — многоугольники Ньютона и Ходжа мотива M;

$$h=h(p, M)=[P_{N,p}(d^{\pm})-P_H(d^{\pm})]+1,$$

где [ ] — целая часть; если $P_{N,p}(d^{\pm})=P_H(d^{\pm})$, то мотив M называется p-допустимым, X_p — p-адическая аналитическая группа Ли всех p-адических характеров группы Gal_p.

Необходимые факты по теории мотивов и p-адического интегрирования изложены в [4, 5].

2. Симметрические степени мотивов вида $M(f)$

1. Специализация гипотезы для $\mathrm{Sym}^r M(f)$. Пусть f — голоморфная, модулярная, параболическая, примитивная форма веса $\nu+1\geqslant 2$ с характером ψ кондуктора c_g, $\delta(f)=(2\pi i)^{-1}\cdot G(\psi)$, $\langle f, f\rangle$ — скалярное произведение Петерссона. Применяя лемму Делиня [6], получаем

$$c^{\varepsilon}(\mathrm{Sym}^{2l+1}M(f))=(\langle f, f\rangle\cdot\delta(f))^{\frac{1}{2}l(l+1)}\cdot c^{\varepsilon}(f)^{l+1},\ l=0, 1, \ldots,$$

$$c^{+}(\mathrm{Sym}^{2l}M(f))=(\langle f, f\rangle\cdot\delta(f))^{\frac{1}{2}l(l+1)},$$

$$c^{-}(\mathrm{Sym}^{2l}M(f))=\delta(f)^{-l}\cdot c^{+}(\mathrm{Sym}^{2l}M(f)),\ l=1, \ldots.$$

Кроме того, очевидно, что $d^{\pm}(\mathrm{Sym}^{2l+1}M(f))=l+1$, $d^{+}(\mathrm{Sym}^{2l}M(f))=l+1$, $d^{-}(\mathrm{Sym}^{2l}M(f))=l$.

Пусть $\alpha(p)$, $\beta(p)$ — корни локального p-многочлена мотива $M(f)$, $\mathrm{ord}_p\,\alpha(p)\leqslant\mathrm{ord}_p\,\beta(p)$. Тогда

$$h(\mathrm{Sym}^r M(f))=\begin{cases}\left[\frac{1}{2}d^{+}r\cdot\mathrm{ord}_p\,\alpha(p)\right]+1, & r \text{ четно};\\ \left[\frac{1}{2}d^{+}(r+1)\cdot\mathrm{ord}_p\,\alpha(p)\right]+1, & r \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Множитель A_p тоже можно переписать более явно:

$A_p(\mathrm{Sym}^{2l+1}\cdot)=$

$$=\begin{cases}\prod\limits_{i=0}^{l}[(1-\alpha(p)^{2i-2l-1}\psi(p)^{2l-i+1}p^{(2l-i+1)\nu-m})\times\\ \times(1-\alpha(p)^{2i-2l-1}\psi(p)^{-i}p^{-i\nu+m-1})], & p\nmid c(\chi);\\ [p^{\frac{1}{2}(l+1)(2m-l\nu)}\cdot\alpha(p)^{-(l+1)^2}\cdot\psi(p)^{-\frac{1}{2}l(l+1)}]^{\mathrm{ord}_p c(\chi)}, & p\mid c(\chi),\end{cases}$$

$A_p(\mathrm{Sym}^{2l}\cdot)=$

$$=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{l}[(1-\alpha(p)^{-2i}\psi(p)^{l+1}p^{(l+1)\nu-m})(1-\alpha(p)^{-2i}\psi(p)^{i-1}p^{(i-l)\nu+m-1})]\times\\ \times(1-(\psi(p)\cdot p^{\nu})^{-l}\cdot p^{m-1})^{e(N)}\cdot((1-(\psi(p)p^{\nu})^{l}\cdot)p^{-m})^{1-e(N)},\ p\nmid c(\chi);\\ (p^{\frac{1}{2}l[2m-(l-1)\nu]}\cdot\alpha(p)^{-l(l+1)}\cdot\psi(p)^{-\frac{1}{2}l(l-1)})^{\mathrm{ord}_p c(\chi)}\times\\ \times(p^{m-l\nu}\cdot\psi(p)^{-l})^{e(N)\cdot\mathrm{ord}_p c(\chi)},\ p\mid c(\chi),\end{cases}$$

здесь $e(N)=\begin{cases}0, & d^{+}(N)=l;\\ 1, & d^{+}(N)=l+1.\end{cases}$

2. Замечания. а) При $r=1$ получаем теорему Вишика [7]. б) При $r=2$ гипотеза доказана в обыкновенном случае в [8, 9] и в общем случае в п. 4 настоящей статьи. в) Случай $r=3$ тесно связан с тройными произведениями. Мотив $\mathrm{Sym}^3 M(f)$ является подмотивом мотива $M(f)\otimes M(f)\otimes M(f)$; для $L_{f\otimes f\otimes f}$ доказана теорема о периодах [10] и найдено интегральное представление в терминах некоторого ряда Эйзенштейна—Зигеля рода 3, ограниченного на диагональ.

3. Случай мотивов $\mathrm{Sym}^r M(f)$ CM-типа

0. Пусть λ — характер Гекке веса ν мнимого квадратичного поля K. Тогда $\lambda\mapsto f=f_\lambda$ — модулярная форма веса $\nu+1$, при этом $L(s,\lambda)=L(s,f)$. Пусть $M(f^{(r)})=\mathrm{Res}_{K/\mathbf{Q}}[\lambda^r]$, где $[\lambda^r]$ — мотив ранга 1 над K, ассоциированный с λ^r, $f^{(r)}$ — модулярная форма веса $r\nu+1$, соответствующая характеру Гекке λ^r, так что имеет место равенство $L(s,f^{(r)})=L(s,\lambda^r)$. Выполняются следующие равенства мотивов:

$$\mathrm{Sym}^{2l+1}M(f)=\bigoplus_{i=0}^{l}M(f^{(2l-2i+1)})(\psi^i)(-i\nu),\ l=0,\ 1,\ 2,\ldots,\tag{1}$$

$$\mathrm{Sym}^{2l}M(f)=\bigoplus_{i=0}^{l-1}M(f^{(2l-2i)})(\psi^i)(-i\nu)\oplus[\psi^i](-l\nu),\ i=1,\ 2,\ldots.\tag{2}$$

1. Периоды. Справедливы формулы:

$$c^{\varepsilon}(f^{(2k+1)})=\langle f,f\rangle^k\cdot c^{\varepsilon}(f),$$

$$c^{+}(f^{(2k)})=\langle f,f\rangle^k,\ c^{-}(f^{(2k)})=G(\psi)^{-1}\cdot\langle f,f\rangle^k.$$

Имеет место теорема о периодах для $\mathrm{Sym}^r M(f)$, поскольку она верна для мотивов модулярных форм и мотивов вида $[\psi^i]$.

2. Существование p-адических L-функций для $\mathrm{Sym}^r M(f)$, где f — CM-типа, вытекает из разложений (1), (2), теоремы Вишика и результатов Куботы—Леопольдта—Ивасавы. Проверим ч. I гипотезы. Рассмотрим случай нечетной степени (случай четной степени разбирается аналогично).

3. Имеем $\prod\limits_{i=0}^{l}[c^{\varepsilon}(f^{(2l-2i+1)})G(\psi)^{-i}(2\pi i)^{-i\nu}]=c^{\varepsilon}(\mathrm{Sym}^{2l+1}M(f))$. Проверим еще, что

$$A_p(\mathrm{Sym}^{2l+1}M(f))=\prod_{i=0}^{l}A_p(\underbrace{M(f^{(2l-2i+1)})(\psi^i)(-i\nu)}_{=:\widetilde{M}_i}).\tag{3}$$

Действительно,

$$\alpha(\widetilde{M}_i)=\alpha(p)^{2l-2i+1}\cdot\psi(p)^i\cdot p^{i\nu},$$

$$\beta(\widetilde{M}_i)=\alpha(p)^{2i-2l-1}\cdot\psi(p)^{2l-i+1}\cdot p^{(2l-i+1)\nu},$$

$$A_p(\widetilde{M}_i)=(1-\alpha(p)^{2i-2l-1}\cdot\psi(p)^{2l-i+1}\cdot p^{(2l-i+1)\nu})\times$$

$$\times(1-\alpha(p)^{2i-2l-1}\cdot\psi(p)^{-i}\cdot p^{-i\nu-1}),$$

откуда получаем равенство (3).

4. Проверим ч. III гипотезы. Из работы Вишика следует, что p-адическая L-функция, соответствующая мотиву $M(f)$, имеет тип $o(\log^{\mathrm{ord}_p\alpha(p)})$. Однако $L_p(\mathrm{Sym}^r M(f),\ \cdot)$ является произведением таких p-адических L-функций (и, быть может, p-адической L-функции типа Куботы—Леопольдта—Ивасавы), так что из сказанного выше следует, что она имеет тип $o(\log^h)$, где $h=h(\mathrm{Sym}^r M(f))$.

5. Существование соответствующей h-допустимой меры μ вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть μ_1 (соответственно μ_2) — h_1 (соответственно h_2)-допустимая мера на Gal_p. Тогда $\mu_1*\mu_2$ является (h_1+h_2)-допустимой мерой.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если μ — h-допустимая мера, то $\left|\int\limits_{a+(m)}(x-a)^i\right|_p=o(|m|_p^{i-h})$ для любого i.

Остальные части гипотезы вытекают из разложений (1), (2), результатов Вишика и Куботы—Леопольдта—Ивасавы.

4. $\mathrm{Sym}^2 f$, общий случай

Проверим h-допустимость меры, построенной А. А. Панчишкиным [8]; все обозначения следуют работе [8] и п. 2 настоящей статьи.

0. Используя интегральное представление и теорию Аткина—Ленера, докажем, что нормализованные распределения $D_s^{c\pm}$ можно записать в виде конечной суммы:

$$D_{s,M}^{c\pm}(\chi)=\gamma(M')\cdot\sum_i l(n_i)v^c(M'n_i,\ s,\ \chi).$$

Можно доказать, что

$$v^{c\pm}(M'n,\ s,\ \chi)\equiv\sum_i A_i\chi(y_i)y_i^{s-k+1}\int\limits_{Z^x_{S(N_0)}}\chi x_p^{s-k+1}\,d\mu^{\pm}(c,\ \cdot),\ (\mathrm{mod}\, M''),\quad (4)$$

$$M'\,|\,M'',$$

где $y_i\in Z^x_{S(N_0)}$; A_i p-ограничены; $M,\ M'\in\mathbf{N}$, причем

$$M_0c(\chi)\,|\,M,\ M_0^2c(\chi)\,|\,M' \text{ и } \gamma(M')=o(|M|_p^{-2\,\mathrm{ord}_p\alpha(p)}) \text{ при } M'=M^2.$$

1. Легко доказывается, что существуют C_p-линейные формы $D^{c\pm}$: $\mathscr{C}^{m^*-m_*}(\mathrm{Gal}_p)\to C_p$, такие, что

$$\int\limits_{a+(M)}x_p^j\,dD^{c\pm}=\int\limits_{a+(M)}dD^{c\pm}_{j+1}$$

при $j=0,\ 1,\ldots,m^*-m_*-1$.

Теорема. *Для $D^{c\pm}$ выполнено следующее условие роста*:

$$\sup_{a\in \mathrm{Gal}_p} \left| \int_{a+(M)} (x-a)^r dD^{c\pm} \right|_p = o(|M|_p^{r-2\,\mathrm{ord}_p \alpha(p)}),\ r=0,\ 1, \ldots .$$

Доказательство (набросок). Имеем

$$\int_{a+(M)} (x-a)^r dD^{c\pm} = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-a)^{r-j} \int_{a+(M)} dD_{j+1}^{c\pm}.$$

Достаточно рассмотреть число

$$A = \gamma(M') \sum \binom{r}{j} (-a)^{r-j} \frac{1}{h(M)} \sum_{\chi \bmod M} \chi^{-1}(a) v^{c\pm}(M'n,\ j,\ \chi).$$

Из сравнения (4) получаем

$$A \equiv \gamma(M') \alpha^{r-k+1} \int_{a\alpha^{-1}+(M)} x^{1-k} (x-a\alpha^{-1})^r d\mu^{\pm}(c,\ \cdot).$$

Так как $x^{1-k} d\mu^{\pm}(c,\ \cdot)$ является ограниченной мерой, то последний интеграл имеет порядок $o(|M|_p^r)$. Теперь выберем $M'=M^2$. Теорема доказана.

5. Замечание. С модулярной формой Зигеля можно гипотетически связать мотив над Q и, рассуждая, как в п. 4, можно доказать h-допустимость построенной в работе [3] меры.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Панчишкину за постоянное внимание к работе и многочисленные беседы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jannsen U. Mixed motives and algebraic K-theory//Lect. Notes Math. 1990. 1400.
2. Scholl A. J. Motives for modular forms//Invent. math. 1990. **100** 419—430.
3. Panchishkin A. A. Non-archimedean automorphic L-functions//Lect. Notes Math. 1991. **1471.**
4. Coates J. On p-adic L-functions//Sém. Bourbaki N 701. Astérisque. 1989. **177—178.** 33—58.
5. Panchishkin A. A. Convolutions of Hilbert modular forms, motives and p-adic zeta functions. Preprint MPI. N 43. Bonn, 1990.
6. Deligne P. Valeurs de fonctions L et periodes d'integrales//Proc. Symp. Pure Math. 1979. **33**(**2**). 313—346.
7. Вишик М. М. Неархимедовы меры, связанные с рядами Дирихле//Матем. сб. 1976. **99**. 248—260.
8. Panchishkin A. A. Über Nichtarchimedische Symmetrische Quadrate von Spitzenformen. Preprint MPI. N 52. Bonn, 1989.
9. Schmidt C. G. The p-adic L-functions attached to Rankin convolutions of modular forms//J. reine. und angew. Math. 1986. **368**. 201—220.
10. Garret P. B., Harris M. Special values of triple product L-functions. Preprint. 1989.

Поступила в редакцию
17.06.91