

УДК 517.97

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ<sup>\*</sup>)

М. С. Никольский

Различные задачи отслеживания заданного движения (трекинга) представляют значительный интерес для современной теории управления. Интересные результаты в этом направлении были получены Е. А. Барбашиным, В. Г. Болтянским, Г. Н. Мильштейном, В. Н. Фоминым, В. А. Якубовичем, J. Willems, W. M. Wonham и многими другими авторами.

Рассматриваемые ниже задачи тесно связаны с изучением систем линейных интегральных уравнений первого рода типа Вольтерра в свертках. При этом оказываются полезными результаты теории операторного исчисления Я. Микусинского (см. [1]). Поэтому п. 1 посвящается изложению элементов операторного (сверточного) исчисления. В нем также содержится важный результат (см. [2]) о приведении целой операторной матрицы к канонической форме, которую естественно назвать формой Смита.

**1. Элементы операторного исчисления Я. Микусинского. Обозначения.** Рассматривается кольцо  $C$  действительных непрерывных функций  $f = \{f(t)\}$ , определенных при  $t \geq 0$ . Операция сложения  $+$  в нем вводится поточечным образом:

$$f + g = \{f(t) + g(t)\}, \quad t \geq 0,$$

а операция умножения  $*$  определяется через свертку:

$$f * g = \left\{ \int_0^t f(t-s)g(s) ds \right\}, \quad t \geq 0.$$

Важную роль в дальнейшем играет функция  $l = \{1\}$ ,  $t \geq 0$ , которую называют оператором интегрирования. Справедлива формула  $l^k = \{t^{k-1}/(k-1)!\}$ ,  $t \geq 0$ , где  $k = 1, 2, \dots$ ,  $l^k = l * \dots * l$  ( $k$  раз).

Кольцо  $C$  является коммутативным ассоциативным кольцом без делителей нуля и не имеет единичного элемента. На основании известной в алгебре конструкции кольцо  $C$  вкладывается в поле отношений (дробей)  $\mathcal{M}$  (поле Микусинского), элементы которого называются операторами и изображаются дробями вида  $f/g$ , где  $f, g \in C$  и  $g \neq 0$ . Для этих дробей вводятся обычные правила сложения  $+$ , умножения  $*$  и понятие равенства дробей. Элементы поля  $\mathcal{M}$  вида  $f * g/g$ , где  $f, g \in C$  и  $g \neq 0$ , отождествляются с элементами  $f$  из  $C$ . В этом смысле говорят, что  $C \subset \mathcal{M}$ .

Единичный оператор поля  $\mathcal{M}$  обозначим через  $\delta$ , а через  $l^{-1}$  — оператор, обратный оператору  $l$  в  $\mathcal{M}$ , т. е.  $l^{-1} * l = l * l^{-1} = \delta$ .

Важное место в операторном исчислении занимают так называемые константы поля  $\mathcal{M}$ . Пусть  $f = \{\alpha\}$ ,  $t \geq 0$ , где  $\alpha$  — действительное число. Положим  $\hat{\alpha} = l^{-1} * f$ . Оператор  $\hat{\alpha}$  называется константой поля  $\mathcal{M}$ . Отметим, что  $\hat{1} = \delta$  и при произвольной функции  $g \in C$  имеет место  $\hat{\alpha} * g = \{\alpha g(t)\}$ ,  $t \geq 0$ .

<sup>\*</sup>) Настоящая работа является изложением доклада, сделанного 18 марта 1995 г. на международной конференции "Нелинейный синтез и теоретико-игровое управление" (Международный математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, 13 — 26 марта 1995 г.).

Естественным образом вводится понятие линейного  $n$ -мерного арифметического пространства  $\mathcal{M}^n$  над полем  $\mathcal{M}$ . Его элементами, называемыми векторами, являются упорядоченные наборы из  $n$  элементов поля  $\mathcal{M}$ , записываемые в виде столбцов, с обычными правилами сложения и умножения на элементы из  $\mathcal{M}$ . При работе с векторами из  $\mathcal{M}^n$  можно использовать аппарат линейной алгебры (см., например, [3,4]). В частности, понятия (например, линейная независимость векторов, детерминант матрицы, ранг матрицы и т. д.) и различные результаты линейной алгебры оказываются действенными при изучении вопроса о разрешимости систем линейных уравнений вида  $A * x = b$  относительно  $x \in \mathcal{M}^q$ , где  $A$  — операторная матрица размерности  $p \times q$ ,  $b \in \mathcal{M}^p$ . Это обстоятельство существенно. Условимся через  $\text{rang } A$  обозначать ранг операторной  $p \times q$ -матрицы  $A$  над полем  $\mathcal{M}$ .

Рассмотрим формальный степенной ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_i * l^i. \quad (1)$$

Он называется сходящимся (см. [2]), если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i t^{i-1} / (i-1)! \quad (2)$$

сходится в обычном смысле при любом  $t \geq 0$ . Суммой сходящегося ряда (1) объявляется оператор  $\hat{\alpha}_0 + g$ , где  $g = \{g(t)\}$ ,  $t \geq 0$ , — сумма степенного ряда (2).

**Определение 1.** Элемент поля  $\mathcal{M}$  будем называть целым элементом, если он является суммой некоторого сходящегося ряда (1).

Пусть  $\alpha$  — целый элемент поля  $\mathcal{M}$ . Можно показать, что коэффициенты  $\alpha_i$  разложения  $\alpha$  в ряд (1) определяются однозначным образом.

**Определение 2.** Индексом целого ненулевого элемента  $\alpha$  поля  $\mathcal{M}$  называется номер наименьшего  $\alpha_i \neq 0$  из его разложения в ряд (1). Индекс нулевого элемента из  $\mathcal{M}$  полагается равным  $+\infty$ .

Пусть  $A$  — произвольная числовая  $p \times q$ -матрица с действительными элементами  $a_{ij}$ . Условимся через  $\hat{A}$  обозначать операторную матрицу  $(\hat{a}_{ij})$ . Нетрудно ввести понятие целой операторной матрицы размерности  $p \times q$  по аналогии с понятием целого элемента из  $\mathcal{M}$ .

Для произвольной целой операторной матрицы  $F$  с ненулевым рангом над  $\mathcal{M}$  справедлива (см. [2])

**Теорема 1.** Целую операторную  $p \times q$ -матрицу  $F$  с  $\text{rang } F = \rho > 0$  можно представить в следующем виде:  $F = G * H * K$ , где  $G, H, K$  — целые операторные матрицы размерности  $p \times p$ ,  $p \times q$ ,  $q \times q$  соответственно, причем матрицы  $G_0, K_0$ , участвующие в разложениях

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{G}_i * l^i, \quad K = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{K}_i * l^i,$$

являются невырожденными, а операторная матрица  $H = (h_{ij})$  имеет диагональный вид, т. е.  $h_{ii} = l^{k_i}$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ , остальные элементы  $h_{ij} = 0$ ; здесь  $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_\rho$  и  $k_i$  — целые числа.

Отметим, что из-за невырожденности матриц  $G_0, H_0$  операторные матрицы  $G, H$  оказываются обратимыми над  $\mathcal{M}$  и обратные операторные матрицы  $G^{-1}, H^{-1}$  являются целыми операторными матрицами (см. [2]).

Условимся через  $R^k$  ( $k \geq 1$ ) обозначать действительное  $k$ -мерное арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные наборы  $k$  действительных чисел, записываемые в виде столбцов. Длину вектора из  $R^k$  называем его модулем.

Пусть  $A$  — произвольная  $p \times q$ -матрица над полем действительных чисел  $R$ . Через  $\text{rang } A$  будем обозначать ранг матрицы  $A$  над полем  $R$ , а через  $E$  — единичную матрицу порядка  $n$ .

**2. Компенсация возмущений.** Пусть номинальное движение описывается линейным уравнением  $\dot{\xi} = A\xi$ ,  $\xi(0) = x_0$ , где  $\xi \in R^n$ ,  $A$  — постоянная квадратная матрица порядка  $n$ ,  $x_0 \in R^n$  — начальное состояние.

Реальное движение происходит под воздействием помех и возмущений. Рассмотрим следующую дифференциальную игру, которая учитывает наличие управляющего вектора  $u \in R^p$  и вектора возмущений (помех)  $v \in R^q$ :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Cv, \quad x(0) = x_0, \quad (3)$$

где  $B, C$  — постоянные матрицы размерности  $n \times p, n \times q$  соответственно,  $u \in \rho S_p, v \in \sigma S_q$ , при этом  $S_k = \{y \in R^k : |y| \leq 1\}, \rho \geq 0, \sigma \geq 0$ .

Пусть фиксированы ненулевая  $m \times n$ -матрица  $\pi$  и отрезок  $\Delta = [0, T]$ , где  $T > 0$ . Условимся в дифференциальной игре (3) использовать в качестве управляющих функций произвольные функции  $u = u(t, x) \in \rho S_p$ , определенные при  $t \in \Delta, x \in R^n$ . Будем предполагать, что возмущения  $v = v(t) \in \sigma S_q, t \in \Delta$ , — произвольные измеримые по Лебегу функции. При подстановке произвольной допустимой пары  $u(t, x), v(t)$  в (3) решение начальной задачи Коши будем искать в классе конструктивных движений (см. [5]). Надо иметь в виду, что конструктивных движений может оказаться много.

**Задача 1.** Построить такую управляющую функцию  $u = u(t, x)$ , что при произвольном допустимом возмущении  $v = v(t) \in \sigma S_q, t \in \Delta$ , для произвольного конструктивного движения  $x(t, u(\cdot), v(\cdot), x_0)$  уравнения (3), соответствующего  $u(t, x), v(t)$  при  $t \in \Delta$  и начальному условию  $x(0) = x_0$ , выполняется  $\pi x(t, u(\cdot), v(\cdot), x_0) = \pi \xi(t, x_0)$ , где  $\xi(t, x_0) = e^{tA} x_0$  — решение начальной задачи  $\dot{\xi} = A\xi, \xi(0) = x_0$ .

**Замечание 1.** Нетрудно видеть, что в задаче 1 требуется с помощью  $u(t, x)$  отследить системой (3)  $\pi$ -проекцию номинального движения  $\xi(t, x_0)$  при произвольной измеримой функции  $v(t) \in \sigma S_q$ .

Для решения задачи 1 рассмотрим интегральное уравнение компенсации

$$\int_0^t \pi e^{(t-s)A} B u(s) ds = - \int_0^t \pi e^{(t-s)A} C v(s) ds, \quad t \in \Delta, \quad (4)$$

где измеримая функция  $v(s) \in \sigma S_q, s \in \Delta$ , считается известной, а измеримая функция  $u(s) \in \rho S_p, s \in \Delta$ , является неизвестной.

С помощью операторного исчисления (см. [1, 2]) были получены (см. [6]) следующие достаточные условия разрешимости уравнения (4) при произвольной измеримой  $v(s) \in \sigma S_q, s \in \Delta$ .

**Теорема 2.** Для разрешимости уравнения (4) достаточно выполнения следующих двух условий:

1) существует такая константа  $\alpha > 0$ , что при всех достаточно малых  $r \geq 0$   $\alpha \pi (E - rA)^{-1} B S_p \supset \pi (E - rA)^{-1} C S_q$ ;

2)  $\rho \geq \beta \sigma$ , где  $\beta \geq 0$  — эффективно вычисляемая константа.

При доказательстве теоремы 2 использован метод факторизации целых операторных матриц (см. [7]). Можно показать, что при выполнении условий теоремы 2 некоторое решение уравнения (4) может быть получено в виде каузального (причинного или вольтерровского) оператора

$$u(t) = \mathcal{U}(t, v_i(\cdot)), \quad (5)$$

где  $v_i(\cdot) = \{v(s), 0 \leq s \leq t\}, v(s) \in \sigma S_q$  — произвольная измеримая функция при  $s \in \Delta$ .

Положим при  $t \in \Delta$

$$W(t) = \left\{ e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (B \mathcal{U}(s, v_s(\cdot)) + C v(s)) ds \right\}, \quad (6)$$

где объединение берется по всевозможным измеримым функциям  $v(s) \in \sigma S_q, s \in \Delta$ . Определим множество (см. (6))

$$W = \{(t, x) : t \in \Delta, x \in W(t)\}. \quad (7)$$

Оно является  $u$ -стабильным для дифференциальной игры (3) (см. [5]).

Искомую управляющую функцию  $u(t, x)$  можно построить по правилу экстремального прицеливания (см. [5]) на замыкание множества  $W$  (см. (7)).

Пример 1. Пусть  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $q = 1$  и система (3) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + v,$$

где  $|u| \leq \rho$ ,  $|v| \leq \sigma$ . Положим  $m = 1$  и  $\pi = (1, 0)$ . Можно показать, что в этом примере уравнение компенсации (4) выглядит так:

$$\int_0^t \cos(t-s)u(s) ds = - \int_0^t \sin(t-s)v(s) ds, \quad t \in \Delta. \quad (8)$$

Условие 1 теоремы 2 выполнено. С помощью операторного исчисления [1] получаем решение  $u(t) = \mathcal{U}(t, v_i(\cdot))$  (см. (5)) в следующем виде:

$$u(t) = - \int_0^t v(s) ds.$$

Отсюда вытекает, что константа  $\beta$  из условия 2 теоремы 2 равна  $T$ .

Далее, можно показать, что в этом примере (см. (6))  $W(t) = e^{tA}x_0 + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \right\}$ ,  $t \in \Delta$ , где  $\mu \in [-\sigma t, \sigma t]$ , т. е.  $W(t)$  имеет в  $R^2$  вид вертикального отрезка длины  $2\sigma t$  с центром в точке  $e^{tA}x_0$ . Искомая управляющая функция  $u(t, x)$  с помощью правила экстремального прицеливания (см. [5]) найдена при  $t \in \Delta$ ,  $x \in R^2$  в виде  $u(t, x) = \rho \operatorname{sign}(\cos t \cdot x_1^0 + \sin t \cdot x_2^0 - x_1)$ , где  $\operatorname{sign} a = 1$  при  $a > 0$ ,  $\operatorname{sign} a = -1$  при  $a < 0$  и  $\operatorname{sign} 0 = 0$ ,  $x_1^0, x_2^0$  — координаты начальной точки  $x_0$ .

**3. Отслеживание заданной  $\pi$ -проекции.** Более общей и более трудной, чем задача 1, является задача отслеживания с помощью  $\pi x(t, u(\cdot), v(\cdot), x_0)$  заданной  $m$ -мерной функции  $g(t)$  при  $t \in \Delta$  (обозначения см. в п. 2), т. е. нужно построить такую управляющую функцию  $u = u(t, x)$ , что при произвольной измеримой  $v(t) \in \sigma S_q$ ,  $t \in \Delta$ , выполняется равенство

$$\pi x(t, u(\cdot), v(\cdot), x_0) = g(t), \quad t \in \Delta, \quad (9)$$

на любом соответствующем конструктивном движении системы (3) с начальным условием  $x(0) = x_0$ . Эту задачу отслеживания назовем задачей 2.

Для ее решения положим  $u = u_1 + u_2$ , где  $|u_1| \leq \rho_1$ ,  $|u_2| \leq \rho_2$ ,  $\rho_1 \geq 0$ ,  $\rho_2 \geq 0$  и  $\rho_1 + \rho_2 = \rho$ . Рассмотрим, далее, следующие интегральные уравнения при  $t \in \Delta$  (см. (9))

$$\int_0^t \pi e^{(t-s)A} B u_1(s) ds = g(t) - \pi e^{tA} x_0, \quad (10)$$

$$\int_0^t \pi e^{(t-s)A} B u_2(s) ds = - \int_0^t \pi e^{(t-s)A} C v(s) ds. \quad (11)$$

Уравнение (11) — это знакомое нам уравнение компенсации (4) с  $u_2 \in \rho_2 S_p$ . При выполнении условий теоремы 2 (с заменой  $\rho$  на  $\rho_2$ ) можно получить искомое измеримое решение  $u_2(t)$  в виде каузального оператора

$$u_2(t) = \mathcal{U}_2(t, v_i(\cdot)) \quad (12)$$

(аналогично каузальному оператору (5) для уравнения (4)).

Займемся интегральным уравнением (10), предполагая, что  $g(t)$  (см. (9)) — целая аналитическая функция комплексного переменного  $t$ . Используя обозначения п. 1, (10) можно переписать в операторных обозначениях следующим образом:

$$\mathcal{D} * w = h, \quad (13)$$

где

$$D = l * \hat{\pi} * (\hat{E} - l * \hat{A})^{-1} * \hat{B}, \quad h(t) = g(t) - \pi e^{tA} x_0, \quad (14)$$

а неизвестная функция  $w(t) \in R^p$ ,  $t \in \Delta$ , ищется в классе непрерывных функций.

В формуле (14) символ  $(\cdot)^{-1}$  обозначает обратную на поле  $\mathbb{M}$  операторную матрицу операторной матрице, стоящей в скобках,  $E$  обозначает единичную матрицу порядка  $n$ .

Используя результаты [8], получаем следующие достаточные условия разрешимости уравнения (13).

**Теорема 3.** Допустим, что ранг операторной матрицы  $D$  (см. (14)) над полем  $\mathbb{M}$  равен  $r_0 > 0$ . Тогда для разрешимости уравнения (13) в классе непрерывных функций  $w(t) \in R^p$ ,  $t \in \Delta$ , достаточно выполнения двух условий:

1)  $\text{rang } D = \text{rang } (D; h)$ ;

2) наименьший из индексов всевозможных миноров порядка  $r_0$  матрицы  $l * D$  равен наименьшему из индексов всевозможных миноров порядка  $r_0$  матрицы  $(l * D; h)$ .

**Замечание 2.** Условие 1 в теореме 3 — это условие Кронекера — Капелли. Миноры порядка  $r_0$  в теореме 3 вычисляются по обычным правилам с применением полевых операций  $+$ ,  $*$ , используемых в  $\mathbb{M}$ .

При выполнении условий теоремы 3 искомое непрерывное решение  $w(t) \in R^p$ ,  $t \in \Delta$ , уравнения (13) может быть найдено следующим образом. Выделяем в  $D$  подматрицу порядка  $r_0$ , детерминант которой имеет наименьший индекс, обозначим ее  $\Lambda$ . Рассмотрим новое линейное уравнение над  $\mathbb{M}$

$$\Lambda * y = h_c, \quad (15)$$

где  $y \in \mathbb{M}^{r_0}$ , вектор  $h_c$  получен из  $h$  отбрасыванием компонент с номерами строк матрицы  $D$ , не содержащих элементы матрицы  $\Lambda$ . Уравнение (15) имеет единственное решение  $\tilde{y} \in \mathbb{M}^{r_0}$  над полем  $\mathbb{M}$ , которое можно получить по формуле Крамера. Отсюда в силу наложенных условий следует, что элементы  $\tilde{y}$  принадлежат кольцу  $C$ . Обозначим через  $j_k$ ,  $k = 1, \dots, r_0$ , номера столбцов в матрице  $D$ , содержащих элементы ее подматрицы  $\Lambda$ , причем  $j_1 < j_2 < \dots < j_{r_0}$ . Рассмотрим вектор  $\tilde{w} \in \mathbb{M}^p$ , у которого компоненты с номерами  $j_k$  совпадают с  $k$ -ми компонентами вектора  $\tilde{y}$ , а все остальные компоненты являются нулевыми. Применяя соображения линейной алгебры, можно показать, что  $\tilde{w}$  является решением уравнения (13) с элементами из  $C$ . Положим, далее, в (10)

$$u_1(t) = \tilde{w}(t), \quad t \in \Delta; \quad \rho_1 = \max_{t \in \Delta} |\tilde{w}(t)|. \quad (16)$$

**Замечание 3.** С помощью [8] можно выписать множество всех решений уравнения (13) над кольцом  $C$  и за счет подходящего выбора  $\tilde{w}(t)$ ,  $t \in \Delta$ , можно попытаться уменьшить величину константы  $\rho_1$  (см. (16)).

Определим каузальный оператор (см. (12), (16))  $U(t, v_i(\cdot)) = \tilde{w}(t) + U_2(t, v_i(\cdot))$  (ср. с (5)) на множестве измеримых функций  $v(t) \in \sigma S_q$ ,  $t \in \Delta$ . С помощью этого оператора при  $t \in \Delta$  строится множество  $W(t)$  (см. (6)) и множество  $W$  (см. (7)), которое является  $u$ -стабильным для дифференциальной игры (3) (см. [5]). Искомая управляющая функция  $u(t, x)$  строится по правилу экстремального прицеливания на замыкание множества  $W$  (см. [5]).

**4. Трекинг при наличии запаздывания в аргументе.** Рассмотрим теперь аналог задачи 1 при наличии запаздывания в аргументе. Здесь динамика управляемого объекта описывается (ср. с (3)) при  $t \in \Delta = [0, T]$  уравнением

$$\dot{x} = A_1 x(t) + A_2 x(t-1) + Bu + Cv \quad (17)$$

и начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-1, 0], \quad (18)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$ ,  $v \in R^q$ ,  $u \in \rho S_p$ ,  $v \in \sigma S_q$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\sigma \geq 0$ ,  $A_1, A_2$  — постоянные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $B$  и  $C$  — постоянные матрицы размерности  $n \times p$ ,  $n \times q$  соответственно,

$\varphi(t)$  —  $n$ -мерная непрерывная на  $[-1, 0]$  функция. При произвольных измеримых по Лебегу  $u(t) \in \rho S_p$ ,  $v(t) \in \sigma S_q$ ,  $t \in \Delta$ , справедлива при  $t \in \Delta$  формула для соответствующего абсолютно непрерывного решения задачи Коши (см. [9])

$$x(t) = F(t, \varphi(\cdot)) + \int_0^t G(t-s)(Bu(s) + Cv(s)) ds, \quad (19)$$

где  $F(t, \varphi(\cdot))$  — решение однородного уравнения

$$\dot{x} = A_1 x(t) + A_2 x(t-1) \quad (20)$$

с начальным условием (18),  $G(r)$  — непрерывная при  $r \geq 0$  матричная функция размерности  $n \times n$ .

В качестве управляющих функций для игрока, распоряжающегося вектором  $u$ , будем рассматривать произвольные функции вида  $u(t, x_t(\cdot))$ , где  $t \in \Delta$ ,  $x_t(\cdot) = \{x(t+s), -1 \leq s \leq 0\}$ , причем функция  $u(t, y)$  определена при всех  $t \in \Delta$ ,  $y \in C_n[-1, 0]$  и принимает значения в  $\rho S_p$  ( $C_n[-1, 0]$  обозначает банахово пространство  $n$ -мерных непрерывных на  $[-1, 0]$  векторных функций с равномерной метрикой).

Будем предполагать, что возмущения  $v = v(t) \in \sigma S_q$ ,  $t \in \Delta$ , — произвольные измеримые по Лебегу функции. При подстановке произвольной допустимой пары  $u(t, x_t(\cdot))$ ,  $v(t)$  в (17) соответствующее решение (17), (18) будем искать в классе конструктивных движений (см. [10]). Надо иметь в виду, что конструктивных движений может оказаться много.

Пусть фиксирована  $m \times n$ -матрица  $\pi$ .

**Задача 3.** Построить такую управляющую функцию  $u = u(t, x_t(\cdot))$ , что при произвольном допустимом возмущении  $v = v(t) \in \sigma S_q$ ,  $t \in \Delta$ , для произвольного конструктивного движения  $x(t, u(\cdot), v(\cdot), \varphi(\cdot))$  для (17), (18), соответствующего  $u(t, x_t(\cdot))$ ,  $v(t)$ , при  $t \in \Delta$  выполняется (см. (19), (20))  $\pi x(t, u(\cdot), v(\cdot), \varphi(\cdot)) = \pi F(t, \varphi(\cdot))$ .

**Замечание 4.** Нетрудно видеть, что в задаче 3 требуется с помощью  $u = u(t, x_t(\cdot))$  отследить системой (17), (18) на  $\Delta$   $\pi$ -проекцию  $F(t, \varphi(\cdot))$  — решения однородного уравнения (20) с начальным условием (18).

Решение задачи 3 проводится по схеме решения задачи 1. Интегральное уравнение компенсации (ср. с (4), (19)) имеет вид

$$\int_0^t \pi G(t-s)Bu(s) ds = - \int_0^t \pi G(t-s)Cv(s) ds, \quad t \in \Delta. \quad (21)$$

Из-за возможной негладкости матричной функции  $G(r)$  нельзя применять результаты [7] для получения условий разрешимости уравнения (21), поэтому приходится использовать более грубые соображения.

С помощью операторного исчисления для операторной матрицы  $G = \{G(r)\}$ ,  $r \geq 0$ , можно записать следующее представление:

$$G = l * (\hat{E} - l * \hat{A}_1 - l * e^{-s} * \hat{A}_2)^{-1}, \quad (22)$$

где  $e^{-s}$  означает оператор сдвига, обладающий рядом свойств (см. [1]), в частности

$$l * e^{-s} = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{для } t \geq 1. \end{cases} \quad (23)$$

В формуле (22) символ  $(\cdot)^{-1}$  означает обратную над полем  $\mathfrak{M}$  операторную матрицу операторной матрицы, стоящей в скобках.

Используя формулы (22), (23), получаем следующие грубые достаточные условия для разрешимости уравнения (21) относительно неизвестной измеримой  $u(t) \in \rho S_p$  при произвольной измеримой  $v(t) \in \sigma S_q$  в классе каузальных операторов  $u(t, v_t(\cdot))$ .

Теорема 4. Для разрешимости уравнения (21) достаточно выполнения двух условий:

1) существует такое целое неотрицательное число  $k$ , что  $\text{rang } \pi A_1^k B = m$ ;

2) если  $k > 0$ , то пусть  $\pi(A_1 + rA_2)^i B \equiv 0$ ,  $\pi(A_1 + rA_2)^i C \equiv 0 \quad \forall r \in R^1$  при  $i = 0, \dots, k-1$ ;

3)  $\rho \geq \beta\sigma$ , где  $\beta \geq 0$  — эффективно вычисляемая константа.

Замечание 5. Условие 2) нетрудно переписать без параметра  $r$ , но тогда оно будет выглядеть более громоздко. Напомним также, что  $m$  — число строк у матрицы  $\pi$ .

С помощью функций (ср. с (19))

$$\xi(t, v(\cdot)) = F(t, v(\cdot)) + \int_0^t G(t-s)(Bu(s, v_s(\cdot)) + Cv(s)) ds,$$

где  $\mathcal{U}(t, v_s(\cdot))$  — каузальное решение уравнения (21),  $v(t) \in \sigma S_q$  — произвольная измеримая на  $\Delta$  функция, строится в  $\Delta \times C_n[-1, 0]$   $u$ -стабильное множество  $W$  (см. определение в [10]). Искомая управляющая функция  $u(t, x_t(\cdot))$  строится с помощью  $u$ -стабильного множества  $W$  по рецепту, изложенному в [10].

**5. Гибкие управляемые системы.** Рассмотрим линейный управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad (24)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $n \times p$  соответственно. Пусть выход управляемой системы (24) описывается формулой

$$y(t) = \pi x(t), \quad t \in \Delta, \quad (25)$$

где  $\pi$  — постоянная  $m \times n$ -матрица,  $\Delta = [0, T]$ ,  $T > 0$ .

В силу формулы Коши при произвольном непрерывном управлении  $u(t)$ ,  $t \in \Delta$ , соответствующий выход (25) описывается формулой

$$y(t, u(\cdot)) = \int_0^t \pi e^{(t-s)A} Bu(s) ds, \quad t \in \Delta. \quad (26)$$

Очевидно, функция  $y(t, u(\cdot))$  (см. (26)) является элементом гильбертова пространства  $L_2^m(\Delta)$   $m$ -мерных измеримых векторных функций, суммируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля на  $\Delta$ . Через  $\|a(\cdot)\|$  условимся обозначать норму элемента  $a(\cdot) \in L_2^m(\Delta)$ .

Непрерывные управления  $u(t)$ ,  $t \in \Delta$ , являются элементами банахова пространства  $C_p(\Delta)$   $p$ -мерных непрерывных на  $\Delta$  векторных функций.

**Задача 4.** Найти условия на матрицы  $A, B, \pi$  (см. (24), (25)), при которых для произвольной функции  $g(\cdot) \in L_2^m(\Delta)$  выполняется равенство (см. (26))

$$\inf_{u(\cdot) \in C_p(\Delta)} \|g(\cdot) - y(\cdot, u(\cdot))\| = 0. \quad (27)$$

**Определение 3.** Управляемую систему (24), (25) назовем гибкой, если для нее выполняется равенство (27) при произвольной функции  $g(\cdot) \in L_2^m(\Delta)$ .

**Замечание 6.** В случае гибкости системы (24), (25) с помощью выхода системы (25) можно сколь угодно точно (в смысле метрики  $L_2^m(\Delta)$ ) отследить произвольную функцию  $g(\cdot) \in L_2^m(\Delta)$ .

С помощью теоремы 1 получена

**Теорема 5.** Система (24), (25) является гибкой тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $\pi(E - rA)^{-1}B$  при всех достаточно малых  $r > 0$  равен  $m$ , т. е. числу строк матрицы  $\pi$ .

**Пример 2.** Пусть  $n = 2$ ,  $p = 1$  и система (24) имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u. \quad (28)$$

Применяя теорему 5, получаем, что система (28), (25) с единичной матрицей  $\pi$  порядка 2 не является гибкой, а система (28), (25) с  $\pi = (1, 0)$  гибкая.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 94 – 01 – 00710).

### Литература

1. *Михусинский Я.* Операторное исчисление. М., 1956.
2. *Gamkrelidze R. V. and Kharatishvili G. L.* // SIAM J. Control. 1974. Vol. 12, N 2. P. 332 — 349.
3. *Бурбаки Н.* Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М., 1962.
4. *Куликов Л. Я.* Алгебра и теория чисел. М., 1979.
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
6. *Никольский М. С.* // Докл. РАН. 1992. Т. 322, № 5. С. 851 — 854.
7. *Nikolskii M. S.* // Integral Transforms and Special Functions. 1994. Vol. 2, N 1. P. 51 — 64.
8. *Nikolskii M. S.* // Integral Transforms and Special Functions. 1995. Vol. 3, N 1. P. 37 — 48.
9. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
10. *Осипов Ю. С.* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779 — 782.

*Математический институт  
им. В. А. Стеклова РАН*

*Поступила в редакцию  
30 июня 1995 г.*