М. В. Игнатьев, О носителях характеров унитреугольной группы, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2009, выпуск 8, 28–34

УДК 512.547.214, 512.743.7

О НОСИТЕЛЯХ ХАРАКТЕРОВ УНИТРЕУГОЛЬНОЙ ГРУППЫ

© 2009 М.В. Игнатьев[1]

Для произвольной конечной группы G и произвольного ее неприводимого комплексного характера χ множество $\mathrm{Supp}(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) \neq 0\}$ называется носителем характера χ.

Пусть $G = U$ — унитреугольная группа (группа унипотентных треугольных матриц) над конечным полем достаточно большой характеристики. В работе вводится понятие i-регулярных характеров группы U, обобщающее регулярный и субрегулярный случаи, и дается описание носителей 2-регулярных характеров в терминах коэффициентов миноров характеристической матрицы.

Ключевые слова: унитреугольная группа, носитель характера, i-регулярные характеры.

Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, p — произвольное простое число, $q = p^r$ для некоторого $r \geqslant 1$ и $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Обозначим через $U = \mathrm{UT}(n, k)$ *унитреугольную группу* — группу всех нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали с элементами из поля k; тогда $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}(U) = U - 1_n$. Мы везде будем предполагать, что $p \geqslant n$; в этом случае стандартные отображения $\exp\colon \mathfrak{u} \to U$ и $\ln\colon U \to \mathfrak{u}$ корректно определены, взаимно однозначны и взаимно обратны. Согласно методу орбит [5, 6], существует взаимно однозначное соответствие между коприсоединенными орбитами U и ее неприводимыми комплексными характерами. Оно устанавливается формулой $\Omega \mapsto \chi$, где

$$\chi(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{f \in \Omega} \theta(f(\ln(g))), \quad g \in U,$$

здесь $\theta\colon k \to \mathbb{C}^*$ — произвольный фиксированный нетривиальный гомоморфизм.

[1]Игнатьев Михаил Викторович (mihail.ignatev@gmail.com), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Полная классификация орбит для произвольного n неизвестна и представляется крайне сложной задачей. В то же время для отдельных серий орбит, допускающих точное описание, возникает задача получения замкнутой формулы для характера. Цель настоящей работы — определить носитель 2-регулярного характера (точные формулировки см. в § 1; основной результат сформулирован в теореме 2.4). Отметим, что соответствующие таким характерам орбиты представляют частный случай орбит, ассоциированных с инволюциями [9].

1. Определение i-регулярных характеров

Мы будем отождествлять $\mathfrak{u}^*$ с $\mathfrak{u}^t$, используя невырожденную на $\mathfrak{gl}_n(k)$ форму $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$; при этом *коприсоединенное представление* принимает простой вид $x.f = \mathrm{pr}(xfx^{-1})$, где $x \in U$, $f \in \mathfrak{u}^*$, а через pr обозначена проекция $\mathfrak{gl}_n(k) \to \mathfrak{u}^*$ вдоль $\mathfrak{u}$. Положим $\Phi^+ = \{(i,j) \mid 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$ (назовем это множество множеством *положительных корней*). Для произвольного $f \in \mathfrak{u}^*$ набор положительных корней вида $\mathrm{Supp}(f) = \{(i,j) \in \Phi^+ \mid f(e_{ij}) \neq 0\}$ будем называть *носителем* формы f.

Пусть теперь $\sigma \in S_n$ — произвольная инволюция, то есть $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Тогда ее можно однозначно представить в виде произведения независимых 2-циклов: $\sigma = (i_1, j_1) \cdot \ldots \cdot (i_t, j_t)$ (будем считать, что $i_l > j_l$ и $j_1 < \ldots < j_t$). *Носителем* инволюции σ мы назовем множество $\{(i_1, j_1), \ldots, (i_t, j_t)\} \subset \Phi^+$. Для произвольного i определим инволюцию σ_i по правилу

$$\begin{aligned}\sigma_i = \quad & (n-1,1)(n-2,2)\ldots(n-i,i)(n,i+1)\times \\ & \times(n-i-1,i+2)(n-i-2,i+3)\ldots(n-n_0+1,n_0),\end{aligned}$$

где $n_0 = [n/2]$. В частности, σ_0 — самый длинный элемент в группе S_n, рассматриваемой как группа Вейля типа A_{n-1}, и $\sigma_i = \sigma_{n_0}$ для любого $n_0 \leqslant i \leqslant n$.

Определение 1.1. Орбиту $\Omega = \Omega_i$ любого элемента $f \in \mathfrak{u}^*$, для которого $\mathrm{Supp}(f) = \mathrm{Supp}(\sigma_i)$, и соответствующий ей неприводимый характер $\chi = \chi_i$ будем называть *i-регулярными*. Сам элемент f_i будем называть *канонической формой* на орбите Ω_i.

Действуя, как в [4, § 3], легко показать, что на каждой i-регулярной орбите лежит ровно одна каноническая форма.

Пример 1.2. Согласно [7], *регулярные* орбиты (то есть орбиты максимальной размерности) — это 0-регулярные орбиты, и только они. Описание соответствующих характеров было получено не так давно К. Андре [1]. В то же время 1-регулярные орбиты относятся к *субрегулярным* (то есть имеют предмаксимальную размерность) [4]. Соответствующие характеры описаны в [3]. Заметим, что субрегулярные орбиты не исчерпываются 1-регулярными.

Для произвольного характера χ группы U через $\mathrm{Supp}(\chi)$ обозначим его *носитель* — множество классов сопряженности, значение χ на которых не равно нулю. Основной результат данной работы — получение явных уравнений, описывающих классы сопряженности, попадающие в носитель произвольного 2-регулярного характера.

2. Основная теорема

Нам понадобится несколько предварительных определений и обозначений.

Определение 2.1. Для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$ будем называть $\mathcal{R}_i = \{(i,b) \mid 1 \leqslant b < i\}$ и $\mathcal{C}_j = \{(a,j) \mid j < a \leqslant n\}$ соответственно *i-й строчкой* и *j-м столбиком* Φ^+. Следуя [1], подмножество $D \subset \Phi^+$ назовем *базисным*, если D имеет не более одного общего элемента с каждым $\mathcal{R}_i$ и $\mathcal{C}_j$.

Отметим, что для любого i носитель σ_i является базисным подмножеством. В то же время Ω_i не совпадает с *базисным подмногообразием* $\mathfrak{u}^*$, определенным в [2]. Для любого подмножества $D \subset \Phi^+$ обозначим для краткости $R_D(i,j) = \{(i,j)\} \cup \{(a,b) \in D \mid b > j \text{ и } a < i\}$.

Обозначение 2.2. Пусть $x = (x_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n,k)$. Через $\Delta^{j_1,\ldots,j_l}_{i_1,\ldots,i_l}(g)$ обозначим минор матрицы x, натянутый на строки $i_1,\ldots,i_l$ и столбцы $j_1,\ldots,j_l$ для любых $1 \leqslant l \leqslant n$, $1 \leqslant i_1,\ldots,i_l,j_1,\ldots,j_l \leqslant n$ (строки и столбцы берутся в указанном порядке). Мы будем использовать обозначение $\Delta^Y(x) = \Delta^{\tau(j_1,\ldots,j_l)}_{\sigma(i_1,\ldots,i_l)}(x)$, где Y есть множество пар вида $\{(i_1,j_1),\ldots,(i_l,j_l)\}$, а σ,τ — перестановки, располагающие каждый из наборов индексов в неубывающем порядке. Если $D \subset \Phi^+$, $(i,j) \in \Phi^+$, то для краткости будем писать $d_{i,j}(x)$ вместо $\Delta^{R_D(i,j)}(x)$.

Определение 2.3. Пусть D — произвольное подмножество $\Phi(n)$. Корень $(i,j) \in \Phi(n)$ называется *D-регулярным*, если $(i,l) \notin D$ и $(l,j) \notin D$ для любого $i > l > j$. Обозначим через $R(D)$ объединение D с множеством всех D-регулярных корней (см. [1]).

Для произвольных $2 \leqslant j \leqslant n_0$ и $n_0 \leqslant i \leqslant n-3$ рассмотрим следующие многочлены (их можно считать функциями на U или же элементами $k[\mathfrak{u}]$):

$$\alpha_j(x) = \sum_{t=n-n_0+1}^{n-1} x_{n,t}x_{t,j}, \quad \beta_i^r(x) = \sum_{t=r+1}^{n_0} x_{i,t}x_{t,r}, \quad r = 1,2, \quad x = (x_{ij}) \in U.$$

Пусть теперь $\chi = \chi_2$ — произвольный 2-регулярный характер группы U и $D \subset S = \mathrm{Supp}(\sigma_2) \setminus (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{R}_n)$ (подмножество D обязательно является базисным). Введем следующие обозначения:
$D_1 = D \cup (n-1,1), D_2 = D_1 \cup (n-2,2), D_3 = D_1 \cup (n,3), D_0 = D_2 \cup (n,3)$,

$D^1_\alpha = D \cup (n,n-1) \cup (3,1), D^2_\alpha = D_1 \cup (n,n-1) \cup (3,2) \cup (n-2,2), D_\beta = D_1 \cup (3,2)$

(отметим, что D^1_α и D^2_α уже не будут базисными подмножествами).

Наконец, для любого отображения $\varphi\colon D \to k^*$ определим следующие подмногообразия в U:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_r = \{x \in U \mid \alpha_i(x) = \beta_j^r(x), (i,j) \in D\}, \quad r = 1,2,\\
&\mathcal{L}_a^b = \{x \in U \mid \xi_{b,n-b}x_{3,b} = \xi_{n,3}x_{n,n-a}\}, \quad 1 \leqslant a,b \leqslant 2,\\
&\mathcal{K}_D^s(\varphi) = \{x \in U \mid d_{i,j}(x-1) = 0, (i,j) \in R(D_s)\}, \quad s = 0,1,2,3,\\
&\mathcal{K}_D^{\alpha,r}(\varphi) = \{x \in U \mid d_{i,j}(x-1) = 0, (i,j) \in R(D_\alpha^r)\} \cap \mathcal{K}_r \cap \mathcal{L}_1^r(\varphi), \quad r = 1,2,\\
&\mathcal{K}_D^{\beta}(\varphi) = \{x \in U \mid d_{i,j}(x-1) = 0, (i,j) \in R(D_\beta)\} \cap \mathcal{K}_2 \cap \mathcal{L}_2^2(\varphi).
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $f = (\xi_{ij}) \in \Omega = \Omega_2$ — каноническая форма на 2-регулярной орбите, соответствующей характеру χ. Теперь все готово для того, чтобы сформулировать основной результат работы.

Теорема 2.4. Пусть χ — 2-регулярный характер группы U, $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$ — соответствующая орбита. Элемент $x \in U$ содержится в $\mathrm{Supp}(\chi)$ тогда и только тогда, когда для какого-нибудь $D \subset S$ выполнено ровно одно из следующих условий:

1. $x_{3,2} \neq 0, x_{n,n-1} \neq 0$ и $x \in \mathcal{K}_D^{\alpha,2}(\varphi)$.
2. $x_{3,2} = 0, x_{n,n-1} \neq 0$ и $x \in \mathcal{K}_D^{\alpha,1}(\varphi)$.
3. $x_{3,2} \neq 0, x_{n,n-1} = 0$ и $x \in \mathcal{K}_D^{\beta}(\varphi)$.
4. $x_{3,2} = 0, x_{n,n-1} = 0$ и $x \in \mathcal{K}_D^{s}(\varphi)$ для какого-нибудь $0 \leqslant s \leqslant 3$.

Схема доказательства. Применим к группе U метод Макки полупрямого разложения (см., например [8]). Положим

$$\begin{aligned}
&U_1 = \{x \in U \mid x_{ij} = 0 \text{ при } 2 \leqslant j < i \leqslant n\},\\
&V = \{x \in U \mid x_{i,1} = 0, 2 \leqslant i \leqslant n\}.
\end{aligned}$$

Тогда $U = U_1V$, $U_1 \cap V = \{1\}$ и $U_1 \lhd U$; другими словами, $U = U_1 \rtimes V$ — полупрямое произведение, причем подгруппа U_1 абелева. Рассмотрим неприводимый характер U_1 вида

$$\psi\colon U_1 \to \mathbb{C}\colon x \to \theta(\xi_{1,n-1}x_{n-1,1}).$$

Здесь, напомним, $\theta\colon k \to \mathbb{C}^*$ — произвольный нетривиальный фиксированный гомоморфизм.

Легко проверить, что централизатор характера ψ в группе V имеет вид

$$V' = \{x \in V \mid x_{n-1,j} = 0, 2 \leqslant j \leqslant n-2\}.$$

Структура этой подгруппы, в свою очередь, очень проста: $V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$, где, по определению, $V_1 = \{1_n + \lambda e_{n,n-1}, \lambda \in k\}$ и $\widetilde{U} = \{x \in V' \mid x_{n,n-1} = 0\}$. Очевидно, что $V_1 \cong k$ и $\widetilde{U} \cong \mathrm{UT}(n-2,k)$.

Согласно методу Макки, это означает, что

$$\chi = \mathrm{Ind}_{U_1V'}^{U}\left(\psi \cdot \mathrm{Ind}_{V_1\widetilde{U}}^{V_1}\tau\widetilde{\chi}\right),$$

где $\tau, \widetilde{\chi}$ — некоторые неприводимые характеры групп $V_1, \widetilde{U}$ соответственно. Здесь и далее если $G = A \rtimes B$, то каждый элемент $g \in G$ однозначно представляется в виде $g = ab, a \in A, b \in B$; поэтому для произвольного характера μ группы A или B мы можем писать просто $\mu(g)$, имея в виду $\mu(a)$ или $\mu(b)$ соответственно. Используя метод орбит (рассматривая поляризации), можно показать, что $\tau = 1$, а $\widetilde{\chi}$ — субрегулярный характер группы $\widetilde{U} \cong UT(n-2, k)$, соответствующий орбите $\widetilde{\Omega} = \pi(\Omega)$. Здесь через $\pi\colon \mathfrak{u}^* \to (\mathrm{Lie}(\widetilde{U}))^*$ обозначено отображение, соответствующее проекции $U \to \widetilde{U}$. Это позволяет использовать описание носителя субрегулярного характера $\widetilde{\chi}$, полученное в [3, теорема 2.8].

Рассмотрим, например, случай $x_{3,2} \neq 0, x_{n,n-1} \neq 0$ (на самом деле, это технически самый сложный случай). Легко видеть, что множество $T = \{t \in U \mid t_{ij} = 0$ при $j \neq n-1\}$ можно выбрать в качестве полной системы представителей U/U_1V'. Применяя стандартную технику индуцированных характеров и простые матричные вычисления, можно показать, что

$$\chi(x) = c \sum_{\{t \in T \mid x_t \in U_1V'\}} \psi(x_t)\widetilde{\chi}(x_t), \tag{2}$$

где $x_t = t^{-1}xt$, а $c \in k^*$ — некоторая константа. Более того, $(x_t)_{i,j} = x_{i,j}$ при $i \leqslant n-2$, в то время как для любого $2 \leqslant j \leqslant n-2$

$$\begin{aligned} &(x_t)_{n-1,j} = x_{n-1,j} - \textstyle\sum_{i=j+1}^{n-2} t_{n-1,i}x_{i,j}, \\ &(x_t)_{n,j} = x_{n,j} + x_{n,n-1}t_{n-1,j}. \end{aligned} \tag{3}$$

Условие $x_t \in U_1V'$ есть в точности условие совместности системы $(x_t)_{n-1,j} = 0$, $2 \leqslant j \leqslant n-2$, которое с учетом [3, лемма 5.1] и критерия Кронекера – Капелли имеет вид $d_{n-1,j}(x) = 0$, если $2 \leqslant j \leqslant n-2$ и $(i,j) \notin D$. Требуя, чтобы $x_t \in \mathrm{Supp}(\widetilde{\chi})$, мы получим, учитывая (3) и используя опять [3, лемма 5.1], что $\alpha_j(x) = 0$, если $(i,j) \in D$. Далее, для любого $\lambda \in k^*$, как известно, $\sum_{\eta \in k} \theta(\eta\lambda) = 0$. Значит, после того как мы выразим из (3) часть $t_{n-1,j}$ и подставим их в формулу (2), нужно приравнять к нулю коэффициенты при оставшихся $t_{n-1,j}$. Отсюда мы получим, что $\beta_i^r(x) = 0$, если $(i,j) \in D$, и $d_{i,1}(x) = 0$, если $2 \leqslant i \leqslant n-2$ и $(i,j) \in D$. Здесь ключевую роль играет тот факт, что, согласно [3, лемма 5.1],

$$\xi_{2,n-2}x_{3,2} = \xi_{3,n}(x_{n,n-2} + x_{n,n-1}t_{n-1,n-2}),$$

поэтому $t_{n-1,n-2}$ однозначно выражается через x_{ij}.

То, что x удовлетворяет остальным уравнениям $\mathcal{K}_D^{\alpha,2}(\varphi)$, гарантируется [3, лемма 5.1]. Остальные случаи разбираются аналогично. $\square$

Отметим, что подмногообразия (1) *не являются* классами сопряженности: каждое из них, вообще говоря, есть объединение классов сопряженности, уравнения которых можно получить, действуя аналогично [3, § 3]. Обратим внимание на то, что многочлены α_j и β_i^r *нельзя* представить в виде миноров матриц из U (иначе говоря, для описания 2-регулярных характеров миноров недостаточно). На самом деле, эти многочлены можно получить как некоторые коэффициенты миноров так называемой *характеристической матрицы* (см. [4]). В терминах коэффициентов таких миноров описываются субрегулярные характеры и орбиты, ассоциированные с инволюциями, а также вообще все орбиты при $n \leqslant 7$ (см. [3, 4, 9]). Можно предположить, что в этих терминах описываются вообще все характеры и орбиты унитреугольной группы для произвольного n.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. А.Н. Панову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Andre C.A.M. The basic character table of the unitriangular group // J. Algebra. 2001. V. 241. P. 437–471.

[2] Andre C.A.M. Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group // J. Algebra. 1995. V. 176. P. 959–1000.

[3] Игнатьев М.В. Субрегулярные характеры унитреугольной группы над конечным полем // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. Вып. 5. С. 103–125 (см. также arXiv: math.RT/0603649v3).

[4] Игнатьев М.В, Панов А.Н. Коприсоединенные орбиты группы $\mathrm{UT}(7, K)$ // Фунд. и прикл. матем. 2007. Т. 13. Вып. 5. С. 127–159 (см. также arXiv: math.RT/0603649).

[5] Kazhdan D. Proof of Springer's hypothesis // Israel J. Math. 1977. V. 28. P. 272–286.

[6] Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // УМН. 1962. Т. 17. С. 57–110.

[7] Кириллов А.А. Метод орбит и конечные группы. М.: МЦНМО; МК НМУ, 1998.

[8] Lehrer G.I. Discrete series and the unipotent subgroup // Compositio Math. 1974. V. 28. No. 1. P. 9–19.

[9] Панов А.Н. Инволюции в S_n и ассоциированные коприсоединенные орбиты // Зап. науч. семинара ПОМИ. 2007. Т. 349. С. 150–173 (см. также arXiv: math.RT/0801.3022v1).

Поступила в редакцию $2/IX/2009$;
в окончательном варианте — $2/IX/2009$.

ON SUPPORTS OF CHARACTERS OF THE UNITRIANGULAR GROUP

 M.V. Ignatev[2]

Let G be a finite group and χ be its irreducible complex character. The set $\mathrm{Supp}(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) \neq 0\}$ is called the support of χ.

Let $G = U$ be the unitriangular group (i.e., the group of unipotent triangular matrices) over a finite field of sufficiently large characteristic. In the paper we introduce the notion of i-regular character and describe the support of a 2-regular character in terms of coefficients of minors of the characteristic matrix.

Key words: the unitriangular group, the support of a character, i-regular characters.

Paper received $2/IX/2009$.
Paper accepted $2/IX/2009$.

[2]Ignatev Mikhail Viktorovich (mihail_ignatev@mail.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.