Е. М. Степанова, Р. З. Даутов, Ю. Я. Петрушенко, Решение краевых задач, описываемых двумерными эллиптическими уравнениями второго порядка, методом интегрирующих матриц, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2005, часть 3, 218–221

условиям, при которых возможно применение формулы Остроградского.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гусев В.А.* О кватернионных функциях, моногенных в смысле В. С. Фёдорова // Anal. Stiint. ale Univers. din Iasi. 1963. T. 9, F. 1. P. 33–39.
2. *Гусев В.А.* О квартирнионных функциях, моногенных в смысле В. С. Фёдорова // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20. Вып. 1. С. 203–208.
3. *Фёдоров В.С.* Основные свойства обобщённых моногенных функций // Известия вузов. Математика. 1958. № 6. С. 257–265.
4. *Фёдоров В.С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве // Известия вузов. Математика. 1957. № 1. С. 227–233.
5. *Стэльмашук М.Т., Шылінец У.А.* Аб адной краявой задачы // Весці БДПУ. 2000. № 2. С. 151–159.
6. *Стэльмашук М.Т., Шылінец У.А.* Пабудова інтэгральных выяўленняў для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дiферэнцыяльных раўнанняў Максвэла // Весці БДПУ. 1999. № 2. С. 147–150.

УДК 539.3

Е.М. Степанова, Р.З. Даутов, Ю.Я. Петрушенко

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, МЕТОДОМ ИНТЕГРИРУЮЩИХ МАТРИЦ

Метод интегрирующих матриц (МИМ), как метод аппроксимации краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (а также систем дифференциальных уравнений), был развит в работах [1–4] и с успехом применяется для решения задач строительной механики.

В данной работе построено одно обобщение на двумерный случай МИМ на примере решения следующей краевой задачи: найти функцию $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$ такую, что

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \qquad (1)$$

Предполагается, что матрица коэффициентов $A = A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{2}$ равномерно по $x \in \bar{\Omega}$ положительно определена, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

МИМ предусматривает реализацию двух этапов. На первом этапе задача эквивалентным образом сводится к системе интегральных уравнений (СИУ) первого рода

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_1 b_{11}\mathrm{I}_1^* - \mathrm{I}_1 b_{12}\mathrm{I}_2^* - \mathrm{I}_2 b_{21}\mathrm{I}_1^* + \mathrm{I}_2 b_{22}\mathrm{I}_2^*, & \mathrm{I}_1 b_{11} - \mathrm{I}_2 b_{21}, & \mathrm{I}_1 b_{12} - \mathrm{I}_2 b_{22} \\ \overline{\mathrm{I}}_1 b_{11}\mathrm{I}_1^* - \overline{\mathrm{I}}_1 b_{12}\mathrm{I}_2^* & \overline{\mathrm{I}}_1 b_{11} & \overline{\mathrm{I}}_1 b_{12} \\ \overline{\mathrm{I}}_2 b_{21}\mathrm{I}_1^* - \overline{\mathrm{I}}_2 b_{22}\mathrm{I}_2^* & \overline{\mathrm{I}}_2 b_{21} & \overline{\mathrm{I}}_2 b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_1 b_{11}\mathrm{I}_1^* f - \mathrm{I}_2 b_{21}\mathrm{I}_1^* f \\ \overline{\mathrm{I}}_1 b_{11}\mathrm{I}_1^* f \\ \overline{\mathrm{I}}_2 b_{21}\mathrm{I}_1^* f \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где введены обозначения: $A^{-1} = \{b_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{2}$; $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^T$ – множители функции Лагранжа, определенные на гильбертовом пространстве $H_\lambda = L_2(\Omega) \times L_2(0,l_2) \times L_2(0,l_1)$; кроме этого определены интегральные операторы с использованием суперпозиций оператора Вольтерра вида:

$$I_j u = \int_0^{x_j} u\, dx_j, \quad I_j^* u = \int_{x_j}^{l_j} u\, dx_j, \quad \overline{I}_j u = \int_0^{l_j} u\, dx_j, \quad j = 1,2,$$

для которых выполнено равенство $(I_j u, v) = (u, I_j^* v)$ для $u, v \in L_2(\Omega)$. В СИУ (2) $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$, а выражения типа $\mathrm{I}_1 b_{11} \mathrm{I}_1^* \lambda_0,\ \mathrm{I}_1 b_{12} \lambda_2$ понимаются как $\mathrm{I}_1(b_{11}(\mathrm{I}_1^* \lambda_0)),\ \mathrm{I}_1(b_{12}\lambda_2)$. После решения уравнения (2) неизвестное $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)^{\mathrm{T}}$, $\varepsilon_j = \partial u / \partial x_j$ определяется из уравнения

$$A\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_1^* f - \mathrm{I}_1^* \lambda_0 - \lambda_1 \\ \mathrm{I}_2^* \lambda_0 - \lambda_2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Решение задачи (1) находится по формулам $u = I_1 \varepsilon_1$, $\nabla u = \varepsilon$.

Запишем (2) в виде $A\lambda = F$. Прямыми вычислениями проверяется, что интегральный оператор $A: H_\lambda \to H_\lambda$ непрерывен и симметричен, т.е. самосопряжен.

На втором этапе новая задача аппроксимируется методом коллокаций, естественным образом приводящим к аппроксимации I_h оператора I:

$$(I_{kh}\lambda)(x_{ki}) = \int_0^{x_{ki}} \sum_{j=1}^{n_k} \lambda_j \varphi_j(x_k)\, dx_k = \sum_{j=1}^{n_k} I_{k,ij}\lambda_j, \quad I_{k,ij} = \int_0^{x_{ki}} \varphi_j(x_k)\, dx_k,$$

$$(I_{kh}\lambda)(x_{ki}) = \int_0^{x_L} \sum_{L=1}^{n_1 n_2} \lambda_{0,L} \varphi_L(x_1, x_2) dx_k = \sum_{L=1}^{n_1 n_2} I_{k,L}\lambda_L, \quad I_{k,L} = \int_0^{x_L} \varphi_L(x_1, x_2)\, dx_k,$$

где однозначно определяется единый индекс $L = i + (j-1)n_1$.

Матрица $L_k = \{I_{k,ij}\}_{i,j=1}^{n_k}$ называется левой интегрирующей матрицей по переменной x_k. Явные формулы для вычисления элементов этой матрицы получены в [1]. Аналогично определяется аппроксимация I_{kh}^* оператора I_k^* по формуле $I_{kh}^*\lambda = I_k^*\lambda_h$ $(k=1,2)$ и правая интегрирующая матрица $R_k = \{I_{k,ij}^*\}_{i,j=1}^{n_k}$. Если в пространстве n_k - мерных векторов ввести скалярное произведение по формуле

$$(x,y)_{kh} = \sum_{i=1}^{n_k} d_{ki} x_i y_i, \quad d_{ki} = \int_0^{l_k} \varphi_k(x_k)\,dx_k,$$

то $(L_k x, y)_{kh} = (x, R_k y)_{kh}$ [1]. Определим аппроксимацию интегральных уравнений (2) в точках коллокации Ω_h, заменяя операторы Вольтерра их аппроксимациями:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{1h}b_{11}\mathrm{I}_{1h}^* - \mathrm{I}_{1h}b_{12}\mathrm{I}_{2h}^* - \mathrm{I}_{2h}b_{21}\mathrm{I}_{1h}^* + \mathrm{I}_{2h}b_{22}\mathrm{I}_{2h}^* & \mathrm{I}_{1h}b_{11} - \mathrm{I}_{2h}b_{21} & \mathrm{I}_{1h}b_{12} - \mathrm{I}_{2h}b_{22} \\ \overline{\mathrm{I}_{1h}}b_{11}\mathrm{I}_{1h}^* - \overline{\mathrm{I}_{1h}}b_{12}\mathrm{I}_{2h}^* & \overline{\mathrm{I}_{1h}}b_{11} & \overline{\mathrm{I}_{1h}}b_{12} \\ \overline{\mathrm{I}_{2h}}b_{21}\mathrm{I}_{1h}^* - \overline{\mathrm{I}_{2h}}b_{22}\mathrm{I}_{2h}^* & \overline{\mathrm{I}_{2h}}b_{21} & \overline{\mathrm{I}_{2h}}b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{1h}b_{11}\mathrm{I}_{1h}^* f - \mathrm{I}_{2h}b_{21}\mathrm{I}_{1h}^* f \\ \overline{\mathrm{I}_{1h}}b_{11}\mathrm{I}_{1h}^* f \\ \overline{\mathrm{I}_{2h}}b_{21}\mathrm{I}_{1h}^* f \end{pmatrix}$$

Эти соотношения представляют систему алгебраических уравнений для определения $N = n_1 n_2 + n_1 + n_2$ неизвестных $\lambda = \{\lambda_{0,ij}, \lambda_{1,j}, \lambda_{2,i}$, $i = 1,\ldots,n_1$, $j = 1,\ldots,n_2\}$. Например, по определению

$$(\mathrm{I}_{1h}b_{11}\mathrm{I}_{1h}^*\lambda_0)(x_{ij}) = \left(\mathrm{I}_1\left[b_{11}(\mathrm{I}_1^*\lambda_{0h})\right]_h\right)(x_{ij}) = \sum_{k,l=1}^{n_1} I_{1,ik} b_{11,kj} I_{1,kl}^* \lambda_{0,lj}.$$

Если на R^N, которому принадлежит решение системы λ, ввести скалярное произведение

$$(\lambda,\mu)_h = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} d_{1,i} d_{2,j} \lambda_{0,ij}\mu_{0,ij} + \sum_{j=1}^{n_2} d_{2,j}\lambda_{1,j}\mu_{1,j} + \sum_{i=1}^{n_1} d_{1,i}\lambda_{2,i}\mu_{2,i},$$

то непосредственными вычислениями проверяется, что матрица системы симметрична.

Метод прост в реализации, обладает хорошей точностью [1], [4], матрица системы алгебраических уравнений превосходно обусловлена. Последнее свойство является обычным для дискретных методов на основе интегральных уравнений и позволяет использовать сильное локальное сгущение узлов сетки. Метод обладает большой общностью, и применим к произвольным краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка // Изв. вузов. Математика. 1996. № 10. С. 13–24.
2. *Паймушин В.Н.* О некоторых численных методах в задачах механики оболочек сложной геометрии // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань, 1990. Вып. 20. С. 10–18.
3. *Степанова Е.М. Петрушенко Ю.Я.* Алгебраический аналог задачи Пуассона на основе интегрирующих матриц, базирующихся на полиномах Лагранжа // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. Всерос. научн. конф-ции, Самара: СамГТУ, 2004. Ч. 1. С. 212.
4. *Петрушенко Ю.Я.* Метод конечных сумм, базирующийся на полиномах Лагранжа, в задачах механики оболочек вращения // Изв.вузов. Авиационная техника, 1993. № 4. С. 70–74.

УДК 536.2

Е. В. Стефанюк, В. П. Радченко

ТЕПЛООБМЕН В ПЛОСКОЙ ТРУБЕ ПРИ ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ СТЕНКИ

Получение аналитических решений задач теплообмена при течении жидкости в трубах и каналах представляет серьезные математические трудности. Точные аналитические решения указанных задач получены лишь для отдельных частных случаев, к тому же при весьма существенных допущениях. В связи с чем разработка приближенных аналитических методов решения таких задач имеет не только научную ценность, но и практическое значение, так как позволяет широко использовать результаты теоретических исследований для инженерных расчетов.

Математическая постановка задачи теплообмена в плоской трубе при граничных условиях первого рода имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2\Theta(y,x)}{\partial y^2} = \left(1-y^2\right)\frac{\partial\Theta(y,x)}{\partial x} \quad (x>0;\quad 0\le y<1); \tag{1}$$

$$\Theta(y,0)=1; \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,x)}{\partial y}=0; \tag{3}$$