ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1980 МАТЕМАТИКА № 10 (222)

М. К. Коршунов УДК 517.982

ОБ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ И ЛЕЙБНИЦЕВЫХ АЛГЕБРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

В настоящее время известно большое число работ, посвященных определению произведений распределений. Обзор некоторых из них дан в [1] и [2]. Во многих случаях (см. [2] — [5]) используются предположения о согласуемости произведения с различными аксиомами. Например, требуется ассоциативность, согласуемость с различными группами преобразований, лейбницевость. Представляется интересным изучить, какие ограничения накладывают наиболее употребительные аксиомы на произведение распределений, не налагая кроме этих ограничений никаких других условий.

Данная работа преставляет собой продолжение работы [6]. Напомним некоторые определения.

Определение 1. Пусть E — линейное подпространство пространства распределений Л. Шварца $D'(R)$. Произведением на E будем называть функцию $\mu: E\times E\to E$, определяющую на E структуру мультипликативного группоида (см. [7]), связанную законами дистрибутивности со сложением.

В работе [6] были описаны все произведения на $E=\operatorname{span}\{\delta^{(k-1)}(x),\ Px^{-n};\ k,\ n\in N\}$ (здесь и далее span обозначает линейную оболочку, т. е. множество конечных линейных комбинаций), удовлетворяющие следующим аксиомам.

А1 (*локализация*). Пусть Ω — открытое множество из R. Если $f|_\Omega=f'$, $g|_\Omega=g'$, f', g' — регулярные распределения и $\mu(f,g)=h$, то $f'g'=h|_\Omega$, где произведение понимается в обычном смысле.

А2 (*однородность*). Произведение двух однородных распределений является однородным распределением, степень однородности которого является суммой степеней однородности слагаемых.

А3 (*ассоциативность*). Произведение распределений ассоциативно, т. е. $\forall f,\ g,\ h\in E\ \ \mu(\mu(f,g),h)=\mu(f,\mu(g,h))$.

А4 (*лейбницевость*). Для любых $f,\ g\in E$ справедлива формула

$$D\mu(f,g)=\mu(Df,g)+\mu(f,Dg).$$

Данная работа посвящена присоединению к полученным в [6] кольцам распределений x, $\varepsilon(x)=\operatorname{sgn}x$ и $\ln|x|$. При этом, для того чтобы задача имела решение, А3 приходится заменять на

А3′ (*альтернативность*). Любое подкольцо кольца E, порожденное двумя элементами, удовлетворяет А3.

Легко видеть, что $E=\operatorname{span}\{\delta^{(k-1)}(x),\ Px^{-n};\ k,\ n\in N\}$ порождено распределениями $\delta(x)$ и Px^{-1}, т. е. все произведения, описанные в [6], удовлетворяют аксиомам А1, А2, А3′, А4.

Далее мы везде будем писать fg вместо $\mu(f,g)$ для сокращения записи. В §§ 1 и 2 нами будет доказано, что для любого произведения на $\widetilde{E}=\operatorname{span}\{\delta^{(k-1)}(x),\ Px^{-n},\ x^m,\ \ln^q(x),\ \varepsilon(x);\ q,\ k,\ n,\ m\in N\}$, удовлетворяющего А1, А2, А3, А4, справедливы формулы $\delta^{(n)}\delta^{(m)}\equiv 0$, $Px^{-n}Px^{-m}=Px^{-n-m}$ $(n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. Исходя из аксиом, вычислим в § 3 те произведения распределений из $\operatorname{span}\{\delta^{(k-1)}(x),\ Px^{-n},\ x^m,\ \varepsilon;\ k,\ n,\ m\in N\}$, которые не были вычислены в [6]. В § 4 мы вычислим произведения, содержащие $\ln|x|$.

1.1. *Произведения вида* $\varepsilon\delta^{(n)}$. Рассмотрим подкольцо $\widetilde{E}$, порожденное δ и ε. Из А1 и А2 следует, что

$$\varepsilon^2=1, \qquad (1) \qquad\qquad \varepsilon\delta=c\delta,\ \delta\varepsilon=d\delta, \qquad (2)$$

где c, d — некоторые постоянные. Дифференцируя (1) и применяя А4, получим

$$c = -d. \tag{3}$$

С другой стороны, из $A3$ следует $\delta = \varepsilon^2\delta = \varepsilon(\varepsilon\delta) = \delta\varepsilon^2 = (\delta\varepsilon)\varepsilon$, откуда $c^2 = d^2 = 1$. Для определенности положим

$$c = -d = 1 \text{ (соответственно } = -1). \tag{4}$$

Далее из A3 имеем $(\delta\varepsilon)\delta = \delta(\varepsilon\delta)$, откуда с учетом (4) получим, что

$$\delta^2(x) = 0. \tag{5}$$

В [6] показано, что в этом случае для любого произведения на E

$$\delta^{(n)}(x)\delta^{(m)}(x) = 0. \tag{6}$$

Дифференцируя (2), с учетом (4) и (6) получим

$$\varepsilon\delta^{(n)}(x) = -\delta^{(n)}(x)\varepsilon = \delta^{(n)}(x) \text{ (соответственно } = -\delta^{(n)}(x)). \tag{7}$$

Непосредственно проверяется, что произведение, определяемое на span $\{\delta^{(n-1)}(x), \varepsilon;\ n \in N\}$ формулами (1), (6), (7), будет удовлетворять аксиомам A1 — A4.

2.1. *Произведения вида* $x^m\delta^{(n)}(x)$. Рассмотрим подкольца $\widetilde{E}$, порожденные x и $\delta^{(k)}(x)$. A1 и A2 влекут $x\delta = 0$. Дифференцируя это равенство n раз и применяя A4, получим

$$x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Отсюда и из A3 имеем $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$x^m\delta^{(n)}(x) = x(x \ldots (x\delta^{(n)}) \ldots) = \begin{cases} (-1)^m \dfrac{n!}{(n-m)!}\delta^{(n-m)}(x), & n > m; \\ 0, & n \leqslant m. \end{cases} \tag{9}$$

2.2. *Произведения вида* $x^m\varepsilon$. Из A1 и A2 следует, что $x^m\varepsilon = \varepsilon x^m$ и совпадает с поточечным произведением x^m и ε как локально интегрируемых функций.

2.3. *Произведения вида* x^mPx^{-n}. Из A1 и A2 следует, что $xPx^{-1} = 1$. Дифференцируя это равенство n раз, с применением A4 получим $xPx^{-n} = Px^{-n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда из A3 имеем $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$

$$x^mPx^{-n} = x(x \ldots (xPx^{-n}) \ldots) = \begin{cases} Px^{-n+m} & (m < n); \\ x^{+m-n} & (m \geqslant n). \end{cases} \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что произведения вида $x^m\delta^{(n)}$ и x^mPx^{-n} однозначно определяются из аксиом A1 и A2, A3, A4 без использования каких-либо других предположений.

2.4. $Px^{-n}Px^{-m} = Px^{-n-m}$. Рассмотрим подкольцо $\widetilde{E}$, порожденное x и Px^{-1}. Из A1 и A2 следует

$$Px^{-1}Px^{-1} = Px^{-2} + d\delta'(x), \tag{11}$$

где d — некоторая постоянная. Из A3 и (9), (11) имеем

$$Px^{-1} = (xPx^{-1})Px^{-1} = x(Px^{-2} + d\delta') = Px^{-1} - d\delta.$$

Следовательно, $d = 0$. В этом случае согласно результатам [6] для любого произведения на E, удовлетворяющего A1 — A4, имеем $Px^{-n}Px^{-m} = Px^{-n-m}$.

Утверждение 1. *Не существует произведения на* $\widetilde{E}$, *удовлетворяющего* A1, A2, A3′, A4, *для которого бы подкольцо, порожденное распределениями* x, δ *и* Px^{-1}, *было ассоциативным.*

Доказательство. Справедливость утверждения показывает пример Л. Шварца [8]: $\delta = (Px^{-1}x)\delta \neq Px^{-1}(x\delta) = 0$. Заметим, что мы не требовали согласуемости с умножением на мультипликаторы.

3.1. *Произведения вида* $\delta^{(n)}(x)Px^{-m}$. Рассмотрим подкольцо E кольца $\widetilde{E}$, порожденное распределениями $\delta(x)$ и Px^{-1}. Все возможные произведения на E,

удовлетворяющие A1 — A4, были описаны в [6]. Принимая во внимание (6) и (11), получим из результатов [6], что для остальных произведений возможны два случая:

$$\text{(а)}\ Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=\delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=(-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x)$$

$$(n,\ m=1,\ 2,\ldots),$$

$$\text{(б)}\ Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=(-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),\ \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=0 \tag{12}$$

$$(n,\ m=1,\ 2,\ldots)$$

$$\text{(соответственно}\ \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=(-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),\ Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=0$$

$$(n,\ m=1,\ 2,\ldots)),$$

где b — произвольная постоянная $\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$

3.2. *Произведения вида* εPx^{-n}. Рассмотрим подкольцо кольца $\tilde{E}$, порожденное ε и Px^{-1}. Под произведениями εPx^{-n} и $Px^{-n}\varepsilon$ будем понимать некоторые регуляризации функций εx^{-n} и $x^{-n}\varepsilon$, определенные поточечно в $R-\{0\}$. Из A1 и A2 имеем

$$Px^{-1}\varepsilon=\varepsilon Px^{-1}+c\delta(x). \tag{13}$$

Рассмотрим случай (а). Дифференцируя (13) n раз и применяя A4, получим

$$Px^{-n-1}\varepsilon=\varepsilon Px^{-n-1}+\frac{(-1)^n c}{n!}\delta^{(n)}(x)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

С другой стороны, из A3 имеем

$$\varepsilon Px^{-2}-\frac{c}{b}\delta'(x)=(Px^{-1}\varepsilon)Px^{-1}=Px^{-1}(\varepsilon Px^{-1})=\varepsilon Px^{-2}-c\delta'(x)+\frac{c}{b}\delta'(x),$$

откуда $(2/b-1)c=0$. Следовательно, либо $b=2$ и c — произвольное число, либо $c=0$, а b — произвольное число ($b\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$).

В случае (б) из A1 и A2 следует, что

$$Px^{-n-1}\varepsilon=\varepsilon Px^{-n-1}+c_n\delta^{(n)}(x)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{14}$$

где c_n — некоторые постоянные. Из A3 имеем $\varepsilon Px^{-n-m-2}+c_n\delta^{(n)}(x)Px^{-m-1}=(Px^{-n-1}\varepsilon)Px^{-m-1}=Px^{-n-1}(\varepsilon Px^{-m-1})=\varepsilon Px^{-n-m-2}+c_{n+m+1}\delta^{(n+m+1)}(x)$ $(n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$, откуда

$$c_{n+m+1}=c_n(-1)^{m+1}\prod_{k=n+1}^{n+m+1}\frac{1}{b+k-1}\ (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$$

или

$$c_{n+m+1}\prod_{k=1}^{n+m+1}(b+k-1)=(-1)^{m+1}c_n\prod_{k=1}^{n}(b+k-1). \tag{15}$$

Общим решением (15) будет

$$c_n=(-1)^n a\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{b+k-1}, \tag{16}$$

где a — некоторая постоянная. Далее из (12), (14) и (16) следует, что $Px^{-n-1}\varepsilon-\varepsilon Px^{-n-1}=aPx^{-n}\delta(x)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$. Дифференцируя эти равенства

с применением А4 и приравнивая подобные, получим уравнение, связывающее a и $b: a(b-1) = -2$. Вместе с (14) и (16) это влечет

$$Px^{-n-1}\varepsilon = \varepsilon Px^{-n-1} + (-1)^{n-1}2\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n)}(x). \tag{17}$$

3.3. *Выводы.* Пусть $\mathfrak{S}'$ — множество всех произведений на span $\{\delta^{(k-1)}(x), Px^{-n}\ x^m, \varepsilon(x);\ k, n, m \in N\}$, удовлетворяющих аксиомам А1, А2, А3, А4. Для любого произведения из $\mathfrak{S}'$

$$\delta^{(n)}(x)\delta^{(m)}(x) = 0,\ \varepsilon^2 = 1,$$

$$\varepsilon\delta^{(n)}(x) = -\delta^{(n)}(x)\varepsilon = \delta^{(n)}(x)\,(= -\delta^{(n)}(x)),$$

$$Px^{-n}Px^{-m} = Px^{-n-m},$$

$$x^n x^m = x^{n+m},\ x^n\varepsilon = \varepsilon x^n,$$

$$x^m\delta^{(n)}(x) = \begin{cases}(-1)^m\dfrac{n!}{(n-m)!}\delta^{(n-m)}(x), & n > m;\\ 0, & n \leqslant m,\end{cases}$$

$$x^m Px^{-n} = \begin{cases}Px^{-n+m}, & n > m;\\ x^{m-n}, & n \leqslant m\,(n,\ m = 1,\ 2, \ldots).\end{cases}$$

Результаты перемножения распределений $\delta^{(n)}(x)$ и Px^{-m}, Px^{-m} и $\varepsilon(x)$ $(n,\ m-1 = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$ зависят от выбора произведений из $\mathfrak{S}'$. Возможны три случая:

(а) $$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x) = \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m} = (-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),$$

$$Px^{-m}\varepsilon = \varepsilon Px^{-m}\ (n,\ m = 1,\ 2, \ldots),$$

где b — произвольная постоянная $(b \neq 0,\ -1,\ -2, \ldots)$, задание которой определяет некоторое произведение из $\mathfrak{S}'$;

(б) $$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x) = \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m} = (-1)^m\frac{n!}{(n+m)!}\delta^{(n+m-1)}(x),$$

$$Px^{-m}\varepsilon = \varepsilon Px^{-m} + \frac{(-1)^{m-1}c}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x)\ (m,\ n = 1,\ 2, \ldots),$$

где c — произвольная постоянная, задание которой определяет некоторое произведение из $\mathfrak{S}'$. Сужение этих произведений на span $\{\delta^{(n-1)}(x), Px^{-n}, n \in N\}$ совпадает с сужением на это же пространство произведения, введенного в [3];

(в) $$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x) = (-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),\ \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m} = 0$$

$$\Big(\text{соответственно}\ \ \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m} = (-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),$$

$$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x) = 0\Big),$$

$$Px^{-m}\varepsilon = \varepsilon Px^{-m} + (-1)^m 2\prod_{k=0}^{m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(m-1)}(x)\ (n,\ m = 1,\ 2, \ldots)$$

$$\left(\text{соответственно } Px^{-m}\varepsilon = \varepsilon Px^{-m} - (-1)^m 2 \prod_{k=0}^{m-1} \frac{1}{b+k-1} \delta^{(m-1)}(x)\right),$$

где b — произвольная постоянная ($b \neq 1, 0, -1, -2, \ldots$), задание которой определяет некоторое произведение из $\mathfrak{S}'$. Выполнение всех аксиом проверяется непосредственно.

Дополнение 1. *О выборе регуляризации для произведения* εPx^{-1}. Регуляризацией произведения εPx^{-1} будем называть распределение, сужение которого на $R - \{0\}$ совпадает с произведением ε и x^{-1}, как локально интегрируемых в $R - \{0\}$ функций. Легко видеть, что любые две регуляризации отличаются только на распределение с носителем в точке. Регуляризация для εPx^{-m} получается из регуляризации для εPx^{-1} дифференцированием с применением А4. Рассмотрим регуляризацию (см. [9], [10]):

$$\varepsilon Px^{-1} = |x|^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\ln z + \ln(-z)}{z}\right].$$

Она не согласуется с действием группы преобразований растяжения R на поточечное произведение обычных функций. В самом деле, $\frac{1}{t}\varepsilon(x)Px^{-1} = P(tx)^{-1}\varepsilon(tx) \neq |tx|^{-1} = \frac{1}{t}|x|^{-1} - \frac{2\ln t}{t}\delta(x)$. Легко видеть, что это рассогласование не может быть скомпенсировано вычитанием распределений (и даже гиперфункций) с носителями в нуле, т. е. оно имеет место для всех регуляризаций. Следовательно, при замене переменных может произойти переход от одной регуляризации к другой. Аналогично обстоит дело с произведением $\delta(x)\ln|x|$.

4.1. *Произведения вида* $\delta^{(n)}(x)\ln|x|$, $\varepsilon(x)\ln|x|$. Из А1 и А2 $\delta(x)\ln|x| = a\delta(x)$, $\ln|x|\delta(x) = d\delta(x)$, где a и d — произвольные постоянные. Дифференцируя эти соотношения $n+1$ раз, получим с учетом А4

$$\delta^{(n+1)}(x)\ln|x| = \left(a + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n+1)}(x), \tag{18}$$

$$\ln|x|\,\delta^{(n+1)}(x) = \left(d + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n+1)}(x). \tag{19}$$

Из А1 и А2 следует также, что $\ln|x|\varepsilon = \varepsilon\ln|x|$. Дифференцируя последнее равенство, получим в случаях (а) и (б) п. 3.3

$$c\delta(x) = \varepsilon Px^{-1} - Px^{-1}\varepsilon = 2(\ln|x|\delta(x) - \delta(x)\ln|x|) = 2(d-a)\delta(x). \tag{20}$$

Следовательно, $c = 2(d-a)$ и согласно п. 3.3 при $b \neq 2$ имеем $d = a$, а при $b = 2$ a и d — произвольные $c = 2(d-a)$. В случае (в), дифференцируя $\ln|x|\varepsilon = \varepsilon\ln|x|$, получим

$$\frac{2}{b-1}\delta(x) = \varepsilon Px^{-1} - Px^{-1}\varepsilon = 2(\ln|x|\delta(x) - \delta(x)\ln|x|) = 2(d-a)\delta(x),$$

откуда $d = a + 1/(b-1)$. Формулы (18) и (19) в этом случае примут вид

$$\delta^{(n+1)}(x)\ln|x| = \left(a + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n+1)}(x), \tag{18'}$$

$$\ln|x|\,\delta^{(n+1)}(x) = (a + 1/(b-1))\,\delta^{(n+1)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{19'}$$

Утверждение 2. *Не существует произведения на* $\widetilde{E}$, *удовлетворяющего* А1, А2, А3, А4, *для которого бы подкольцо, порожденное распределениями* x, $\delta^{(n)}(x)$, $\ln|x|$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), *было ассоциативным.*

Доказательство. Справедливость утверждения показывает пример:

$$a\delta(x)=\delta(x)\ln|x|=\left(\frac{x^{n-1}\delta^{(n)}(x)}{(-1)^{n-1}n!}\ln|x|\right)\neq\frac{x^{n-1}}{(-1)^{n-1}n!}(\delta^{(n)}(x)\ln|x|)=$$

$$=\left(a+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b+k}\right)\delta(x).$$

4.2. *Произведения вида* $x^m\ln|x|$, $Px^{-n}\ln|x|$. Из A1 и A2 $x^m\ln|x|$ совпадает с поточечным произведением x^m и $\ln|x|$ как локально интегрируемых функций. Из A1 и A2 также следует, что $Px^{-1}\ln|x|=\ln|x|Px^{-1}+h\delta(x)$. Дифференцируя n раз и применяя A4, получим

$$Px^{-n-1}\ln|x|=\ln|x|Px^{-n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}h\delta^{(n)}(x)\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ldots).\tag{21}$$

Утверждение 3. *Не существует произведения на* $\widetilde{E}$, *удовлетворяющего* A1, A2, A3, A4, *для которого бы подкольцо, порожденное распределениями* Px^{-n}, $\delta^{(m-1)}(x)$, $\ln|x|$ $(n,\ m,\ =1,\ 2,\ldots)$, *было ассоциативным*:

$$\left(a+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n)}(x)=\delta^{(n)}(x)\ln|x|=\left((-1)^n\prod_{k=1}^{n}(b+k-1)Px^{-n}\delta(x)\right)\ln|x|\neq$$

$$\neq(-1)^n\prod_{k=1}^{n}(b+k-1)Px^{-n}(\delta(x)\ln|x|)=a\delta^{(n)}(x).$$

Из этого утверждения и A3 с учетом (21) следует

$$Px^{-n}\ln|x|=\ln|x|Px^{-n}\quad(n=1,\ 2,\ldots).\tag{22}$$

4.3. *Выводы.* Пусть $\mathfrak{S}$ — множество всех произведений на span$\{\delta^{(k-1)}(x)$, $Px^{-n}x^m$, $\varepsilon(x)$, $\ln|x|$, k, n, m, $\in N\}$, удовлетворяющих аксиомам A1, A2, A3, A4. Для любого произведения из $\mathfrak{S}'$

$$\delta^{(n)}(x)\delta^{(m)}(x)=0,\ \varepsilon^2=1,$$

$$\varepsilon\delta^{(n)}(x)=-\delta^{(n)}(x)\varepsilon=\delta^{(n)}(x)\ (=-\delta^{(n)}(x)),$$

$$Px^{-n}Px^{-m}=Px^{-n-m},\ x^nx^m=x^{n+m},$$

$$x^n\varepsilon=\varepsilon x^n,\ x^n\ln|x|=\ln|x|x^n,$$

$$x^m\delta^{(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^m n!}{(n-m)!}\delta^{(n-m)}(x), & n>m;\\ 0, & n\leqslant m,\end{cases}$$

$$x^mPx^{-m}=\begin{cases}Px^{-n+m}, & n>m;\\ x^{m-n}, & n\leqslant m,\end{cases}$$

$$Px^{-n}\ln|x|=\ln|x|Px^{-n},\ \varepsilon\ln|x|=\ln|x|\varepsilon\ (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Результаты перемножения распределений $\delta^{(n)}(x)$ и Px^{-m}, Px^{-m} и ε, $\delta^{(n)}$ и $\ln|x|$ зависят от выбора произведения из $\mathfrak{S}$. Возможны три случая:

(a) $$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=\delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=(-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),$$

$$Px^{-m}\varepsilon=\varepsilon Px^{-m},\ \ln|x|\delta(x)=\delta(x)\ln|x|=a\delta(x),$$

$$\ln|x|\delta^{(n)}(x)=\delta^{(n)}(x)\ln|x|=\left(a+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b+k-1}\right)\delta^{(n)}(x)\ (n,\ m=1,\ 2,\ldots),$$

где a и b — произвольные постоянные ($b\neq 0,\ -1,\ -2,\ldots$), задание которых определяет некоторое произведение из $\mathfrak{S}$;

(б) $$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=\delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=(-1)^m\frac{n!}{(n+m)!}\delta^{(n+m-1)}(x),$$

$$Px^{-m}\varepsilon=\varepsilon Px^{-m}+\frac{(-1)^{m-1}2(a-d)}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(x),$$

$$\delta(x)\ln|x|=a\delta(x),\quad \ln|x|\delta(x)=d\delta(x),$$

$$\delta^{(n)}(x)\ln|x|=\left(a+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n)}(x),$$

$$\ln|x|\delta^{(n)}(x)=\left(d+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n)}(x)\ (n,\ m=1,\ 2,\ldots),$$

где a и d — произвольные постоянные, задание которых определяет некоторое произведение из $\mathfrak{S}$;

(в) $$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=(-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),\quad \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=0$$

$$\Bigg(\text{соответственно } \delta^{(n-1)}(x)Px^{-m}=(-1)^m\prod_{k=n}^{n+m-1}\frac{1}{b+k-1}\delta^{(n+m-1)}(x),$$

$$Px^{-m}\delta^{(n-1)}(x)=0\Bigg),$$

$$\ln|x|\delta^{(n-1)}(x)=\left(a+\frac{1}{b-1}\right)\delta^{(n-1)}(x),\quad \delta(x)\ln|x|=a\delta(x),$$

$$\delta^{(n)}(x)\ln|x|=\left(a+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n)}(x)\ (n,\ m=1,\ 2,\ldots)$$

$$\Bigg(\text{соответственно } \delta^{(n+1)}(x)\ln|x|=\left(a+\frac{1}{b-1}\right)\delta^{(n-1)}(x),\quad \ln|x|\delta(x)=a\delta(x),$$

$$\ln|x|\delta^{(n)}(x)=\left(a+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b+k}\right)\delta^{(n)}(x)\Bigg),$$

где a и b — произвольные постоянные ($b\neq 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ldots$), задание которых определяет некоторое произведение из $\mathfrak{S}$. Выполнение всех аксиом проверяется непосредственно.

Дополнение 2. *О произведении гиперфункций.* Известно (см. [11]), что для любых наборов чисел a_n, b_n ($n=0,\ 1,\ 2,\ldots$), удовлетворяющих условиям $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|n!}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|n!}=0$, определены гиперфункции $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\delta^{(n)}(x)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nD^nPx^{-1}\in B(R)$, где $B(R)$ — пространство гиперфункций М. Сато на R. Пусть

$$\hat{E}=\operatorname{span}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\delta^{(n)}(x),\ \sum_{k=0}^{\infty}b_kD^kPx^{-1},\ a(x),\ \ln|x|,\ \varepsilon(x)\right\},$$

где $a(x)$ — произвольная целая функция. $\hat{E}$ будет подпространством $B(R)$. Полученные выше формулы для произведений распределений позволяют естественным образом определять произведение гиперфункций из $\hat{E}$ формальным перемножением соответствующих рядов распределений или ряда на распределение. Нужно только проверить, что выполняются условия на рост коэффициентов. Например,

$$\ln|x|\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^{(n)}(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(a + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{b+k}\right) \delta^{(n)}(x), \text{ где } \lim \sqrt[n]{|a_n| n!} = 0.$$

При достаточно больших k имеем $0 < 1/(b+k) < k$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\ln\left|a + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(b+k)}\right|\right)\Big/ n\right] = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n! \left|a + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(b+k)}\right|} = 0$, что и требовалось доказать.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.— М., 1968.—276 с.
2. Иванов В. К. Умножение распределений и регуляризация расходящихся интегралов.— Изв. вузов. Матем., 1971, № 3, с. 41—49.
3. Иванов В. К. Алгебра одного класса обобщенных функций.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 4, с. 779—781.
4. Braunss G. Canonical Products of Distributions of Nonlinear Wave Equations.— J. Different. Equat., 1974, v. 16, № 3, p. 399—412.
5. Keller K. Konstruction von Produkten in einer für Feldtheorien wichtigen Klasse von Distributionen. „Thesis" Aachen, 1974.
6. Коршунов М. К. Об ассоциативных и лейбницевых алгебрах распределений.— Изв. вузов. Матем., 1979, № 5, с. 74—77.
7. Курош А. Г. Общая алгебра.— М., 1974.— 160 с.
8. Schwartz L. Theorie des distributions.— T. 1. Paries Hermann et Cie, Editeurs.—Gaz. Math., 1953, v. 14, № 54, p. 17.
9. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М., 1958.— 439 с.
10. Sato M. Theory of hyperfunctions, I, II.— J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1959, Sec. I, v. 8, № 1, p. 139—193; 1960, Sec. I, v. 8, № 2, p. 387—437.
11. Kaneko A. Fundamental principle and extension of solutions of linear differential equations with constant coefficients.— Lect. Notes Math., 1973, v. 287, p. 122—134.

г. Свердловск

Поступила 10 IV 1978

А. А. Васильев. Кратная интерполяция и аппроксимация сплайнами произвольного дефекта

(аннотация статьи, принятой к печати)

В данной заметке рассматриваются полиномиальные сплайны S степени r с фиксированными узлами t_j и с дефектами k_j в узлах t_j, $j \in 1:m$. Для сплайнов этого класса рассматривается неполная интерполяционная задача с кратными узлами. Установлены необходимые и достаточные условия, которые нужно наложить на расположение узлов интерполирования, чтобы интерполяционная задача была разрешима при любых правых частях. Далее рассматривается задача равномерного приближения непрерывной функции с ограничениями интерполяционного типа. Сформулировано условие непустоты ограничивающего множества, получено необходимое и достаточное условие в альтернансной форме для сплайна наилучшего приближения. (Работа поступила в журнал „Математика" 11 I 1979.)