Л. В. Розовский, О полной сходимости моментов в точных асимптотиках, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2022, том 515, 180–188

https://www.mathnet.ru/znsl7262

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

Л. В. Розовский

О ПОЛНОЙ СХОДИМОСТИ МОМЕНТОВ В ТОЧНЫХ АСИМПТОТИКАХ

§1. Введение и результаты

В дальнейшем, X, X_n, $n \geqslant 1$, являются последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mathbf{E}X = 0$ и $\mathbf{E}X^2 = 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Liu и Lin [1] доказали следующее утверждение:

(a) Для любого $r \in [0, 2)$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{2-r} \sum_{n \geqslant 1} n^{-r}\, \mathbf{E}|S_n|^r\, I[|S_n| \geqslant \varepsilon\, n] = \frac{2}{2-r}. \tag{1.1}$$

(b) Для любого $\delta \in (0, 1]$ при оптимальном моментном условии $\mathbf{E}X^2 \log^{\delta}|X| < \infty$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{2\,\delta} \sum_{n \geqslant 2} \frac{\log^{\delta-1} n}{n^2}\, \mathbf{E}(S_n^2\, I[|S_n| \geqslant \varepsilon \sqrt{n \log n}] = \frac{1}{\delta}\, \mathbf{E}|\xi|^{2+2\delta}, \tag{1.2}$$

где ξ обозначает стандартную нормально распределенную случайную величину.

История вопроса подробно изложена в [2], где при дополнительном предположении $\mathbf{E}|X|^q < \infty$ при некотором $q \in (2, 3]$, была вычислена скорость сходимости в (1.1) и (1.2).

Основная цель нашей заметки состоит в представлении следующего довольно общего результата, который позволяет найти точную скорость сходимости в (1.2) и, частично, в (1.1).

В дальнейшем, $r \geqslant 0$, $\mu_r = \mathbf{E}|\xi|^r$ и $\bar{S}_n = S_n/\sqrt{n}$.

Предложение 1. *Пусть положительная функция $g(u)$, $u \geqslant 1$, имеет неотрицательную непрерывную слева производную $g'(u)$ ограниченной вариации. Мы также предполагаем, что $g'(\infty) = 0$, $g(\infty) = \infty$*

Ключевые слова: скорость сходимости, точная асимптотика, полная сходимость моментов.

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ No. 19-01-00356.

и

$$\mathbf{E}\omega(|X|)\,|X|^3\,I[X>1]<\infty, \tag{1.3}$$
$$\mathbf{E}\tau(X)\,X^r\,I[X>1]<\infty, \tag{1.4}$$

где

$$\omega(u)=\int\limits_u^\infty \frac{g(y^2)}{y^2}\,dy, \quad \tau(u)=\int\limits_1^u u^{1-r}\,g(u^2)\,du. \tag{1.5}$$

Пусть функция $f(u)$ *строго возрастает на* $(0,\infty)$, $f(0+)=0$, $f(\infty)=\infty$.

Тогда, если $\int\limits_1^\infty f^{r-1}(t)\,e^{-f^2(t)/2}\,dt<\infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{E}\bar{S}_n^r\,I[\bar{S}_n\geqslant f(\varepsilon\,g(n))]-(2\,\varepsilon)^{-1}\,\mathbf{E}|\xi|^r\,f^{-1}(|\xi|)\right)$$
$$=2^{-1}\,\mu_r\,\gamma_g+V, \tag{1.6}$$

и, если $\int\limits_0^1 \dfrac{f^{r+1}(t)}{t}\,dt+\int\limits_1^\infty \dfrac{f^{r-1}(t)}{t}\,e^{-f^2(t)/2}\,dt<\infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{E}\bar{S}_n^r\,I[\bar{S}_n\geqslant f(\varepsilon\,e^{g(n)})]+2^{-1}\,\log\varepsilon\right)$$
$$=2^{-1}\,\mathbf{E}|\xi|^r\,\log f^{-1}(|\xi|)+2^{-1}\,\mu_r\,\gamma_g+V_{gr}, \tag{1.7}$$

где постоянные γ_g, V_{gr} *определяются равенствами*

$$\gamma_g=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^N g'(n)-g(N)\right),\ V_{gr}=\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\left(\mathbf{E}\bar{S}_n^r\,I[S_n>0]-2^{-1}\,\mu_r\right).$$

Обращаем внимание на то, что из (1.3) следует условие $\omega(1)<\infty$ и на то, что условие $\mathbf{E}X^r\,I[X>0]<\infty$ вытекает из условия (1.4) и совпадает с ним в случае $r\geqslant 3$.

Сформулируем "двустороннее" следствие предложения 1.

Теорема 1. *Пусть функция* $g(u)$, $u\geqslant 1$, *такая, как в предложении 1 и пусть* $s>0$. *Если*

$$\mathbf{E}\big(\omega(|X|)\,|X|^3+\tau(|X|)\,|X|^r\big)\,I[|X|>1]<\infty, \tag{1.8}$$

то

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{E}|\bar S_n|^r\,I[|\bar S_n|\geqslant \varepsilon\, g^s(n))] - \varepsilon^{-1/s}\,\mathbf{E}|\xi|^{r+1/s}\right)$$
$$= \mu_r\,\gamma_g + \tilde V_{gr} \tag{1.9}$$

и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\mathbf{E}|\bar S_n|^r\,I[|\bar S_n|\geqslant \varepsilon\, e^{g(n)}] + \log\varepsilon\right)$$
$$= \mathbf{E}|\xi|^r\,\log|\xi| + \mu_r\,\gamma_g + \tilde V_{gr}, \tag{1.10}$$

где

$$\tilde V_{gr} = \sum_{n\geqslant 1} g'(n)\,\big(\mathbf{E}|\bar S_n|^r - \mu_r - \mathbf{P}(S_n=0)\,I[r=0]\big). \tag{1.11}$$

Замечание 1. Пусть $g(u)\leqslant \tilde g(u)$, $u>u_0$, и пусть $0<c_1,\ c_2<1$. Если

$$\tilde g(u^2)/u^{c_1} \searrow\ u>u_0, \tag{1.12}$$

то $u\,\omega(u)\leqslant g(u^2)/(1-c_1), u>u_0$;

если $2+c_2-r>0$ и

$$\tilde g(u^2)/u^{c_2} \nearrow, u>u_0, \tag{1.13}$$

то $\tau(u)\leqslant \tilde g(u^2)\,y^{2-r}/(2+c_2-r)$.

Таким образом, если $g(y^2)$ правильно меняется на ∞ с показателем $c\in\big(\max(0,\, r-2),\, 1\big)$, то (1.3), (1.4) и (1.8) вытекают из условия $\mathbf{E}g(X^2)\,X^2<\infty$.

Учитывая замечание 1, нетрудно, например, проверить что все результаты, недавно полученные в [3], следуют из (1.9) при $r=0$.

Приведем следствия теоремы 1 ((1.9)) в контексте соотношений (1.1) и (1.2).

Обозначим суммы в (1.1) и (1.2) через $\lambda_1(\varepsilon,r)$ и $\lambda_2(\varepsilon,\delta)$ соответственно.

Следствие 1. *Пусть* $s>0$, $0<\beta<1$ *и* $g(u)=u^{\beta/2}$. *Предположим, что* $\mathbf{E}|X|^{2+\beta}<\infty\,(\beta>r-2)$, $\mathbf{E}|X|^r<\infty\,(\beta<r-2)$ $\mathbf{E}|X|^r\,\log|X|<\infty\,(\beta=r-2)$. *Тогда выполняется* (1.9).

Выбирая здесь $\beta=2-r$, *при* $r\in(1,2)$ *и* $\mathbf{E}|X|^{4-r}<\infty$, *имеем*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\lambda_1(\varepsilon,r) - \frac{2}{2-r}\,\varepsilon^{r-2}\big) = \frac{2}{2-r}\,(\mu_r\,\gamma_g + \tilde V_{gr}).$$

Следствие 2. *Пусть $s > 0$ и $\delta > 0$. Предположим, что*

$$\mathbf{E}X^2 \log^{\delta}(1+|X|) < \infty\,(r<2), \mathbf{E}|X|^r < \infty\,(r>2)$$

и $\mathbf{E}X^2 \log^{1+\delta}(1+|X|) < \infty\,(r=2)$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 2}\delta\,\frac{\log^{\delta-1} n}{n}\,\mathbf{E}|\bar{S}_n|^r\, I[|\bar{S}_n| \geqslant \varepsilon\,\log^{s\,\delta} n] - \varepsilon^{-1/s}\,\mathbf{E}|\xi|^{r+1/s}\right)$$
$$= \mu_r\,\bar{\gamma}_g + \bar{V}_{gr},$$

где $\bar{\gamma}_g = \lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{n=2}^{N} g'(n) - g(N)\right)$ *и*
$\bar{V}_{gr} = \sum\limits_{n\geqslant 2} g'(n)\,\big(\mathbf{E}|\bar{S}_n|^r - \mu_r - \mathbf{P}(S_n=0)\,I[r=0]\big)$ *в предположении* $g(u) = \log^{\delta} u$.

В частности $(r=2,\ 1/s = 2\,\delta)$, *если* $\mathbf{E}X^2 \log^{1+\delta}(1+|X|) < \infty$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\lambda_2(\varepsilon,\delta) - \frac{1}{\delta}\,\varepsilon^{-2\,\delta}\,E|\xi|^{2+2\,\delta}\big) = \frac{1}{\delta}\,\bar{\gamma}_g.$$

Следующие результаты вытекают из теоремы 1 ((1.10)).

Следствие 3. *Пусть $s > 0$ и $g(u) = s\log u$ (т.е. $e^{g(u)} = u^s$). Предположим, что* $\mathbf{E}X^2 \log(1+|X|) < \infty\,(r<2)$, $\mathbf{E}|X|^r < \infty\,(r>2)$ *и* $\mathbf{E}X^2 \log^2(1+|X|) < \infty\,(r=2)$. *Тогда выполняется* (1.10).

Отсюда $(s = 1/2)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\big(\lambda_1(\varepsilon,2) + 2\,\log\varepsilon\big) = 2\,\mathbf{E}\xi^2\,\log|\xi| - 2\,\gamma$, *где* γ *постоянная Эйлера.*

Следствие 4. *Пусть $s > 0$ и $g(u) = s\log\log u$, $u \geqslant 3$ (т.е. $e^{g(u)} = \log^s u$). Предположим, что* $\mathbf{E}X^2 \log\log(e+|X|) < \infty\,(r<2)$, $\mathbf{E}|X|^r < \infty\,(r>2)$, *и* $\mathbf{E}X^2 \log(1+|X|)\,\log\log(e+|X|) < \infty\ (r=2)$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{n\geqslant 3}\frac{s}{n\,\log n}\,\mathbf{E}|\bar{S}_n|^r\, I[|\bar{S}_n| \geqslant \varepsilon\,\log^{s} n] + \log\varepsilon\right)$$
$$= \mathbf{E}|\xi|^r\,\log|\xi| + \mu_r\,\bar{\gamma}_g + \bar{V}_{gr}.$$

Замечание 2. Пусть $\{Y_n\}$ независимые случайные величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_n^2. Предположим, что существуют положительные постоянные $C_1 - C_3$ и случайная величина X с конечной дисперсией такая, что

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \geqslant C_1\, n, \quad \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(|Y_j| \geqslant x) \leqslant C_2\, \mathbf{P}(|X| \geqslant x) \tag{1.14}$$

при всех n и $x \geqslant C_3$.

Тогда теорема 1 и следствия 1–4 остаются в силе, если $\bar{S}_n$ заменить на $(Y_1 + \cdots + Y_n)/B_n$.

Заметим, что из (1.14) следует оценка $C_1\, n \leqslant B_n^2 \leqslant C_2\, \mathbf{E}X^2\, n$.

§2. Доказательства

Ниже мы используем обозначения из п. 1.

Положим $\Phi(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$, $\Delta_n(x) = \mathbf{P}(\bar{S}_n < x) - \Phi(x)$, $V(x) = \mathbf{P}(X < x)$ и $\lambda(x) = \mathbf{E}X^2\,\bigl(1 \wedge |X|/x\bigr)$, $x > 0$. Заметим, что

$$\lambda(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \bar{D}(y)\, dy, \tag{2.1}$$

где $\bar{D}(x) = \mathbf{E}X^2\, I[|X| \geqslant x]$ (очевидно, $\lambda(x) \searrow$, $\quad x\,\lambda(x) \nearrow$).

Известно (см. [4, (1.9)]), что

$$\Delta_n = \sup_x |\Delta_n(x)| \leqslant C\,\lambda(\sqrt{n}), \tag{2.2}$$

где C абсолютная постоянная. Кроме того, имеет место следующая оценка.

Лемма 1 [4, (1.8)]. *Пусть $m > 0$, $b < m/(m+2)$, $\gamma = 1/(2+m)$. Существует положительное $A(b,m)$ такое, что для любого $x \geqslant 1$*

$$|\Delta_n(x)| \leqslant A(b,m)\,\bigl(e^{-b\,x^2/2}\,\lambda(\sqrt{n}) + \lambda^{m/2}(\sqrt{n})/x^{2+m}\bigr) + n\bar{V}(\gamma x\,\sqrt{n}). \tag{2.3}$$

Здесь $\bar{V}(\cdot) = 1 - V(\cdot)$.

Обозначим $A_n(x) = \int_x^\infty y^r\, d\Delta_n(y)$, $x > 0$, $r > 0$.

Имеем,

$$|A_n(x)| \leqslant \bigl(\Delta_n \vee \sup_{x>1} x^r |\Delta_n(x)|\bigr) + \int_1^\infty |\Delta_n(y)|\, dy^r.$$

Отсюда и в силу (2.2) и (2.3), полагая, что $\int\limits_0^\infty y^r\,dV(y)<\infty$, получим

$$|A_n(x)|\leqslant C_1\left(\lambda(\sqrt{n})+n^{1-r/2}\,\gamma^{-r}\int\limits_{\gamma\sqrt{n}}^{\infty} y^r\,dV(y)+n\int\limits_1^\infty \bar V(y\gamma\sqrt{n})\,dy^r\right). \quad (2.4)$$

Также,

$$n\int\limits_1^\infty \bar V(y\gamma\sqrt{n})\,dy^r\leqslant n^{1-r/2}\,\gamma^{-r}\int\limits_{\gamma\sqrt{n}}^{\infty} y^r\,dV(y) \quad (2.5)$$

и

$$n^{1-r/2}\int\limits_{\gamma\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} y^{(r-3)+3}\,dV(y)\leqslant(1\vee\gamma^{r-3})\,\lambda(\sqrt{n}). \quad (2.6)$$

Принимая во внимание соотношение

$$g'(n)\leqslant\int\limits_n^{n+1} g'(u)\,du+\int\limits_n^{n+1}|dg'(u)|;\quad g'(n)\leqslant\int\limits_{n-1}^{n} g'(u)\,du+\int\limits_{n-1}^{n}|dg'(u)|$$

(так, $g'(n)=g'(u)-\int\limits_n^u dg'(u)\leqslant g'(u)+\int\limits_n^{n+1}|dg'(u)|,\ n\leqslant u\leqslant n+1$), из (2.4)–(2.6) получим

$$\sum_{n\geqslant1}g'(n)\sup_{x>0}|A_n(x)|\leqslant C_2\left(1+\int\limits_1^\infty g'(u)\lambda(\sqrt{u})\,du+\int\limits_1^\infty\bar\mu_r(u)u^{2-r}\,dg(u^2)\right), \quad (2.7)$$

где $\bar\mu_r(u)=\int\limits_u^\infty y^r\,dV(y)$.

Предполагая, что интеграл сходится, положим $\hat\omega(u)=\int\limits_u^\infty\frac{dg(y^2)}{y}$.

Отметим (см. (1.5)), что $\hat\omega(u)+g(u^2)/u=\omega(u)$.

Имеем (см. (2.1))

$$\int_1^\infty g'(u)\,\lambda(\sqrt{u})\,du = \int_1^\infty \lambda(u)\,dg(u^2) = \int_{-\infty}^\infty \int_1^\infty (1 \wedge \frac{|x|}{u})\,dg(u^2)\,x^2\,dV(x)$$
$$\leqslant \int_{|u|\geqslant 1} \omega(|u|)\,|u|^3\,dV(u) \;+\hat{\omega}(1)\,\mathbf{E}|X|^3\,I[|X|\leqslant 1] - g(1)\,\bar{D}(1). \quad (2.8)$$

Теперь оценим $B = \int_1^\infty \bar{\mu}_r(u)\,u^{2-r}\,dg(u^2)$.

Если $0 \leqslant r \leqslant 2$, то (см. (2.1)) $\bar{\mu}_r(u)\,u^{2-r} \leqslant \lambda(\sqrt{u})$ и, следовательно,

$$B \leqslant \int_1^\infty \lambda(u)\,dg(u^2),\ 0 \leqslant r \leqslant 2. \quad (2.9)$$

Обозначим $\tilde{\tau}(u) = \int_1^u u^{2-r}\,dg(u^2)$, $u > 1$.

Заметим (см. (1.5)), что $\tilde{\tau}(u) = u^{2-r}\,g(u^2) - g(1) + (r-2)\,\tau(u)$.

Имеем,

$$B = \int_1^\infty \tilde{\tau}(u)\,u^r\,dV(u)$$
$$\leqslant \int_1^\infty g(u^2)\,u^2\,dV(u)(r-2)\int_1^\infty \tau(u)\,u^r\,dV(u). \quad (2.10)$$

Следовательно, если $\tau(\infty) < \infty$ и $r > 2$, то

$$B \leqslant \int_1^\infty g(u^2)\,u^2\,dV(u) + \omega(1)\,\bar{\mu}_r(1). \quad (2.11)$$

А если $\tau(\infty) = \infty$ (в силу $\tau(u) \leqslant \omega(1)$ это может иметь место только при $3 > r > 2$), то

$$B \leqslant \int_1^\infty g(u^2)\,u^2\,dV(u) + (r-2)\int_1^\infty \tau(u)\,u^r\,dV(u). \quad (2.12)$$

В этом случае, $(r-2)\,\tau(u) \geqslant g((c\,u)^2)\,(c\,u)^{2-r}\,(1 - c^{r-2})$, $0 < c < 1$ $(r > 2)$.

Из (2.7)–(2.12) следует, что условия (1.3) и (1.4) влекут

$$\sum_{n\geqslant 1} g'(n) \sup_{x>0} |A_n(x)| < \infty,$$

и, следовательно, если $f_n(\varepsilon) > 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} f_n(\varepsilon) = 0$, то

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{n\geqslant 1} g'(n)\, A_n(f_n(\varepsilon)) &= \sum_{n\geqslant 1} g'(n)\, A_n(+0)\\ &= \sum_{n\geqslant 1} g'(n) \left(\mathbf{E}\bar{S}_n^{\,r}\, I[S_n > 0] - \frac{1}{2}\,\mathbf{E}|\xi|^r\right).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Продолжим рассуждения. Пусть $f_n(\varepsilon) = f(\varepsilon\, g(n))$ или $f(\varepsilon\, e^{g(n)})$. Тогда,

$$\sum_{n\geqslant 1} g'(n)\, \mathbf{E}\bar{S}_n^r\, I[\bar{S}_n \geqslant f_n(\varepsilon))] = \sum_{n\geqslant 1} g'(n)\, A_n(f_n(\varepsilon)) + I(\varepsilon) \tag{2.14}$$

где $I(\varepsilon) = \sum\limits_{n\geqslant 1} g'(n)\, \mathbf{E}\xi^r\, I[\xi \geqslant f_n(\varepsilon)]$.

Для вычисления $I(\varepsilon)$ воспользуемся [5, предложение 1], положив там

$$F_n(x) = F(x) = \frac{2}{\mu_r} \int_0^x y^r\, d\,\Phi(y) \vee 0.$$

Тогда требуемый результат (т.е. предложение 1) следует из [5, Предложение 1] и (2.14), (2.13).

Для проверки замечания 2 нужно вместо леммы 1 использовать ее более общий вариант в [4, (1.8)] и оценки вида (см. (2.1))

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}Y_j^2, I[|Y_j| \geqslant y\, B_n] \leqslant \frac{C_2}{C_1}\, \bar{D}(y\, B_n),\ \ y\, B_n \geqslant C_3.$$

Список литературы

1. W. D. Liu, Z. Y. Lin, *Precise asymptotics for a new kind of complete moment convergence.* — Stat. Probab. Lett. **76** No. 16 (2006), 1787–1799.
2. L. T. Kong, H. S. Dai, *Convergence rates in precise asymptotics for a kind of complete moment convergence.* — Stoch. Dynamics **17**, No. 2 (2017), 1750015.
3. Y. Zhang, *A note on the convergence rates in precise asymptotics.* — J. Ineq. Appl. **15** (2019).

4. Л. В. Розовский, *Суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями – умеренные уклонения и неравномерные оценки в ЦПТ.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311** (2004), 242–259.
5. L. V. Rozovsky, *One more on the convergence rates in precise asymptotics.* Statist. Prob. Lett., **171**, 2021, 109023.

Rozovsky L. V. On a complete moment convergence in precise asymptotics.

Liu and Lin (Statist. Probab. Lett. 2006) introduced a kind of complete moment convergence which includes the traditional one as a special case. We continue these investigations to make them somewhat more general and sharp.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования С.-П. гос.
химико-фармацевтический университет
Министерства здравоохранения Российской
Федерации (ФГБОУ ВО СПХФУ Минздрава России)
ул. Проф. Попова, д. 14, Санкт-Петербург
197376, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 3 октября 2022 г.