



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

K. A. Navasardyan, On the representation of functions by absolutely convergent series by \mathcal{H} -system, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2018, Volume 18, Issue 1, 49–61

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

February 6, 2025, 16:45:04





УДК 517.51

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ ПО \mathcal{H} -СИСТЕМАМ

К. А. Навасардян

Навасардян Карен Аршалуйсович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и математического моделирования, Ереванский государственный университет, 0025, Республика Армения, Ереван, Алек Манукяна, 1, knavasard@ysu.am

Рассматриваются вопросы представления абсолютно сходящимися рядами функций в пространствах однородного типа. Во введении приводится определение системы типа Хаара (\mathcal{H} -системы), связанной с некоторой диадической системой в пространстве однородного типа X . Доказывается, что для любой, почти всюду (п. в.) конечной, измеримой на X функции f существует абсолютно сходящийся ряд по системе \mathcal{H} , который сходится к f п. в. на X . Из этой теоремы, в частности, следует, что если $\mathcal{H} = \{h_n\}$ — обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью p_k , то для любой п. в. конечной на $[0, 1]$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд по системе $\{h_n\}$, который п. в. сходится к $f(x)$. Доказывается, что если X — ограниченное множество, то любую п. в. конечную, измеримую функцию можно изменить на множестве сколь угодно малой меры так, чтобы ряд Фурье полученной функции по системе \mathcal{H} сходилась равномерно. Результаты статьи получены методами метрической теории функций.

Ключевые слова: системы типа Хаара, диадическая система, абсолютная сходимость, равномерная сходимость.

DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются системы типа Хаара, построенные на диадических системах пространств однородного типа.

Напомним некоторые определения.

Пусть X — некоторое множество. Неотрицательная симметричная функция $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазиметрикой, если $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ и существует постоянная K такая, что

$$\rho(x, y) \leq K (\rho(x, z) + \rho(z, y)) \quad \text{для всех } x, y, z \in X.$$

Обозначим через $B(x, r) := \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ шар с центром x и радиусом r . Известно, что если ρ — квазиметрика с коэффициентом $K > 1$, то шар $B(x, r)$ может быть неоткрытым множеством. В работе [1] доказано, что для любой квазиметрики ρ существует такая квазиметрика ρ' , которая эквивалентна ρ , и все шары относительно ρ' являются открытыми множествами. В этой работе мы будем предполагать, что все шары — открытые множества.

Напомним, что пространство (X, ρ, μ) , где ρ — квазиметрика, а μ — некоторая бореловая σ -конечная мера, определенная на некоторой σ -алгебре подмножеств множества X , называется пространством однородного типа, если существует постоянная A такая, что

$$\mu(B(x, 2r)) \leq A\mu(B(x, r)) < +\infty \quad \text{для всех } x \in X \text{ и } r > 0. \quad (1)$$

В этой работе мы будем предполагать, что мера μ регулярная.



Определение 1. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа. Семейство $\mathcal{D} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$ называется *диадическим семейством с параметром* $\delta \in (0, 1)$ в пространстве X , если каждое \mathcal{D}^j является семейством борелевых множеств $Q \subset X$, удовлетворяющим условиям:

- d1) для каждого $j \in \mathbb{Z}$ множества в \mathcal{D}^j попарно не пересекаются и $X = \bigcup_{Q \in \mathcal{D}^j} Q$;
- d2) если $Q \in \mathcal{D}^j$ и $i < j$, то существует множество $\tilde{Q} \in \mathcal{D}^i$ такое, что $Q \subset \tilde{Q}$;
- d3) существует натуральное число N такое, что $1 \leq \text{card}\{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subset Q\} \leq N$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $Q \in \mathcal{D}^j$.
- d4) существуют постоянные a_1 и a_2 такие, что для каждого $Q \in \mathcal{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, существуют шары $B(x_1, r_1)$ и $B(x_2, r_2)$ такие, что

$$B(x_1, r_1) \subset Q \subset B(x_2, r_2), \quad r_1 \geq a_1 \delta^j, \quad r_2 \leq a_2 \delta^j.$$

Первые нетривиальные конструкции диадических семейств были рассмотрены в [2].

В работах [3–5] дано определение системы типа Хаара, соответствующей диадической системе \mathcal{D} и исследованы некоторые свойства этой системы.

Пусть \mathcal{D} — некоторое диадическое семейство с параметром δ в пространстве однородного типа X . Следуя обозначениям работы [5], для $Q \in \mathcal{D}^j$, $j \in \mathbb{Z}$, обозначим

$$\mathcal{L}(Q) := \{Q' \in \mathcal{D}^{j+1} : Q' \subset Q\}.$$

Положим

$$\tilde{\mathcal{D}}^j := \{Q \in \mathcal{D}^j : \text{card}(\mathcal{L}(Q)) > 1\}, \quad \tilde{\mathcal{D}} := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathcal{D}}^j.$$

Мы будем предполагать, что в \mathcal{D} не существуют одноточечные множества с положительной мерой. Это означает (см. также d4)), что для каждого $Q \in \mathcal{D}$ существует $n(Q) \in \mathbb{N}$ такое, что $Q \in \tilde{\mathcal{D}}^{n(Q)}$, т. е.

$$\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}. \tag{2}$$

Определение 2. Система простых, измеримых функций $\mathcal{H} = \{h\}$, определенных на X , называется *системой типа Хаара (\mathcal{H} -системой)*, связанной с системой \mathcal{D} , если

- (h1) для каждого $h \in \mathcal{H}$ существуют единственное $j = j(h) \in \mathbb{Z}$ и множество $Q = Q(h) \in \tilde{\mathcal{D}}^j$ такие, что $\{x \in X : h(x) \neq 0\} \subset Q$, и это свойство не выполняется для множеств из \mathcal{D}^{j+1} . Более того, каждая функция h постоянна на каждом множестве $Q' \in \mathcal{L}(Q(h))$;
- (h2) для каждого $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ существуют $M_Q := \text{card}(\mathcal{L}(Q)) - 1 \geq 1$ функций $h \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих 1). Множество этих функций обозначим $\mathcal{H}(Q)$;
- (h3) $\int_X h d\mu = 0$ для каждого $h \in \mathcal{H}$;



(h4) если для каждого $Q \in \tilde{\mathcal{D}}$ обозначим через V_Q линейное пространство тех функций, определенных на Q , которые постоянны на каждом $Q' \in \mathcal{L}(Q)$, то система $\left\{ \frac{\chi_Q}{\sqrt{\mu(Q)}} \right\} \cup \mathcal{H}(Q)$ является ортонормированным базисом в V_Q , (χ_Q — характеристическая функция множества Q).

Заметим, что система типа Хаара, связанная с данной системой \mathcal{D} , может быть не единственной.

Н. К. Бари было установлено, что любая почти всюду (п. в.) конечная на $[0, 1]$, измеримая функция представима рядом по системе Хаара, сходящимся к этой функции п. в. [6, с. 527]. Затем Ф. Г. Арутюняном [7] была усилена эта теорема и доказано, что для любой п. в. конечной на $[0, 1]$, измеримой функции f существует абсолютно сходящийся п. в. на $[0, 1]$ ряд по системе Хаара такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } [0, 1].$$

В работах [8–10] распространен этот результат Арутюняна на другие системы, содержащие в себе систему Хаара.

В настоящей работе доказана следующая

Теорема 1. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ в пространстве X , удовлетворяющее условию (2), а $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой \mathcal{D} . Тогда для любой п. в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum_{h \in \mathcal{H}} a_h h$ по системе \mathcal{H} , который п. в. абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } X.$$

Для каждого целого числа k_0 обозначим (см. (h1))

$$\mathcal{H}_{k_0} := \{h \in \mathcal{H} : j(h) \geq k_0\}.$$

Нетрудно заметить, что теорема 1 следует из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ в X , удовлетворяющее условию (2), а $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой \mathcal{D} . Тогда для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ и любой п. в. конечной на X измеримой функции f существует ряд $\sum_{h \in \mathcal{H}_{k_0}} a_h h$ по системе \mathcal{H}_{k_0} , который п. в. абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_{k_0}} a_h h(x) = f(x) \quad \text{п. в. на } X.$$

Пусть $\{p_k\}$ — некоторая ограниченная последовательность натуральных чисел с условием $p_k \geq 2$. Допустим $m_0 = 1$ и $m_k = p_k m_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть j_k —



натуральное число, удовлетворяющее условию $2^{j_k-1} < m_k \leq 2^{j_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Положим $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}^1 = \dots = \mathcal{D}^{j_1-1} = [0, 1]$ и

$$\mathcal{D}^{j_k} = \mathcal{D}^{j_k+1} = \dots = \mathcal{D}^{j_{k+1}-1} = \left\{ \left[\frac{i-1}{m_k}, \frac{i}{m_k} \right) : i = 1, 2, \dots, m_k \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что если $j_k \leq j < j_{k+1}$ и $Q \in \mathcal{D}^j$, то $2^{-j} \leq \mu Q \leq \frac{\max\{p_k\}}{m_{k+1}} \leq \frac{\max\{p_k\}}{2^{j_{k+1}-1}} \leq \frac{\max\{p_k\}}{2^{-j}}$, откуда следует, что $\mathcal{D} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{D}^j$ является диадической системой на $[0, 1]$ с параметром $\delta = 2^{-1}$, а обобщенная система Хаара $\mathcal{H} = \{h_n(x)\}$, порожденная последовательностью $\{p_k\}$, является \mathcal{H} -системой, связанной с \mathcal{D} , (определение обобщенной системы Хаара см. например в [11]). Из теоремы 2 и из вышесказанного, в частности, следует следующая

Теорема 3. Пусть $\mathcal{H} = \{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ — обобщенная система Хаара, порожденная ограниченной последовательностью $\{p_k\}$. Тогда для любой п. в. конечной на $[0, 1]$ измеримой функции f существует абсолютно сходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$ такой, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x) = f(x) \quad \text{п. в. на} \quad [0, 1].$$

В работе [7] для классической системы Хаара доказана следующая

Теорема. Для любой п. в. конечной измеримой на $[0, 1]$ функции f и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что

- 1) $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,
- 2) ряд Фурье – Хаара функции g п. в. абсолютно сходится.

Для \mathcal{H} -систем справедлива следующая

Теорема 4. Пусть (X, ρ, μ) — некоторое пространство однородного типа, X — ограниченное множество, \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ в X , удовлетворяющее условию (2), а $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с системой \mathcal{D} . Тогда для любой п. в. конечной на X измеримой функции f и любого $\varepsilon > 0$ существует функция g такая, что

- 1) $\mu\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$,
- 2) ряд Фурье функции g по системе \mathcal{H} абсолютно равномерно сходится.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть \mathcal{D} — некоторая диадическая система с параметром $\delta \in (0, 1)$ в пространстве однородного типа X , удовлетворяющая условию (2). Была доказана следующая лемма [5, лемма 3.2]

Лемма 1. Пусть $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с \mathcal{D} . Существует постоянная C такая, что для каждой функции $h \in \mathcal{H}$

$$|h(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu(Q(h))}} \quad \text{для всех} \quad x \in Q(h).$$



Справедлива следующая

Лемма 2. Пусть $\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторая система типа Хаара, связанная с \mathcal{D} . Тогда для любого числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и для каждого $Q \in \mathcal{D}$ существуют множество

$Q' \subset Q$ и полином $P_Q = \sum_{i=1}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} b_h h$ по системе \mathcal{H} такие, что

- 1) $Q' \in \mathcal{D}$ и $\mu(Q') < \varepsilon \mu(Q)$;
- 2) $P_Q(x) = 1$, если $x \in Q \setminus Q'$;
- 3) $\tilde{P}_Q(x) := \sum_{i=1}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} |b_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon}$ для всех $x \in Q$;
- 4) $\tilde{P}_Q(x) = 0$, если $x \notin Q$.

Доказательство. Для каждого $Q \in \mathcal{D}$ обозначим через Q^* то множество из $\mathcal{L}(Q)$, для которого

$$\mu(Q^*) = \min\{\mu(Q') : Q' \in \mathcal{L}(Q)\}$$

(если существует несколько таких множеств, то будем брать одно из них). Из (1) и d4) нетрудно установить, что существует постоянная C_1 , удовлетворяющая неравенству

$$\mu(Q^*) \leq \mu(Q) \leq C_1 \mu(Q^*). \quad (3)$$

Обозначим через

$$F_Q(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q \setminus Q^*, \\ \frac{\mu(Q \setminus Q^*)}{\mu(Q^*)}, & \text{если } x \in Q^*, \\ 0, & \text{если } x \notin Q. \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что

$$\int_X F_Q d\mu = \int_Q F_Q d\mu = 0, \quad (5)$$

поэтому из (h4) следует, что функцию F_Q можно представить в следующей форме:

$$F_Q(x) = \sum_{h \in \mathcal{H}(Q)} d_{Q,h} h(x).$$

Из леммы 1 и (4) следует, что для каждого $h \in \mathcal{H}(Q)$

$$|d_{Q,h}| = \left| \int_Q F_Q h d\mu \right| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu(Q)}} \int_Q |F_Q| d\mu \leq \frac{2C}{\sqrt{\mu(Q)}} \mu(Q) \leq 2C \sqrt{\mu(Q)}.$$

Поэтому, учитывая также d3), получим:

$$\tilde{F}_Q(x) := \sum_{h \in \mathcal{H}(Q)} |d_{Q,h} h(x)| \leq 2NC^2 \quad \text{для всех } x \in Q.$$

Таким образом, существует постоянная C_3 такая, что

$$\tilde{F}_Q(x) \leq C_3 \leq C_3 |F_Q(x)| \quad \text{для всех } x \in Q. \quad (6)$$



Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ и $Q \in \mathcal{D}$. Определим множества $\{Q_m\} \subset \mathcal{D}$ следующим образом:

$$Q_0 = Q, \quad Q_m := Q_{m-1}^*, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7)$$

(т. е. m -й потомок Q с наименьшей мерой), и обозначим

$$k := \min\{m : \mu(Q_{m+1}) < \varepsilon\mu(Q)\}. \quad (8)$$

Из (4) и (7) следует, что можно поочередно выбрать положительные числа l_0, l_1, \dots, l_k так, чтобы $l_0 = 1$ и для каждого $m \leq k$

$$\sum_{i=0}^m l_i F_{Q_i}(x) = 1, \quad \text{если } x \in Q \setminus Q_m^*. \quad (9)$$

Очевидно, что полином

$$P_Q(x) := \sum_{i=0}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} b_h h(x) \equiv \sum_{i=0}^k l_i F_{Q_i}(x) = \sum_{i=0}^k l_i \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} d_{Q_i, h} h(x)$$

и множество $Q' := Q_{k+1}$ удовлетворяют пунктам 1), 2) и 4) леммы 2.

Пусть x_0 — некоторый элемент из Q , тогда либо $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ для некоторого $m \in \{0, 1, \dots, k\}$, либо $x_0 \in Q_{k+1}$. Если $x_0 \in Q_0 \setminus Q_1$, то для всех функций $h \in \mathcal{H}(Q_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеем $h(x_0) = 0$. Поэтому из (6) получим: $\tilde{F}_Q(x_0) = \tilde{F}_{Q_0}(x_0) \leq C_3 \leq \frac{C_3}{\varepsilon}$. Если же $x_0 \in Q_m \setminus Q_{m+1}$ и $1 \leq m \leq k$, то из (4) и (9) следует, что $l_i F_{Q_i}(x_0) < 0$ для всех $i \in 0, 1, \dots, m-1$, так как $l_i > 0$, а $F_{Q_i}(x_0) < 0$ поэтому, учитывая (5), получим:

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_m) + \int_{Q_m} \sum_{i=0}^{m-1} l_i F_{Q_i} d\mu \leq \mu(Q) - \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_m).$$

Откуда с учетом (8) получим

$$\sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно (см. также (9)),

$$\sum_{i=0}^k |l_i F_{Q_i}(x_0)| = \sum_{i=0}^m |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| + 1 + \sum_{i=0}^{m-1} |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \frac{3}{\varepsilon}.$$

Пусть теперь $x_0 \in Q_{k+1}$, тогда из (4) и (5) получим

$$0 = \int_Q \sum_{i=0}^k l_i F_{Q_i} d\mu = \mu(Q \setminus Q_{k+1}) + \int_{Q_{k+1}} \sum_{i=0}^k l_i F_{Q_i} d\mu \leq \mu(Q) - \sum_{i=0}^k |l_i F_{Q_i}(x_0)| \mu(Q_{k+1}).$$

Учитывая (3) и (8), получим:

$$\sum_{i=0}^k |l_i F_{Q_i}(x_0)| \leq \frac{\mu(Q)}{\mu(Q_{k+1})} \leq \frac{C_1 \mu(Q)}{\mu(Q_k)} \leq \frac{C_1}{\varepsilon}.$$



Из последних неравенств и (6) следует, что для всех $x \in Q$

$$\tilde{P}_Q(x) = \sum_{i=0}^k \sum_{h \in \mathcal{H}(Q_i)} |l_i d_{Q_i, h} h(x)| \leq C_3 \sum_{i=0}^k |l_i| F_{Q_i}(x) \leq \frac{C_4}{\varepsilon}.$$

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. Пусть $Q \in \mathcal{D}$ и f — некоторая измеримая п. в. конечная функция на Q . Тогда для любых $N \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ существуют множество $R \subset Q$ и полином $P(x) = \sum_{h \in \Omega} d_h h(x)$ по \mathcal{H} -системе, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) $j(h) > N$ для всех $h \in \Omega$, (см. (h1));
- 2) $\mu(R) > (1 - \varepsilon)\mu(Q)$;
- 3) $|P(x) - f(x)| < \delta$ для всех $x \in R$;
- 4) $\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leq \frac{C|f(x)|}{\varepsilon}$, если $x \in R$;
- 5) $\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| = 0$, если $x \notin Q$.

Доказательство. Из формулировки леммы следует, что, не нарушая общности, можно считать f неотрицательной. Допустим число M выбрано так, чтобы

$$\mu\{x \in Q : f(x) > M\} < \frac{\varepsilon}{10}\mu(Q). \quad (10)$$

Выберем числа $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$, удовлетворяющие условиям

$$0 = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = M, \quad \beta_i - \beta_{i-1} < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

и обозначим

$$m := \min_{1 \leq i \leq n} \mu(E_i) \quad \text{где } E_i := \{x \in Q : \beta_{i-1} \leq f(x) < \beta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Без ограничения общности можем считать, что $m > 0$ (в противном случае, будем рассматривать только те множества E_i , для которых $\mu(E_i) > 0$). Поскольку множества E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) измеримы, а мера μ регулярная, то для каждого i существует открытое множество G_i такое, что

$$E_i \subset G_i \quad \text{и} \quad \mu(G_i \setminus E_i) < \frac{\varepsilon}{10n}m. \quad (13)$$

Можно установить (см. например [3, лемма 2.3]), что для каждого i ($i = 1, 2, \dots, n$) существуют попарно непересекающиеся множества $\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i}$ такие, что

$$\{Q_\alpha\}_{\alpha \in I_i} \subset \bigcup_{j > N} \mathcal{D}^j, \quad \bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha \subset G_i \quad \text{и} \quad \mu\left(G_i \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in I_i} Q_\alpha\right)\right) = 0. \quad (14)$$

Так как множества Q_α , $\alpha \in I_i$, попарно не пересекаются, а $\mu G_i < \infty$ (см. (12) и (13)), то из (14) следует, что существует конечное подмножество \tilde{I}_i множества индексов I_i такое, что

$$\mu\left(\bigcup_{\alpha \in \tilde{I}_i} Q_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in \tilde{I}_i} \mu Q_\alpha > \mu G_i - \frac{\varepsilon}{10}\mu E_i. \quad (15)$$



Пусть $\alpha \in \tilde{I}_i$. Очевидно, что если $Q_\alpha \cap Q = \emptyset$, то $Q_\alpha \subset \bigcup_{k=1}^n (G_k \setminus E_k)$. Ясно также, что если $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j$, то $Q_\alpha \subset G_i \cap G_j \subset \bigcup_{k=1}^n (G_k \setminus E_k)$, так как множества $E_i, i = 1, 2, \dots, n$, попарно не пересекаются. Заметим, что из определения диадической системы следует: если $Q', Q'' \in \mathcal{D}$, то либо $Q' = Q''$, либо одно из них является подмножеством другого. Поэтому, если из \tilde{I}_i исключим те α , для которых $Q_\alpha \cap Q = \emptyset$ или $Q_\alpha \subset Q_\beta$ для некоторого $\beta \in \tilde{I}_j, j \neq i$, и обозначим оставшееся подмножество индексов \tilde{I}_i через I'_i , то с учетом (12)–(15) получим, что $Q_\alpha \subset Q$ для всех $\alpha \in I'_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$$Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset \quad \text{для всех } \alpha, \beta \in \bigcup_{i=1}^n I'_i, \quad \alpha \neq \beta, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mu\left(E_i \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha\right)\right) &\geq \mu(E_i) - \mu\left(\bigcup_{\alpha \in I_i \setminus I'_i} Q_\alpha\right) > \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10} \mu(E_i) - \sum_{k=1}^n \mu(G_k \setminus E_k) > \\ &> \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10} \mu(E_i) - \frac{\varepsilon}{10} \mu(E_i) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \mu(E_i). \end{aligned} \quad (17)$$

Для каждого $\alpha \in \bigcup_{i=1}^n I'_i$, применяя лемму 2 для множества Q_α и числа $\frac{\varepsilon}{2}$, получим множество $Q'_\alpha \subset Q_\alpha$ и полином $P_{Q_\alpha} = \sum_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h$, удовлетворяющие условиям

$$Q'_\alpha \in \mathcal{D} \quad \text{и} \quad \mu(Q'_\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \mu(Q_\alpha), \quad (18)$$

$$P_{Q_\alpha}(x) = 1 \quad \text{для всех } x \in Q_\alpha \setminus Q'_\alpha, \quad (19)$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = \sum_{h \in \Gamma_\alpha} |b_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad \text{для всех } x \in Q_\alpha, \quad (20)$$

$$\tilde{P}_{Q_\alpha}(x) = 0, \quad \text{если } x \notin Q_\alpha. \quad (21)$$

Рассмотрим множество

$$R := \bigcup_{i=1}^n \left(E_i \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I'_i} Q_\alpha \setminus Q'_\alpha\right)\right). \quad (22)$$

Из (10), (17) и (18) следует, что

$$\mu(R) \geq \sum_{i=1}^n \left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \mu(E_i) - \sum_{\alpha \in I'_i} \frac{\varepsilon}{2} \mu(Q_\alpha) \right) \geq (1 - \varepsilon) \mu(Q).$$

Положим

$$P(x) := \sum_{h \in \Omega} d_h h(x) \equiv \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I'_i} P_{Q_\alpha}(x) = \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} \sum_{\alpha \in I'_i} \sum_{h \in \Gamma_\alpha} b_h h(x). \quad (23)$$

Из (11), (12), (16), (19)–(22) следует, что полином $P(x)$ удовлетворяет всем пунктам леммы 3. Лемма 3 доказана. \square

Замечание 1. Если в формулировке леммы 3 функция f удовлетворяет условию $|f(x)| \leq M$ для всех $x \in Q$, то пункт 4. леммы 3 можно заменить условием

$$\sum_{h \in \Omega} |d_h h(x)| \leq \frac{CM}{\varepsilon} \quad \text{для всех } x \in Q,$$

которое следует из (20), (21) и (23).



2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 2. Пусть f — некоторая п. в. конечная, измеримая функция, а $k_0 \in \mathbb{Z}$. Для каждого $Q \in \mathcal{D}^{k_0}$ обозначим

$$f_Q(x) := f(x)\chi_Q(x).$$

Поскольку множества Q в \mathcal{D}^{k_0} попарно не пересекаются, то достаточно доказать, что для каждой функции f_Q существует ряд $\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h$, где Γ_Q — множество тех функций из \mathcal{H} , для которых $\{x : h(x) \neq 0\} \subset Q$, который абсолютно сходится и

$$\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h(x) = f_Q(x) \quad \text{п. в. на } X.$$

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty. \quad (24)$$

Положим $d_h = 0$ для всех $h \in \mathcal{H}(Q) =: \Omega_0$, (см. (h2)), и $P_0 := \sum_{h \in \Omega_0} d_h h \equiv 0$.

Допустим уже определены полиномы $P_k = \sum_{h \in \Omega_k} d_h h$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, и числа

$N_k := \max\{j(h) : h \in \Omega_k\}$. Применяя лемму 3 к функции $f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x)$ и числам $N = N_{m-1}$, $\delta = \varepsilon_{m+1}^2$ и $\varepsilon = \varepsilon_m$, получим множество $R_m \subset Q$ и полином $P_m(x) = \sum_{h \in \Omega_m} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\min\{j(h) : h \in \Omega_m\} > N_{m-1}, \quad (25)$$

$$\mu(R_m) > (1 - \varepsilon_m)\mu(Q), \quad (26)$$

$$\left| f_Q(x) - \sum_{k=0}^m P_k(x) \right| < \varepsilon_{m+1}^2 \quad \text{для всех } x \in R_m, \quad (27)$$

$$\sum_{h \in \Omega_m} |d_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon_m} \left| f_Q(x) - \sum_{k=0}^{m-1} P_k(x) \right|, \quad \text{если } x \in R_m, \quad (28)$$

$$\sum_{h \in \Omega_m} |d_h h(x)| = 0, \quad \text{если } x \notin Q. \quad (29)$$

Таким образом, по индукции определяются полиномы P_m и множества R_m ($m = 1, 2, \dots$), удовлетворяющие условиям (25)–(29). Рассмотрим ряд

$$\sum_{h \in \Gamma_Q} a_h h(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} P_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{h \in \Omega_m} d_h h(x) \quad (30)$$

и множество $R := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} R_m$. Из (24) и (26) следует, что $\mu(R) = \mu(Q)$.



Учитывая (27) и (28), для всех $x \in R_m \cap R_{m-1}$ получим:

$$\sum_{h \in \Omega_m} |d_h h(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon_m} \varepsilon_m^2 = C\varepsilon_m,$$

которое вместе с (24) и (29) обеспечивают абсолютную сходимость ряда (30) п. в. на X . Из (24), (27) и (29) получим, что сумма ряда (30) на множестве R является $f_Q(x)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть X — ограниченное множество, а \mathcal{D} — диадическое семейство с параметром δ , удовлетворяющее условию (2). Из d4) следует, что для любого числа $R > 0$ существует $j \in \mathbb{Z}$ такое, что каждый элемент системы \mathcal{D}^j содержит шар с радиусом R . Следовательно, существует $Q_0 \in \mathcal{D}$ такое, что $X = Q_0$. Допустим, что $\varepsilon \in (0, 1)$ и на множестве X задана п. в. конечная измеримая функция $f(x)$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varepsilon_k := \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad \delta_k := \varepsilon_{k+1}^2. \tag{31}$$

В силу леммы 3 существуют множество $R_1 \subset X = Q_0$ и полином $P_1(x) = \sum_{h \in \Omega_1} d_h h(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \mu(R_1) &> (1 - \varepsilon_1)\mu(X), \\ |f(x) - P_1(x)| &< \delta_1 \quad \text{для всех } x \in R_1. \end{aligned}$$

Допустим уже построены множества R_1, R_2, \dots, R_{k-1} и полиномы P_1, P_2, \dots, P_{k-1} такие, что

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x) \right| < \delta_{k-1} \quad \text{для всех } x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i.$$

Обозначим через g_k следующую функцию:

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i(x), & \text{если } x \in \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i, \\ 0, & \text{если } x \in X \setminus \bigcap_{i=1}^{k-1} R_i. \end{cases}$$

Ясно, что

$$|g_k(x)| < \delta_{k-1} \quad \text{для всех } x \in X. \tag{32}$$

Для функции $g_k(x)$, применяя лемму 3 и учитывая (32) и замечание 1, получим, что существуют множество R_k и полином $P_k(x) = \sum_{h \in \Omega_k} d_h h(x)$ такие, что

$$\begin{aligned} \min\{j(h) : h \in \Omega_k\} &> \max\{j(h) : h \in \Omega_{k-1}\}, \\ \mu(R_k) &> (1 - \varepsilon_k)\mu(X), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^k P_i(x) \right| = |g_k(x) - P_k(x)| < \delta_k \quad \text{для всех } x \in \bigcap_{i=1}^k R_i, \tag{34}$$

$$\sum_{h \in \Omega_k} |d_h h(x)| \leq \frac{C\delta_{k-1}}{\varepsilon_k} = C\varepsilon_k \quad \text{для всех } x \in X. \tag{35}$$



Так по индукции определяются множества R_k и полиномы P_k , удовлетворяющие условиям (33) и (34) для всех $k \in \mathbb{N}$ и условию (35) для всех натуральных $k \geq 2$.

Для каждого $h \in \mathcal{H}$ положим $a_h := d_h$, если $h \in \Omega_k$, $k \in \mathbb{N}$, и $a_h := 0$ в противном случае. Рассмотрим ряд

$$\sum_{h \in \mathcal{H}} a_h h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h \in \Omega_k} d_h h(x) \quad (36)$$

и множество $R := \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$. Из (31) и (35) следует, что ряд (36) на множестве X равномерно и абсолютно сходится к некоторой функции g , а из (31) и (33) следует, что $\mu(R) > (1 - \varepsilon)\mu(X)$. Ясно также (см. (34)), что для всех $x \in R$ имеем $f(x) = g(x)$.

Теорема 4 доказана.

Библиографический список

1. Macias R., Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type // Adv. in Math. 1979. Vol. 33. P. 271–309.
2. Christ A. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral // Colloquium Math. 1990. Vol. 60/61, iss. 2. P. 601–628.
3. Aimar H., Bernardis A., Iaffel B. Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type // J. Approx. Theory. 2007. Vol. 148, iss. 1. P. 12–34. DOI:10.1016/j.jat.2007.02.002.
4. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems // J. of Geometric Analysis. 2011. Vol. 21, iss. 2. P. 288–304. DOI: 10.1007/s12220-010-9148-x.
5. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math. 2011. Vol. 141, iss. 1. P. 1–22. DOI: 10.1017/S0308210509001796.
6. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М. ; Л. : Гостехиздат, 1951. 550 с.
7. Арутюнян Ф. Г. О рядах по системе Хаара // Докл. АН АрмССР. 1966. Т. 42, № 3. С. 134–140.
8. Давтян Р. С. О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 673–680. DOI: 10.1007/BF01142560.
9. Gevorkjan G. G. On the Representation of Measurable Functions by Martingales // Analysis Math. 1982. Vol. 8, № 4. P. 239–256. DOI: 10.1007/BF02201774.
10. Gevorkian G. G. Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function // East J. Approx. 1996. Vol. 2, № 4. P. 439–458.
11. Голубов Б. И. Об одном классе полных ортогональных систем // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9, № 2. С. 297–314.

Образец для цитирования:

Навасардян К. А. О представлении функций абсолютно сходящимися рядами по \mathcal{H} -системам // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2018. Т. 18, вып. 1. С. 49–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61.



On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by \mathcal{H} -system

K. A. Navasardyan

Karen A. Navasardyan, <https://orcid.org/0000-0002-8396-6462>, Yerevan State University, 1, Alex Manoogian Str., Yerevan, Republic of Armenia, 0025, knavasard@ysu.am

The paper deals with the representation of absolutely convergent series of functions in spaces of homogeneous type. The definition of a system of Haar type (\mathcal{H} -system) associated to a dyadic family on a space of homogeneous type X is given in the Introduction. It is proved that for almost everywhere (a.e.) finite and measurable on a set X function f there exists an absolutely convergent series by the system \mathcal{H} , which converges to f a.e. on X . From this theorem, in particular, it follows that if $\mathcal{H} = \{h_n\}$ is a generalized Haar system generated by a bounded sequence $\{p_k\}$, then for any a.e. finite on $[0, 1]$ and measurable function f there exists an absolutely convergent series in the system $\{h_n\}$, which converges a.e. to $f(x)$. It is also proved, that if X is a bounded set, then one can change the values of an a.e. finite and measurable function on a set of arbitrary small measure such that the Fourier series of the obtained function with respect to system \mathcal{H} will converge uniformly. The paper results are obtained using the methods of metrical functions theory.

Key words: Haar type system, dyadic family, absolute convergence, uniform convergence.

References

1. Macias R., Segovia C. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Adv. in Math.*, 1979, vol. 33, pp. 271–309.
2. Christ A. A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloquium Math.*, 1990, vol. 60/61, iss. 2, pp. 601–628.
3. Aimar H., Bernardis A., Jaffel B. Multiresolution Approximations and Unconditional Bases on Weighted Lebesgue Spaces on Spaces of Homogeneous Type. *J. Approx. Theory*, 2007, vol. 148, iss. 1, pp. 12–34. DOI:10.1016/j.jat.2007.02.002.
4. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Equivalence of Haar Bases Associated to Different Dyadic Systems. *J. of Geometric Analysis*, 2011, vol. 21, iss. 2, pp. 288–304. DOI: 10.1007/s12220-010-9148-x.
5. Aimar H., Bernardis A., Nowak L. Dyadic Fefferman–Stein Inequalities and the Equivalence of Haar Bases on Weighted Lebesgue Spaces. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Math.*, 2011, vol. 141, iss. 1, pp. 1–22. DOI: 10.1017/S0308210509001796.
6. Luzin N. N. *Integral i trigonometricheskij rjad* [Integral and trigonometric series]. Moscow, Leningrad, Gostehizdat, 1951. 550 p. (in Russian).
7. Arutyunyan F. G. On series in the Haar system. *Dokl. Akad. Nauk Armyanskoi SSR*, 1966, vol. 42, no. 3, pp. 134–140 (in Russian).
8. Davtyan R. S. On Representation of Functions by Orthogonal Series Possessing Martingale Properties. *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1976, vol. 19, no. 5, pp. 405–409. DOI: 10.1007/BF01142560.
9. Gevorkjan G. G. On the Representation of Measurable Functions by Martingales. *Analysis Math.*, 1982, vol. 8, iss. 4, pp. 239–256. DOI: 10.1007/BF02201774.



10. Gevorkian G. G. Representation of Measurable Functions by Absolutely Convergent Series of Translates and Dilates of One Function. *East J. Approx.*, 1996, vol. 2, no. 4, pp. 439–458.
11. Golubov B. I. Ob odnom klasse polnyh ortogonal'nyh sistem [On a class of complete orthogonal systems]. *Sibirskij matematicheskij zurnal*, 1968, vol. 9, no. 2, pp. 297–314 (in Russian).

Cite this article as:

Navasardyan K. A. On the Representation of Functions by Absolutely Convergent Series by \mathcal{H} -system. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2018, vol. 18, iss. 1, pp. 49–61 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2018-18-1-49-61.
