Л. А. Люстерник, Задача 2,
УМН, 1947, том 2, выпуск 2, 199

https://www.mathnet.ru/rm6942

ЗАДАЧИ И ЗАМЕТКИ

ЗАДАЧА 1

И. П. Натансон

Пусть на сегменте $[0, 1]$ дана суммируемая функция $f(t)$. Легко показать, что если она удовлетворяет соотношению

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h f(t)\,dt = 0,$$

то справедливо и соотношение

$$\lim_{h\to 0} h\int_0^h \frac{f(t)}{h^2+t^2}\,dt = 0.$$

Требуется установить обратную теорему или опровергнуть её. Положительный ответ был бы весьма интересен для теории тригонометрических рядов.

ЗАДАЧА 2

Л. А. Люстерник

Пусть $\alpha(x)$ — непрерывная функция, определённая на сегменте $[0, 1]$ и равная нулю на его концах. Доопределим её на всю числовую прямую как нечётную периодическую функцию с периодом 2: именно,

$$\alpha(-x) = -\alpha(x);\ \alpha(x+2) = \alpha(x).$$

Образуем последовательность функций

$$\alpha(x),\ \alpha(2x),\ \ldots,\ \alpha(nx),\ \ldots \tag{1}$$

Исследовать условия, при которых последовательность (1) образует на сегменте $[0, 1]$ полную систему функций [т. е. при которой всякая непрерывная на этом сегменте функция, обращающаяся в нуль на концах, является пределом равномерно сходящейся последовательности линейных комбинаций функций нашей системы (1)]. Случаи $\alpha(x) = \sin x$ и $\alpha(x) = \sin 2x$ дают примеры функций, порождающих соответственно полную и неполную последовательность (1).

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ Л. ЛЮСТЕРНИКА

И. М. Каменецкий

В «Успехах математических наук», т. I, вып. 3—4 (13—14), стр. 104—105 сформулированы Л. Люстерником две задачи. Мы дадим здесь решение первой из них. Приводим эту задачу: «Существуют ли сверх впи-