УДК 517.928.1

О. П. Филатов

КВАЗИРЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ И ТЕОРЕМА РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in \mu F(t, x, y, \mu), \quad & x(0) &= x_0, \\ \dot{y} &\in G(t, x, y, \mu), \quad & y(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где F, $G\colon D \to Kv(\mathbb{R}^{m_1})$, $Kv(\mathbb{R}^{m_2})$ — отображения в множество непустых и выпуклых компактов евклидовых пространств $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ соответственно; $D = R_+ \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times [0, a]$, $a > 0$; μ — малый параметр. Задача рассматривается на отрезке времени $I_\mu = [0, 1/\mu]$, $\mu > 0$. Решением задачи (1) называется пара абсолютно непрерывных функций $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$, определенных на отрезке I_μ, которые почти всюду удовлетворяют системе (1). Скалярное произведение в каждом из пространств $\mathbb{R}^{m_1}$, $\mathbb{R}^{m_2}$ обозначается одинаково — $\langle\cdot,\cdot\rangle$, также как и соответствующая норма — $\|\cdot\| = \langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x в любом из пространств $\mathbb{R}^{m_1}$, $\mathbb{R}^{m_2}$ обозначается $B(x, r)$. Отклонение по Хаусдорфу для множеств A и C из пространства $\mathbb{R}^{m_1}$ или $\mathbb{R}^{m_2}$ будем обозначать $h(A, C) = \max\{\mathrm{ex}(A, C), \mathrm{ex}(C, A)\}$, где полуотклонение множества A от множества C определяется соотношением $\mathrm{ex}(A, C) = \inf\{r > 0 : A \subset C + B(0, r)\}$.

На отрезке I_μ введем сетку $\Pi_\mu = \{t_i : t_i = i\Delta, i = 0, 1, \ldots, m\}$ с шагом $\Delta > 0$, $\mu m\Delta = 1$, и более мелкую сетку $\Omega_\mu = \{t_{i,j} : t_{i,j} = t_i + j\tau, i = 0, 1, \ldots, m-1, j = 0, 1, \ldots, n\}$ с шагом $\tau > 0$. Обозначим $I_i = [t_i, t_{i+1}]$, $I_{i,j} = [t_{i,j}, t_{i,j+1}]$. Далее мы будем рассматривать сетки Π_μ и Ω_μ, у которых целые m и n зависят от малого параметра μ, при этом шаг $\Delta = \Delta_\mu$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\mu \to 0} \Delta_\mu = \infty. \tag{2}$$

Задаче (1) сопоставим разностную схему

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &\in \mu F(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu), \quad & \xi(0) &= x_0, \\ \dot{\eta} &\in G(t, \xi_i, \eta_{i,j}, \mu), \quad & \eta(0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $t \in I_{i,j}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Здесь $\xi_i = \xi_\mu(t_i)$, $\eta_{i,j} = \eta_\mu(t_{i,j})$, $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ — решение задачи (3). Нетрудно убедиться на примере, что при выполнении условия (2) для сеток Π_μ и Ω_μ невозможно, вообще говоря, для данного решения задачи (1) и заданной точности в равномерной метрике подобрать решение задачи (3), которое бы гарантировало требуемую точность приближения по медленным переменным x (тем более и по быстрым y) при всех достаточно малых значениях параметра $\mu > 0$ на отрезке I_μ. Оказывается, что если расширить множество решений задачи (3) до класса *квазирешений*, то возможно любое решение исходной задачи приблизить в равномерной метрике некоторым *допустимым* квазирешением разностной задачи. Основной результат приводится в теореме аппроксимации ниже.

Отметим, что эта теорема имеет непосредственное приложение к теории усреднения дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными [2–5], что и оправдывает все построения.

С помощью теоремы аппроксимаци удалось доказать принцип усреднения в классе односторонне липшицевых систем с быстрыми и медленными переменными (результат принят к публикации в «Сибирском журнале индустриальной математики»).

Определение 1. *Квазирешением задачи* (3) *будем называть функцию* $\zeta_\mu(\cdot) = \big(\xi_\mu(\cdot), \eta_\mu(\cdot)\big)$, *определенную на отрезке* I_μ, *для которой выполняются следующие условия:*

a) $\zeta_\mu(\cdot)$ *является решением системы* (3) *в любом промежутке* $t_i \leqslant t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$;
b) *функция* $\xi_\mu(\cdot)$ *непрерывна в узлах сетки* Π_μ;
c) *функция* $\eta_\mu(\cdot)$ *в узлах сетки* Π_μ *может иметь разрывы первого рода* (*существуют конечные левый и правый пределы*), *при этом функция непрерывна справа, т. е.* $\eta_\mu(t_i) = \eta_\mu(t_i + 0)$.

В частности, любое решение задачи (3) является и квазирешением этой задачи.

Определение 2. *Квазирешение* $\zeta_\mu(\cdot)$ *задачи (3) будем называть допустимым, если существует такое решение* $z_\mu(\cdot) =$

$= \big(x_\mu(\cdot), y_\mu(\cdot)\big)$ *задачи* (1), *для которого имеют место равенства*

$$\eta_\mu(t_i) = y_\mu(t_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{4}$$

2. Общие условия. Введем класс $L_1^b \subset L_1^{\mathrm{loc}}$ локально интегрируемых функций $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для каждой из которых найдутся числа $T = T(\lambda) > 0$ и $l = l(\lambda) > 0$ такие, что

$$\int_t^{t+\Delta} \lambda(s)\, ds \leqslant l\Delta, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \Delta \geqslant T.$$

Кроме того, введем класс K непрерывных строго монотонных функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(0) = 0$. Модуль множества A обозначаем символом $|A| = \sup_{a \in A} \|A\|$.

Сформулируем теперь общие свойства отображений

$$F, G : D \to Kv(\mathbb{R}^{m_1}), Kv(\mathbb{R}^{m_2}), \quad (t, x, y, \mu) \to F(t, x, y, \mu), G(t, x, y, \mu).$$

1. Функции $F(\cdot, x, y, \mu)$, $G(\cdot, x, y, \mu)$ являются измеримыми для любых $x \in \mathbb{R}^{m_1}$, $y \in \mathbb{R}^{m_2}$, $\mu \in [0, a]$, при этом выполняется оценка линейного роста по x для отображения F:

$$|F(t, x, y, \mu)| \leqslant c_1(t)(1 + \|x\|) \quad (t, x, y, \mu) \in D$$

и оценка линейного роста по x и y для отображения G:

$$|G(t, x, y, \mu)| \leqslant c_2(1 + \|x\| + \|y\|), \quad (t, x, y, \mu) \in D,$$

где $c_1 \in L_1^b$, c_2 — постоянная.

2. Имеет место равномерная непрерывность отображений $F(t, \cdot, \cdot, \cdot)$, $G(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ по фазовым переменным и малому параметру:

$$h\big(F(t, z_1, 0), F(t, z_2, \mu)\big) \leqslant \alpha_1(t)\big(\sigma_1(r_x) + \sigma_2(r_y) + \omega_1(\mu)\big),$$
$$h\big(G(t, z_1, \mu), G(t, z_2, \mu)\big) \leqslant \alpha_2(t)\big(\sigma_3(r_x) + \sigma_4(r_y) + \omega_2(\mu)\big),$$
$$(t, z_1, \mu), (t, z_2, \mu) \in D,$$

где $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$; $r_x = \|x_1 - x_2\|$, $r_y = \|y_1 - y_2\|$; σ_s, $\omega_l \in K$, $s = 1, 2, \ldots, 4$, $l = 1, 2$; α_1, $\alpha_2 \in L_1^b$.

3. Для любых (t, z_1, μ), $(t, z_2, \mu) \in D$, $u_1 \in F(t, z_1, \mu)$, $u_2 \in G(t, z_1, \mu)$ найдутся векторы $v_1 \in F(t, z_2, \mu)$ и $v_2 \in G(t, z_2, \mu)$ такие, что

$$\langle x_1 - x_2, u_1 - v_1 \rangle \leqslant \alpha_3(t)(r_x + r_y) r_x,$$
$$\langle y_1 - y_2, u_2 - v_2 \rangle \leqslant \alpha_4(t)(r_y + r_x) r_y,$$

где $\alpha_3,\ \alpha_4 \in L_1^b$.

Заметим, что если для отображений F и G выполняется условие 3, то отображение $(\mu F) \times G$ удовлетворяет условию односторонней липшицевости [1] по совокупности переменных (x, y), так как в этом случае

$$\langle x_1 - x_2, \mu u_1 - \mu v_1 \rangle + \langle y_1 - y_2, u_2 - v_2 \rangle \leqslant \gamma_\mu(t)(\|r_x\|^2 + \|r_y\|^2),$$

где $\gamma_\mu(t) = 3\big(\mu\alpha_3(t) + \alpha_4(t)\big)/2$.

Нетрудно проверить, что условие 3 заведомо выполняется для отображения F, удовлетворяющего по переменным x условию односторонней липшицевости, а по переменным y — условию Липшица. Более того, отображение $F(t, x, \cdot, \mu)$ может быть и разрывным.

3. Теорема аппроксимации. Сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть выполняются условия* 1–3 *и задано* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что для некоторых сеток* Π_μ, Ω_μ, *где* $\mu \in (0, \mu_0]$, *выполняется условие* (2), *при этом* $\mu\Delta_\mu \to 0$ *при* $\mu \to 0$, *и для произвольного решения* $x_\mu(\cdot)$, $y_\mu(\cdot)$, *задачи* (1) *существует решение* $\xi_\mu(\cdot)$, $\eta_\mu(\cdot)$ *задачи* (3), *для которого выполняются неравенства*

$$\|x_\mu(t) - \xi_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad \|y_\mu(t) - \eta_\mu(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad t \in I_\mu.$$

1. *Donchev T., Farhi E.* Stability and Euler approximation of one-sided Lipschitz differential inclusions // SIAM J. Control OPTIM, 1998. — Vol. 36, No. 2. — P. 780–796.
2. *Филатов О.П., Хапаев М.М.* Усреднение систем дифференциальных включений. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. — 160 с.
3. *Филатов О.П.* Доказательство теорем усреднения для дифференциальных включений // Вестн. Сам. гос. ун-та, 2001. — № 2(20). — С. 20–33.
4. *Соколовская Е.В., Филатов О.П.* Аппроксимация сверху систем дифференциальных включений с нелипшицевой правой частью // Мат. заметки, 2005. — Т. 78, Вып. 5. — С. 763–772.
5. *Филатов О.П.* Интегральный метод Эйлера с возмущениями и принцип усреднения для дифференциальных включений // Вестн. Сам. гос. ун-та, 2005. — № 5(39). — С. 79–90.

Самарский государственный университет, г. Самара

filt@ssu.samara.ru