

Детерминированные системы

УДК 517.977

© 1998 г. А.И. АСТРОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук,
И.В. ГАЙШУН, академик НАН Беларуси
(Институт математики НАН Беларуси, Минск)

РАВНОМЕРНАЯ И АППРОКСИМАТИВНАЯ НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ¹

Исследовано понятие равномерной наблюдаемости линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяющее в любой момент времени t определять состояние системы $x(t)$ по значениям в этот момент выходного сигнала и его производных. Получены необходимые и достаточные условия равномерной наблюдаемости, описаны классы эквивалентных по отношению к группе линейных преобразований равномерно наблюдаемых систем. Показано, что равномерная наблюдаемость эквивалентна аппроксимативной наблюдаемости, т.е. возможности с помощью δ -последовательностей сколь угодно точно оценить текущее состояние системы без дифференцирования выходной функции.

1. Введение

В классической постановке [1–3] задача полной наблюдаемости, а также близкая к ней задача дифференциальной наблюдаемости [4, 5] линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений формулируются как типичные проблемы существования, требующие наличия взаимно однозначного соответствия между выходными сигналами и порождающими их начальными условиями. Однако при конструировании систем регулирования, как правило, регулятор строится в виде функции текущего состояния системы $x(t)$. Поэтому знание вектора $x(t)$ является необходимой предпосылкой создания эффективных систем регулирования.

Хорошо известно, что если матрица наблюдаемости [2] $S(t)$ невырождена в некоторой точке τ (и стало быть, система полностью наблюдаема), то по значению выходного сигнала и его производных в момент τ алгебраическим путем можно найти вектор $x(\tau)$. Однако определение $x(t)$ в точках t , отличных от τ , приводит к непростой задаче интегрирования нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Ясно, что проблемы интегрирования можно избежать, если потребовать невырожденность матрицы $S(t)$ при всех t . Указанное требование было использовано в [6] как чисто техническое средство, позволяющее строить канонические формы систем управления и систем наблюдения, а в [7] оно было положено в основу определения равномерной наблюдаемости.

В данной работе равномерная наблюдаемость определяется в терминах отображения “состояние $x(t) \rightarrow$ вектор $(y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ ”, где $y(t)$ – выходной сигнал. Установлены точные требования на гладкость параметров системы, обеспечивающие принадлежность выходной функции $y(t)$ классу C^{n-1} , и на основании их сформулированы необходимые и достаточные условия равномерной наблюдаемости.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект № Ф95-078).

Введено понятие аппроксимативной наблюдаемости, позволяющее сколь угодно точно оценить текущее состояние системы, и показано, что оно эквивалентно свойству равномерной наблюдаемости.

Установлено, что множество \mathcal{R} равномерно наблюдаемых систем устойчиво относительно группы линейных преобразований с гладкими коэффициентами. Указаны канонические представители каждой орбиты действия этой группы на \mathcal{R} и, тем самым, дано полное описание множества \mathcal{R} (при некоторых дополнительных предположениях на гладкость параметров систем, входящих в \mathcal{R}).

2. Постановка задачи. Критерий равномерной наблюдаемости

Пусть на отрезке $T = [t_0, t_1]$ задана линейная нестационарная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

у которой $x(t)$ — n -вектор-столбец состояния в момент t , а $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ имеет непрерывные элементы. Предположим, что к системе (1) присоединена выходная функция (выходной сигнал) $y(t)$, связанная с состоянием $x(t)$ формулой

$$(2) \quad y(t) = c(t)x(t), \quad t \in T,$$

где $c(t)$ — n -вектор-строка с непрерывными элементами.

Пусть в системе (1) реализовалось начальное условие $x_0 = x(t_0) \in R^n$, которое породило решение $x(t) = x(t, x_0)$, а значит, согласно (2), и выходной сигнал $y(t) = y(t, x_0)$.

Определение 1. Система (1), (2) называется равномерно наблюдаемой на отрезке T , если при любом $x_0 \in R^n$ функция $y(t) = y(t, x_0)$ принадлежит классу C^{n-1} , т.е. $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема на T , и отображение $x(t) \rightarrow (y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ инъективно для каждого $t \in T$.

Поскольку в определении 1 присутствует требование гладкости функции $y(t)$, прежде всего выясним, при каких условиях $y(t)$ принадлежит классу C^{n-1} . Для этого отождествим любую систему (1), (2) с парой (A, c) , состоящей из матричной функции $A(t)$ и векторной функции $c(t)$, а множество всех таких пар с непрерывными компонентами обозначим Σ . Введем в рассмотрение оператор $L: \Sigma \rightarrow \Sigma$, действующий по правилу $L(A, c) = (A, cA + \dot{c})$. Область определения \mathcal{D} оператора L состоит из таких пар (A, c) , у которых функция $c(t)$ непрерывно дифференцируема. Если компоненты n -вектор-функции $q(t) = c(t)A(t) + \dot{c}(t)$ принадлежат классу C^1 , то на паре (A, c) определен оператор L^2 , для которого $L^2(A, c) = L(A, q)$. По индукции можно определить любую степень L^k оператора L ; обозначим \mathcal{D}_k область определения оператора L^k . Для $k=0$ полагаем $L^0(A, c) = (A, c)$ и $\mathcal{D}_0 = \Sigma$. Каждую систему $(A, c) \in \mathcal{D}_k$ назовем системой класса k .

Отметим, что если компоненты матричной функции $A(t)$ принадлежат классу C^{k-1} , а компоненты векторной функции $c(t)$ принадлежат классу C^k , то $(A, c) \in \mathcal{D}_k$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пусть $k \geq 0$ произвольное целое число.

Теорема 1. Выходная функция $y(t) = y(t, x_0)$ системы класса k принадлежит классу C^k . Если функция $y(t)$ принадлежит классу C^k при любом $x_0 \in R^n$, то $(A, c) \in \mathcal{D}_k$.

Пусть система (A, c) имеет класс $n-1$. Тогда определены векторные функции

$$q_i(t) = q_{i-1}(t)A(t) + \dot{q}_{i-1}(t), \quad q_0(t) = c(t), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Составим $(n \times n)$ -матрицу

$$S(t) = \begin{pmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ \dots \\ q_{n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Если компоненты матрицы $A(t)$ принадлежат классу C^{n-2} , а компоненты вектора $c(t)$ принадлежат классу C^{n-1} , то $S(t)$ представляет собой хорошо известную матрицу наблюдаемости [2, 7]. Это же название для матрицы $S(t)$ мы сохраним и для систем класса $n - 1$.

Теорема 2. Система (1), (2) равномерно наблюдаема на T тогда и только тогда, когда $(A, c) \in \mathcal{D}_{n-1}$ и $\text{rank } S(t) = n$ для любого $t \in T$.

Доказательства теорем 1, 2 содержатся в Приложении.

Замечание. Впервые понятие равномерной наблюдаемости нестационарной линейной системы было сформулировано в работе [7] в терминах матрицы наблюдаемости $S(t)$. Наше определение равномерной наблюдаемости, во-первых, дано в традиционной форме возможности восстановления состояния по выходному сигналу, во-вторых, в нем существенно ослаблено требование гладкости матричной функции $A(t)$ и векторной функции $c(t)$. Однако теорема 2 показывает, что в гладком случае определение 1 и соответствующее определение из [7] описывают одно и то же свойство системы (1), (2).

Свойство равномерной наблюдаемости можно выразить в терминах разрешающих операций [2], если класс таких операций расширить до обобщенных функций или распределений [8, 9].

Пусть δ – дельта-функция Дирака, т.е. обобщенная функция, действующая на непрерывные функции по правилу $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ и $\delta^{(i)}$ – ее i -я производная в смысле теории распределений [9]. Применяя операции $\delta, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(n-1)}$ к выходному сигналу y , легко установить, что $\delta^{(i)}(y) = q_i(t)x(t)$. Поэтому справедливо соотношение

$$(3) \quad S(t)x(t) = \Delta_t(y),$$

где $\Delta_t(y)$ – вектор-столбец с элементами $\delta_t(y), \delta_t^{(1)}(y), \dots, \delta_t^{(n-1)}(y)$ и $\delta_t(\varphi) = \varphi(t)$.

Таким образом, зная результат действия распределений $\delta_t^{(i)}$ на выходную функцию y и считая систему (1), (2) равномерно наблюдаемой, из формулы (3) однозначно восстанавливается вектор $x(t) = S^{-1}(t)\Delta_t(y)$, $t \in T$. Однако формула (3) имеет чисто теоретическое значение, поскольку операция $\delta^{(i)}(y)$ не может быть точно реализована. Тем не менее, используя известные способы аппроксимации дельта-функции и ее производных δ -последовательностями гладких функций [8], можно поставить вопрос об оценке состояния $x(t)$. Исследованию этого вопроса посвящен следующий раздел.

3. Аппроксимативная наблюдаемость в классе δ -последовательностей

Напомним сначала необходимые понятия из теории обобщенных функций, основанной на секвенциальном подходе [8]. Последовательность $(f_m(t))$ непрерывных функций, определенных при $t_0 < t < t_1$, называется фундаментальной, если существуют последовательность функций $(F_m(t))$ и целое число $k \geq 0$, такие, что $F_m^{(k)}(t) = f_m(t)$ и $(F_m(t))$ сходится почти равномерно на $t_0 < t < t_1$, т.е. равномерно на каждом замкнутом отрезке, содержащемся в интервале (t_0, t_1) . Две фундаментальные последовательности $(f_m(t))$ и $(g_m(t))$ считаются эквивалентными, если найдутся последовательности $(F_m(t))$ и $(G_m(t))$ и целое число $k \geq 0$ такие, что

$F_m^{(k)}(t) = f_m(t)$, $G_m^{(k)}(t) = g_m(t)$ и последовательности $(F_m(t))$ и $(G_m(t))$ сходятся почти равномерно на интервале (t_0, t_1) к одной и той же функции. Класс эквивалентных фундаментальных последовательностей есть, по определению, обобщенная функция на (t_0, t_1) (см. [8]).

Пусть (β_m) – последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Любая последовательность $(\delta_m(t))$ бесконечно дифференцируемых функций $\delta_m(t)$, неотрицательных при $|t| < \beta_m$, равных нулю в остальных точках и обладающих свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\tau) d\tau = 1,$$

называется [8] δ -последовательностью. Известно [8], что каждая δ -последовательность фундаментальна и все δ -последовательности эквивалентны. Таким образом, δ -последовательности определяют обобщенную функцию, которая есть не что иное, как рассматриваемая выше дельта-функция Дирака δ [9].

Для любой непрерывной функции $\varphi(t)$, $t \in T$, интеграл

$$\varphi_m(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - \tau) \delta_m(\tau) d\tau$$

есть бесконечно дифференцируемая функция, для которой производные $\varphi_m^{(j)}(t)$ определяются равенством

$$\varphi_m^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - \tau) \delta_m^{(j)}(\tau) d\tau,$$

при этом последовательность $(\varphi_m(t))$ почти равномерно на T сходится к функции $\varphi(t)$, а если $\varphi(t)$ принадлежит классу C^k , то последовательность $(\varphi_m^{(j)}(t))$ почти равномерно на T сходится к $\varphi^{(j)}(t)$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Пусть заданы некоторая δ -последовательность $(\delta_m(t))$ и выходная функция $y(t) = y(t, x_0)$ системы (1), (2). Определим величины

$$(4) \quad y_m^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t - \tau) \delta_m^{(j)}(\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

и составим вектор-столбец $z_m(t)$ с компонентами $y_m(t), y_m^{(1)}(t), \dots, y_m^{(n-1)}(t)$.

Определение 2. Будем говорить, что система (1), (2) аппроксимативно наблюдаема в классе δ -последовательностей, если при любом $x_0 \in R^n$ функция $y(t)$ принадлежит классу C^{n-1} и существует такая непрерывная, не зависящая от x_0 , обратимая при любом $t \in T$ $(n \times n)$ -матрица $M(t)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m_0 = m(x_0, t, \varepsilon)$, обладающий свойством

$$(5) \quad \|x(t, x_0) - M(t)z_m(t)\| < \varepsilon$$

при $m \geq m_0$, где $\|\cdot\|$ – некоторая норма в R^n .

Отметим, что для любого компактного множества $X \subset R^n$ и любого замкнутого отрезка $\Delta \subset (t_0, t_1)$ неравенство (5) выполняется равномерно по $x_0 \in X$, $t \in \Delta$, т.е. величину m_0 , обеспечивающую (5), можно выбрать не зависящей от $x_0 \in X$, $t \in \Delta$.

Определение 2 позволяет по величинам (4) сколь угодно точно оценить состояние $x(t)$, при этом знание производных выходного сигнала не требуется. Операция дифференцирования выходного сигнала $y(t)$ переносится на функции $\delta_m(t)$, которые могут быть выбраны заранее, а значит заранее вычислены и их производные (в отличие от производных выходной функции, которые необходимо определить в процессе наблюдения).

Теорема 3. Система (1), (2) аппроксимативно наблюдаема в классе δ -последовательностей тогда и только тогда, когда она равномерно наблюдаема.

Доказательство этой теоремы приведено в Приложении.

4. Классификация равномерно наблюдаемых систем класса n

Легко убедиться, что свойство равномерной наблюдаемости системы (1), (2) инвариантно относительно замены неизвестной функции

$$(6) \quad x(t) \rightarrow z(t) = G^{-1}(t)x(t),$$

где $G(t)$ невырожденная на T ($n \times n$)-матричная функция класса C^1 . Множество всех преобразований вида (6), очевидно, образует группу, которую обозначим \mathcal{G} . Группа \mathcal{G} действует на множестве Σ по правилу $G * (A, c) = (G^{-1}AG - G^{-1}\dot{G}, cG)$, $G \in \mathcal{G}$.

*Теорема 4. Для любого $k > 0$ множество \mathcal{D}_k инвариантно относительно действия группы \mathcal{G} , т.е. при любых $G \in \mathcal{G}$, $(A, c) \in \mathcal{D}_k$ выполняется включение $G * (A, c) \in \mathcal{D}_k$.*

Пусть Σ/\mathcal{G} множество орбит действия группы \mathcal{G} на Σ , т.е. множество классов эквивалентных систем из Σ по отношению эквивалентности " $(A, c) \sim (A^1, c^1)$ " тогда и только тогда, когда существует такое $G \in \mathcal{G}$, что $G * (A, c) = (A^1, c^1)$ ". Нетрудно заметить, что если две пары (A, c) и (A^1, c^1) из \mathcal{D}_{n-1} принадлежат одной орбите, то их матрицы наблюдаемости $S(t)$ и $S_1(t)$ связаны равенством $S_1(t) = S(t)G(t)$ при некотором $G \in \mathcal{G}$.

Обозначим \mathcal{R} часть множества \mathcal{D}_{n-1} , состоящую из равномерно наблюдаемых систем. Пусть $\mathcal{R}_n = \mathcal{R} \cap \mathcal{D}_n$, т.е. \mathcal{R}_n - множество равномерно наблюдаемых систем класса n . На множестве \mathcal{R}_n определено отображение f , для которого $f(A, c) = q_n S^{-1}$, где $S(t)$ - матрица наблюдаемости пары (A, c) , а векторная функция $q_n(t)$ находится из рекуррентных соотношений $q_0(t) = c(t)$, $q_i(t) = q_{i-1}(t)A(t) + \dot{q}_{i-1}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

*Теорема 5. Отображение f постоянно на любой орбите действия группы \mathcal{G} в \mathcal{R}_n (т.е. $f(G * (A, c)) = f(A, c)$ при $G \in \mathcal{G}$) и принимает различные значения на различных орбитах.*

Доказательства теорем 4 и 5 содержатся в Приложении.

Таким образом, множество $\mathcal{R}_n/\mathcal{G}$ состоит из такого "количества" элементов, сколько значений принимает отображение f на \mathcal{R}_n . Функция $f(A, c)(t)$ зависит лишь от орбиты, на которой расположена пара (A, c) , и поэтому является исчерпывающей характеристикой всей орбиты точки $(A, c) \in \mathcal{R}_n$.

Иной способ характеристики орбит действия группы \mathcal{G} на множестве \mathcal{R}_n заключается в том, чтобы каждой орбите поставить в соответствие некоторый элемент по возможности простой (канонической) структуры. Учитывая хорошо известные результаты для автономных систем [3] и канонические формы неавтономных систем (1), (2) с бесконечно дифференцируемыми матрицами [6], представляется естественным в качестве канонических выбирать пары

$$(7) \quad A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_0(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1(t) \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad c^0(t) = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1).$$

Если $\alpha_0, \alpha_1 \in C$, $\alpha_j \in C^{j-1}$, $j = 2, 3, \dots, n-1$, то система (7) принадлежит классу $n-1$ и ее матрица наблюдаемости $S_0(t)$ имеет вид

$$S_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & s_{2,n}(t) \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_{3,n-1}(t) & s_{3,n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & s_{n-1,n-2}(t) & s_{n-1,n-1}(t) & s_{n-1,n}(t) \\ 1 & s_{n,2}(t) & \dots & s_{n,n-2}(t) & s_{n,n-1}(t) & s_{n,n}(t) \end{pmatrix},$$

где

$$(8) \quad \begin{aligned} s_{i,n+2-i}(t) &= \alpha_{n-1}(t), \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ s_{i,j}(t) &= s_{i-1,j+1}(t) + \dot{s}_{i-1,j}(t), \quad i = 4, 5, \dots, n; \quad j = n+3-i, \dots, n-1, \\ s_{i,n}(t) &= \alpha_{n+1-i}(t) + \sum_{j=n+2-i}^{n-1} \alpha_j(t) s_{i-1,j+1}(t) + \dot{s}_{i-1,n}(t), \quad i = 3, 4, \dots, n. \end{aligned}$$

Отметим, что элементы $s_{i,j}(t)$, $i, j = 2, 3, \dots, n$, матрицы $S_0(t)$ с суммой индексов $i+j = p$ ($p \geq n+2$) зависят только от функций $\alpha_{n-1-j}(t)$, $j = 0, 1, \dots, p-n-2$.

Так как $\det S_0(t) \neq 0$, $t \in T$, то система (A^0, c^0) равномерно наблюдаема. Если, к тому же, функции α_j принадлежат классу C^j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, то она имеет класс n , т.е. $(A^0, c^0) \in \mathcal{R}_n$.

Обозначим $f_j(A, c)$, $j = 1, 2, \dots, n$, компоненты n -вектор-функции $f(A, c)$ и пусть \mathcal{R}_n^0 - подмножество множества \mathcal{R}_n , элементы (A, c) которого обладают свойством: $f_j(A, c) \in C^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Из теоремы 5 следует, что множество \mathcal{R}_n^0 инвариантно относительно действия группы \mathcal{G} .

Пусть \mathcal{K}_n^0 - совокупность всех систем вида (7) с функциями α_j класса C^j , $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Следующая теорема показывает, что множество орбит $\mathcal{R}_n^0/\mathcal{G}$ "параметризуется" системами из \mathcal{K}_n^0 или, что то же самое, функциями $\alpha_j(t)$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Теорема 6. Любая система из \mathcal{K}_n^0 принадлежит \mathcal{R}_n^0 и в каждой орбите $W \in \mathcal{R}_n^0/\mathcal{G}$ существует одна и только одна система (A^0, c^0) вида (7) с $\alpha_j \in C^j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Доказательство теоремы 6 дано в Приложении.

Из теоремы 6 следует, что множество \mathcal{R}_n^0 (т.е. множество равномерно наблюдаемых систем класса n с $f_j(A, c) \in C^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, n$), описывается следующим образом:

$$\mathcal{R}_n^0 = \{(A, c) : (A, c) = G * (A^0, c^0), G \in \mathcal{G}, (A^0, c^0) \in \mathcal{K}_n^0\}.$$

Отметим, что теорема 6 существенно усиливает результаты работы [6] (а также более поздних работ) о приведении к канонической форме (7) равномерно наблюдаемых систем с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами (с коэффициентами $A \in C^{2n-2}$, $c \in C^{2n-1}$).

5. Примеры

1. Пусть $\varphi(t)$ - некоторая непрерывная положительная функция, не имеющая производной ни в одной точке. В качестве $\varphi(t)$ можно взять, например, функцию

Ван дер Вардена [10]: $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 10^{-i} \{10^i t\}$, где $\{a\}$ – расстояние от a до ближайшего целого числа.

Если в (7) положить $n = 3$, $\alpha_0(t) = \varphi(t)$, $\alpha_1(t) = \varphi(t)$, $\alpha_2(t) = g(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$, то получится равномерно наблюдаемая на отрезке $T = [t_0, t_1]$, ($t_0 > 0$) система класса 2, для которой не выполняется требование $A \in C^{n-2}$ (см. [2, 6]).

2. Рассмотрим на отрезке $T = [t_0, t_1]$, ($t_0 > 0$) систему наблюдения второго порядка

$$(9) \quad A(t) = \begin{pmatrix} -2g(t) - 3\psi(t)\varphi(t) & -g(t) - \varphi(t)\psi(t) \\ 4g(t) + 2\varphi(t)\psi(t) & 2g(t) \end{pmatrix}, \quad c(t) = (g(t), g(t)),$$

где функции $\varphi(t)$, $g(t)$ определены в примере 1, а $\psi(t) = 1/g(t)$. Легко проверить, что система (9) является равномерно наблюдаемой системой класса 2, у которой $f(A, c)(t) = (0, 0)$. Следовательно она принадлежит множеству \mathcal{R}_2^0 и для нее функции $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_1(t) = 0$ определяют каноническую форму (7).

Следующие три примера показывают, что во множестве $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_n^0$ существуют системы, не приводящиеся группой \mathcal{G} ни к одной из систем вида (7), и существуют системы, в орбитах которых содержатся пары (7), но уже не принадлежащие классу \mathcal{K}_n^0 .

3. Пусть на отрезке T задана система наблюдения

$$(10) \quad A(t) = \begin{pmatrix} g(t) & \varphi(t)\psi(t) \\ \varphi(t)\psi(t) & 2g(t) \end{pmatrix}, \quad c(t) = (g(t), -g(t)),$$

где функции $\varphi(t)$, $g(t)$, $\psi(t)$ определены в примерах 1, 2. Система (10) равномерно наблюдаема и имеет класс 2, т.е. $(A, c) \in \mathcal{R}_2$, однако функция $f_2(A, c)(t) = 3g(t) + 3\varphi(t)\psi(t)$ не является непрерывно дифференцируемой и поэтому $(A, c) \notin \mathcal{R}_2^0$.

Покажем, что в орбите пары (A, c) нет канонической системы (7). Действительно система

$$(11) \quad A^0(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0(t) \\ 1 & \alpha_1(t) \end{pmatrix}, \quad c^0(t) = (0, 1)$$

принадлежит \mathcal{R}_2 тогда и только тогда, когда $\alpha_0 \in C$, $\alpha_1 \in C^1$. Поскольку $f(A^0, c^0)(t) = (\alpha_0(t) + \dot{\alpha}_1(t), \alpha_1(t))$, то ни при каком $\alpha_1 \in C^1$ невозможно равенство $f_2(A, c)(t) = f_2(A^0, c^0)(t)$. По теореме 5 системы (10) и (11) не могут находиться в одной и той же орбите.

4. Пусть $n = 2$, $\varphi(t)$ – функция из примера 1 и

$$(12) \quad A(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & 1 \\ 2\varphi(t) & \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad c(t) = (1, 0).$$

Пара (12) равномерно наблюдаема и не принадлежит множеству $\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_2$. Покажем, что для нее нет канонической формы (7). Предположим, что такая форма существует. Тогда найдется невырожденная (2×2) -матрица $G(t)$ класса C^1 , удовлетворяющая равенствам

$$G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_0(t) \\ 1 & \alpha_1(t) \end{pmatrix}, \quad (0, 1) = (1, 0)G(t);$$

для некоторых непрерывных функций $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$. Из этих равенств легко следует, что

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varphi(t) \end{pmatrix},$$

а это противоречит предположению $G \in C^1$.

Таким образом для системы (12) не существует канонической формы (7).

5. Рассмотрим систему наблюдения

$$A(t) = \begin{pmatrix} \psi^3(t) - 3\psi(t)\varphi(t) - 2g(t) - \varphi(t) & \psi^3(t) - \varphi(t)\psi(t) - g(t) - \varphi(t) \\ -\psi^3(t) + 2\varphi(t)\psi(t) + 4g(t) + 2\varphi(t) & -\psi^3(t) + 2g(t) + 2\varphi(t) \end{pmatrix},$$

$$c(t) = (g(t), g(t)),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $g(t)$ — функции из примера 2. Легко проверить, что эта система равномерно наблюдаема, принадлежит классу 1 и не принадлежит классу 2. Тем не менее, матрица

$$G(t) = \begin{pmatrix} \psi^2(t) & -\psi(t) \\ -\psi^2(t) & 2\psi(t) \end{pmatrix}$$

преобразует ее к канонической форме (7) с $\alpha_0(t) = \psi^2(t)$, $\alpha_1(t) = \varphi(t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Считаем $k > 0$, так как случай $k = 0$ тривиален. Пусть $(A, c) \in \mathcal{D}_k$ и $y(t, x_0) = c(t)x(t)$. Так как функции $c(t)$ и $x(t)$ непрерывно дифференцируемы, то первая производная $\dot{y}(t, x_0)$ существует и непрерывна на T , причем $\dot{y}(t, x_0) = (c(t)A(t) + \dot{c}(t))x(t) = q_1(t)x(t)$. Используя вид оператора L^k , нетрудно показать, что $y^{(k)}(t, x_0) = q_k(t)x(t)$. Поскольку функции $q_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ непрерывно дифференцируемы, а функция $q_k(t)$ непрерывна, то функция $y(t, x_0)$ k раз непрерывно дифференцируема. Первая часть теоремы доказана.

Пусть выходная функция $y(t, x_0)$ k раз непрерывно дифференцируема при любом $x_0 \in R^n$. Обозначим $F(t)$ фундаментальную матрицу системы (1): $\dot{F}(t) = A(t)F(t)$, $F(t_0) = E$, где E — единичная $(n \times n)$ -матрица. Докажем, что i -я компонента $c_i(t)$ вектора $c(t)$ дифференцируема в точке $\tau \in [t_0, t_1]$ (при $\tau = t_0$ или $\tau = t_1$ производные понимаются как односторонние). Выберем начальное состояние $x_0^* = x^*(t_0) \in R^n$ таким образом, чтобы n -вектор $x(\tau) = F(\tau)x_0^*$ имел компоненты $x_j(\tau) = 0$ при $j \neq i$ и $x_i(\tau) = 1$. Для достаточно малых ε имеем

$$\begin{aligned} (y(\tau + \varepsilon, x_0^*) - y(\tau, x_0^*))\varepsilon^{-1} &= \varepsilon^{-1}(c(\tau + \varepsilon)F(\tau + \varepsilon) - c(\tau)F(\tau))x_0^* = \\ &= \varepsilon^{-1}(c(\tau + \varepsilon)(F(\tau)x_0^* + \dot{F}(\tau)x_0^*\varepsilon + o(\varepsilon)) - c_i(\tau)) = \\ &= (c_i(\tau + \varepsilon) - c_i(\tau))\varepsilon^{-1} + c(\tau + \varepsilon)\dot{F}(\tau)x_0^* + \varepsilon^{-1}o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Так как предел в левой части при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует, то функция $c_i(t)$ дифференцируема в точке τ . В силу произвольности i $(A, c) \in \mathcal{D}$. Поскольку $\dot{y}(t, x_0) = (c(t)A(t) + \dot{c}(t))x(t) = q_1(t)x(t)$, то по описанной выше схеме доказываем, что n -вектор-функция $q_1(t)$ непрерывно дифференцируема. Методом математической индукции несложно показать, что $y^{(k)}(t, x_0) = q_k(t)x(t)$, $q_k(t) = q_{k-1}(t)A(t) + \dot{q}_{k-1}(t)$. Из того, что выходная функция $y(t)$ принадлежит классу C^k при любом $x_0 \in R^n$ следует, что n -вектор-функция q_k непрерывна. Таким образом $(A, c) \in \mathcal{D}_k$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть система (1), (2) равномерно наблюдаема на T . Это означает, в частности, что функция $y(t, x_0)$ $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема для любого $x_0 \in R^n$ и поэтому по теореме 1 $(A, c) \in \mathcal{D}_{n-1}$. Следовательно, определена матрица наблюдаемости $S(t)$. Из доказательства теоремы 1 вытекает равенство

$$(П.1) \quad Y(t, x_0) = S(t)x(t), \quad t \in T,$$

где $Y(t, x_0)$ – вектор-столбец с компонентами $y(t, x_0), y^{(1)}(t, x_0), \dots, y^{(n-1)}(t, x_0)$. Поскольку отображение $x(t) \rightarrow Y(t, x_0)$ инъективно, то $\text{rank } S(t) = n$ для любого $t \in T$. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности следует из (П.1) и теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Достаточность. Пусть система (1), (2) равномерно наблюдаема. Из теорем 1 и 2 следует, что выходная функция $y(t, x_0)$ $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема при любом $x_0 \in R^n$, существует матрица наблюдаемости $S(t)$ и $\text{rank } S(t) = n$ при $t \in T$. Для произвольно заданной δ -последовательности при каждом $j = 0, 1, \dots, n-1$, последовательность $(y_m^{(j)}(t))$, построенная по формуле (4), почти равномерно на T сходится к $y^{(j)}(t, x_0)$.

Взяв в качестве $M(t)$ матрицу $S^{-1}(t)$, получим

$$\|x(t, x_0) - S^{-1}(t)z_m(t)\| \leq \|S^{-1}(t)\| \|Y(t, x_0) - z_m(t)\|, \quad t \in T.$$

Пусть $b = \max_{t \in T} \|S^{-1}(t)\|$ и $w_m(x_0) = \max_{t \in T} \|Y(t, x_0) - z_m(t)\|$. Тогда

$$\|x(t, x_0) - S^{-1}(t)z_m(t)\| \leq bw_m(x_0).$$

В силу почти равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $m_0 = m_0(x_0, \varepsilon, b)$, что $w_{m_0}(x_0) \leq \varepsilon/b$. Следовательно, для всех $m \geq m_0$ имеем

$$\|x(t, x_0) - M(t)z_m(t)\| < \varepsilon.$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть система (1), (2) аппроксимативно наблюдаема, т.е. существует невырожденная $(n \times n)$ -матрица $M(t)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $m_0 = m_0(x_0, \varepsilon, M)$, обеспечивающий неравенство

$$(П.2) \quad \|x(t, x_0) - M(t)z_m(t)\| < \varepsilon$$

при всех $m > m_0$. Так как неравенство (П.2) выполняется равномерно по t из любого замкнутого отрезка $\Delta \subset (t_0, t_1)$, то последовательность n -вектор-функций $(z_m(t))$ почти равномерно на T сходится к n -вектор-функции $M^{-1}(t)x(t, x_0)$. Значит в силу единственности предела $M^{-1}(t)x(t, x_0) = Y(t, x_0)$. Поскольку, с другой стороны, $Y(t, x_0) = S(t)x(t, x_0)$, то $M^{-1}(t) = S(t)$ и $\det S(t) \neq 0, t \in T$. Следовательно, система (1), (2) равномерно наблюдаема. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть система $(A, c) \in \mathcal{D}_k$, т.е. для нее определены непрерывно дифференцируемые n -вектор-функции $q_i(t), i = 0, \dots, k-1$, и непрерывная n -вектор-функция $q_k(t), t \in T$. Пусть $G \in \mathcal{G}$ и $(A^1, c^1) = G*(A, c)$. Очевидно $c^1 \in C^1$, поэтому имеет смысл выражение $c^1(t)A^1(t) + \dot{c}^1(t) = q_1^1(t)$. Значит на паре (A^1, c^1) определен оператор L . Так как q_1 и G непрерывно дифференцируемы, то непрерывно дифференцируема и вектор-функция $q_1^1 = q_1G$ и, следовательно, на (A^1, c^1) определен оператор L^2 . Продолжая этот процесс и учитывая непрерывность функции $q_k(t)$, за конечное число шагов получим требуемое включение $(A^1, c^1) \in \mathcal{D}_k$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Пусть $C(T, R^n)$ – множество непрерывных n -вектор-функций на T со значениями в R^n . Покажем, что отображение $f = q_n S^{-1} : R_n \rightarrow C(T, R^n)$ инвариантно относительно действия группы \mathcal{G} , т.е. постоянно на любой орбите действия группы \mathcal{G} в R_n .

Пусть G – произвольный элемент из \mathcal{G} и $G*(A, c) = (A^1, c^1)$. Обозначим $S(t)$ и $S_1(t)$ – матрицы наблюдаемости для систем (A, c) и (A^1, c^1) , соответственно. Так

как $(A, c) \in \mathcal{D}_n$, то для нее определена n -вектор-функция $q_n(t)$ и, следовательно, определена n -вектор-функция $q_n^1(t) = q_n(t)G(t)$ для системы (A^1, c^1) . Имеем $q_n^1(t)S_1^{-1}(t) = q_n(t)G(t)G^{-1}(t)S^{-1}(t) = q_n(t)S^{-1}(t)$, т.е. рассматриваемое отображение f постоянно на любой орбите действия группы \mathcal{G} в \mathcal{R}_n .

Докажем, что отображение f принимает различные значения на различных орбитах. Для этого покажем, что если для двух равномерно наблюдаемых систем (A, c) и (A^1, c^1) класса n $f(A, c) = f(A^1, c^1)$, то эти системы принадлежат одной и той же орбите. В самом деле, нетрудно заметить, что справедливо равенство

$$[S_1(t)A^1(t) + \dot{S}_1(t)]S_1^{-1}(t) = [S(t)A(t) + \dot{S}(t)]S^{-1}(t).$$

Поэтому

$$A^1(t) = S_1^{-1}(t)S(t)A(t)S^{-1}(t)S_1(t) + S_1^{-1}(t)\dot{S}(t)S^{-1}(t)S_1(t) - S_1^{-1}(t)\dot{S}_1(t).$$

Положим $G(t) = S^{-1}(t)S_1(t)$. Тогда

$$A^1(t) = G^{-1}(t)A(t)G(t) - G^{-1}(t)\dot{G}(t), \quad c^1(t) = c(t)G(t).$$

Так как система (A, c) класса n , то матрица $G(t)$ непрерывно дифференцируема.

Таким образом показано, что с помощью невырожденной матрицы $G(t) = S^{-1}(t) \times S_1(t)$, элементы которой непрерывно дифференцируемы, пара (A, c) преобразуется в пару (A^1, c^1) , т.е. рассматриваемые системы принадлежат одной орбите. Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Включение $\mathcal{K}_n^0 \subset \mathcal{R}_n^0$ следует из (7), (8). Покажем, что в каждой орбите W существует одна и только одна система (7). Пусть система (A, c) класса n равномерно наблюдаема, т.е. пусть $(A, c) \in \mathcal{D}_n$ и $\text{rank } S(t) = n$, $t \in T$. Тогда определена функция $f(A, c)(t) = q_n(t)S^{-1}(t)$, $t \in T$. Для доказательства теоремы требуется построить такую систему (A^0, c^0) вида (7), для которой $f(A^0, c^0) = f(A, c)$ или $q_n^0(t) = h(t)S_0(t)$, где n -вектор-строка $h(t) = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)) = q_n(t)S^{-1}(t)$, $S_0(t)$ — матрица наблюдаемости системы (A^0, c^0) , $q_n^0(t) = q_{n-1}^0(t)A^0(t) + \dot{q}_{n-1}^0(t)$, а $q_{n-1}^0(t)$ — последняя строка матрицы $S_0(t)$. Для нахождения вектор-функции $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, которая задает искомую систему (A^0, c^0) , составим уравнения. Для этого, используя формулы (8), вычислим $q_n^0(t)$. Имеем $q_n^0(t) = (s_{n+1,1}(t), s_{n+1,2}(t), \dots, s_{n+1,n-1}(t), s_{n+1,n}(t))$, где

$$s_{n+1,1}(t) = \alpha_{n-1}(t), \quad s_{n+1,j}(t) = s_{n,j+1}(t) + \dot{s}_{n,j}(t), \quad j = 2, \dots, n-1,$$

$$s_{n+1,n}(t) = \alpha_0(t) + \sum_{j=2}^n s_{n,j}(t)\alpha_{j-1}(t) + \dot{s}_{n,n}(t).$$

Учитывая вид матрицы $S_0(t)$, легко проверить, что компоненты $g_i(t)$ n -вектор-функции $h(t)S_0(t)$ имеют вид:

$$g_1(t) = h_n(t), \quad g_2(t) = h_{n-1}(t) + h_n(t)s_{n,2}(t), \dots,$$

$$g_k(t) = h_{n-k+1}(t) + \sum_{i=2}^k h_{n-k+i}(t)s_{n-k+i,k}(t), \dots,$$

$$g_n(t) = h_1(t) + \sum_{i=2}^n h_i(t)s_{i,n}(t).$$

Значит функции $\alpha_j(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$s_{n+1,1}(t) = h_n(t),$$

$$(П.3) \quad s_{n,3}(t) + \dot{s}_{n,2}(t) = h_{n-1}(t) + h_n(t)s_{n,2}(t), \dots,$$

$$\alpha_0(t) + \sum_{j=2}^n s_{n,j}(t)\alpha_{j-1}(t) + \dot{s}_{n,n}(t) = h_1(t) + \sum_{i=2}^n h_i(t)s_{i,n}(t).$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $\alpha_{n-1}(t) = h_n(t)$ и $\alpha_{n-1} \in C^{n-1}$.

Так как элементы $s_{n,3}(t)$, $s_{n,2}(t)$ матрицы $S_0(t)$ зависят только от функций $\alpha_{n-1}(t)$, $\alpha_{n-2}(t)$, то второе уравнение системы (П.3) содержит только одну неизвестную функцию $\alpha_{n-2}(t)$. После несложных преобразований имеем $\alpha_{n-2}(t) = h_{n-1} - (n-1)h_n(t)$. Значит $\alpha_{n-2} \in C^{n-2}$.

Применим далее метод математической индукции. Пусть функции

$$(П.4) \quad \alpha_{n-1} \in C^{n-1}, \alpha_{n-2} \in C^{n-2}, \dots, \alpha_{n-j+1} \in C^{n-j+1}$$

определены из первых $j-1$ уравнений. Простой анализ показывает, что j -е уравнение системы (П.3) содержит, помимо функций (П.4), лишь функцию $\alpha_{n-j}(t)$, причем $\alpha_{n-j}(t)$ выражается через функции $h_k^{(i)}(t)$, $k = n, n-1, \dots, n-j+1$, $i = 0, 1, \dots, k-n+j-1$, только с помощью операций сложения и умножения. Поскольку $h_k \in C^{k-1}$, $k = n, n-1, \dots, n-j+1$, то $\alpha_{n-j} \in C^{n-j}$. Теорема 6 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р. Об общей теории систем управления // Труды I конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521-547.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
3. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
4. Weiss L. The concepts of differential controllability and differential observability // J. Math. Anal. Appl. 1965. № 10. P. 442-449.
5. Kreindler E., Sarachik P.E. On the concepts of controllability and observability of linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 1964. V. AC-9. № 1. P. 129-136.
6. Silverman L.M. Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form // IEEE Trans. Autom. Control. 1966. V. AC-11. № 2. P. 300-303.
7. Silverman L.M., Meadows H. Controllability and observability in time-variable linear systems // SIAM J. Control. 1967. V. 5. № 1. P. 64-73.
8. Антосик П., Мухомусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. М.: Мир, 1976.
9. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976.
10. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

Поступила в редакцию 12.11.96